

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

ESTRATÉGIAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA PARA O VRPTW NA LOGÍSTICA DE ENTREGAS URBANAS EXPRESSAS DE ÚLTIMA MILHA EM GRANDES INSTÂNCIAS REAIS DE CIDADES BRASILEIRAS

Juan Soares Rosas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática do Instituto de Computação Universidade Federal do Amazonas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientadora: Rosiane de Freitas Rodrigues,

Dezembro de 2025
Manaus - AM

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R789e Rosas, Juan Soares

Estratégias de Programação Inteira para o VRPTW na logística de entregas urbanas expressas de última milha em grandes instâncias reais de cidades brasileiras / Juan Soares Rosas. - 2025.

81 f. : il., color. ; 31 cm.

Orientador(a): Rosiane de Freitas Rodrigues.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Amazonas, Programa de Pós-Graduação em Informática, Manaus, 2025.

1. Branch-cut-and-Price. 2. Geração de Colunas. 3. Otimização Combinatória. 4. Problemas de Roteamento. 5. Programação Inteira. I. Rodrigues, Rosiane de Freitas. II. Universidade Federal do Amazonas. Programa de Pós-Graduação em Informática. III. Título

---

Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Informática

FOLHA DE APROVAÇÃO

"ESTRATÉGIAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA PARA RESOLVER O VRPTW NA LOGÍSTICA DE ENTREGAS URBANAS EXPRESSAS DE ÚLTIMA MILHA EM GRANDES INSTÂNCIAS REAIS DE CIDADES BRASILEIRAS"

JUAN SOARES ROSAS

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Professores:

Prof.ª Dr.ª Rosiane de Freitas Rodrigues - **Presidente**

Prof. Dr. Raimundo da Silva Barreto - **Membro Interno**

Prof. Dr. Rainer Xavier de Amorim - **Membro Externo**

Prof. Dr. Augusto César Barreto Rocha - **Membro Externo**

Manaus, 29 de dezembro de 2025.

Documento assinado eletronicamente por **Rosiane de Freitas Rodrigues**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/12/2025, às 10:26, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 .

Documento assinado eletronicamente por **Raimundo da Silva Barreto**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/12/2025, às 12:17, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 .

Documento assinado eletronicamente por **Augusto Cesar Barreto Rocha**, **Professor do Magistério Superior**, em 07/01/2026, às 15:56, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 .

Documento assinado eletronicamente por **Rainer Xavier de Amorim**, **Professor do Magistério Superior**, em 08/01/2026, às 08:27, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2957137** e o código CRC **B229736E**.

Avenida General Rodrigo Octávio, 6200 - Bairro Coroado I Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho, Setor Norte - Telefone: (92) 3305-1181 / Ramal 1193
CEP 69080-900, Manaus/AM, coordenadorppgi@icomp.ufam.edu.br

Referência: Processo nº 23105.054933/2025-19 SEI nº 2957137

Primeiramente a Deus, por ser a minha força e guia em todas as etapas desta jornada. À minha amada esposa, pelo apoio incondicional, paciência e por estar ao meu lado em cada momento desta caminhada.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, autor da minha vida e minha fortaleza em todos os momentos; toda glória seja a ti, meu Senhor. Sem a Sua graça infinita, a conclusão deste ciclo não seria possível.

À minha amada esposa, Clarice Rosas, que é muito mais do que minha companheira: é o meu equilíbrio, meu porto seguro e a minha maior incentivadora. Saiba que este título e cada etapa vencida também pertencem a você.

Aos meus pais, Viviane e James, e Márcio e Tatiana, e à minha querida sogra, Luzamaria, por todo o suporte e pelo apoio incondicional. À minha avó Ângela e aos meus avós Sebastião e Nazaré, cujas raízes, histórias de luta e exemplos de vida me sustentam. Aos meus irmãos, Samuel, Gabriel e Márcia Vitória, eu os amo muito; vocês são os melhores irmãos que uma pessoa pode ter.

Ao meu amigo e companheiro de academia, Thailson Clementino, peça-chave na execução deste trabalho. Agradeço profundamente pela amizade e por atuar como um verdadeiro mentor em momentos decisivos e fundamentais do projeto.

À minha orientadora, Profa. Dra. Rosiane Rodrigues, cientista de excelência e inteligência brilhante, expresso minha profunda gratidão por não desistir de mim e por compartilhar seu vasto conhecimento com tanta generosidade. Obrigado também pela competência acadêmica impecável ao longo de todo o processo de orientação.

À Universidade Federal do Amazonas (UFAM) e à empresa Loggi, pela parceria fundamental.

Aos pastores Aristarco e Jaqueline Mello, e aos pastores Augusto e Márcia Bacovis, pela cobertura espiritual, pelas orações e pelos conselhos que foram fundamentais para manter minha fé e resiliência diante dos obstáculos, Aos meus amigos Frederico (Fred) e Patrique que sempre me apoiaram no mestrado, aos amigos da igreja e do trabalho obrigado pela torcida.

Por fim, registro minha gratidão e imensa saudade ao casal Emanuel e Vera Caminha *(in memoriam)*. Seus exemplos de dedicação aos estudos e amor ao conhecimento são inspiração; sinto saudades, mas sigo firme com a esperança do nosso reencontro.

Resumo da Dissertação apresentada à IComp/UFAM como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Informática (M.Sc.).

ESTRATÉGIAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA PARA O VRPTW NA LOGÍSTICA DE ENTREGAS URBANAS EXPRESSAS DE ÚLTIMA MILHA EM GRANDES INSTÂNCIAS REAIS DE CIDADES BRASILEIRAS

JUAN SOARES ROSAS

Dezembro/2025

Orientadora: Rosiane de Freitas Rodrigues

Impulsionado pela pandemia da COVID-19 e mantido em alta pela recuperação econômica do país, o crescimento do comércio eletrônico no Brasil foi enorme, acompanhando o restante do mundo. Essa expansão impôs um grande desafio às empresas, com logística mais complexa envolvendo entregas no mesmo dia (same-day delivery) e diversas restrições de prazo. Dado este contexto, nesta dissertação são exploradas estratégias de programação inteira para modelar e resolver aspectos dinâmicos e estocásticos de problemas de roteamento envolvidos na logística de entregas urbanas expressas, considerando grandes cidades brasileiras, representados pelo Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (Vehicle Routing Problem with Time Windows - VRPTW). O VRPTW é um problema complexo de otimização combinatória que envolve encontrar as rotas mais eficientes para uma frota de veículos atender a um conjunto de clientes, cada um com uma janela de tempo específica para atendimento, e que estende o VRP clássico, computacionalmente NP-difícil, ao impor restrições temporais às restrições existentes. O objetivo principal é minimizar os custos totais de deslocamento (distância ou tempo, geralmente). Para resolver esse problema, foram investigadas formulações em programação inteira implementadas nas ferramentas CPLEX, que utiliza o método de cortes Branch-and-Cut, e também uma ferramenta de propósito específico para resolução de VRPs, o VRPSolver, que utiliza o método de geração de colunas Branch-and-Price, em que os subproblemas são modelados como problemas de caminho mínimo com restrições de recursos. Em destaque, a estratégia via VRPSolver foi testada em três conjuntos de

instâncias: (1) instâncias clássicas artificiais de Solomon; (2) grandes instâncias urbanas reais de cidades brasileiras adaptadas do benchmark loggiBUD, do repositório da empresa de entregas expressas Loggi, parceira no projeto de pesquisa; (3) e um conjunto novo de instâncias geradas do estado do Amazonas (Manaus e algumas cidades adjacentes). Os resultados foram satisfatórios, e o método de geração de colunas utilizado pelo VRPSolver apresentou melhor desempenho no VRPTW, especialmente quando as janelas de tempo são mais justas, bem como em grandes instâncias urbanas reais de cidades brasileiras, validando sua aplicabilidade em cenários logísticos realistas e com a presente investigação apresentando possibilidades de entendimento e mitigação da complexidade logística na Amazônia.

Palavras-chave: Branch-cut-and-Price, geração de colunas, otimização combinatória, problemas de roteamento, programação inteira, VRPsolver.

Abstract of Dissertation presented to IComp/UFAM as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

INTEGER PROGRAMMING STRATEGIES FOR THE VRPTW IN LAST-MILE EXPRESS URBAN DELIVERY LOGISTICS ON LARGE REAL-WORLD INSTANCES FROM BRAZILIAN CITIES

JUAN SOARES ROSAS

December/2025

Advisor: Rosiane de Freitas Rodrigues

Driven by the COVID-19 pandemic and sustained by the country's economic recovery, the growth of e-commerce in Brazil has been enormous, keeping pace with the rest of the world. This expansion has posed a significant challenge for companies, with more complex logistics, same-day delivery, and various time constraints. Given this context, this dissertation explores integer programming strategies to model and solve the dynamic and stochastic aspects of routing problems in express urban delivery logistics, focusing on large Brazilian cities, as represented by the Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW). The VRPTW is a complex combinatorial optimization problem that involves finding the most efficient routes for a fleet of vehicles to serve a set of customers, each with a specific time window for service, and that extends the classical NP-hard VRP by imposing temporal constraints on the existing. The primary objective is to minimize total travel costs (in terms of distance or time). To solve this problem, integer programming formulations implemented in the CPLEX tools were investigated, which use the Branch-and-Cut method, and a purpose-built tool for solving VRPs, VRPSolver, which uses the Branch-and-Price column generation method, where subproblems are modeled as shortest-path problems with resource constraints. In particular, the VRPSolver strategy was tested on three sets of instances: (1) classic artificial Solomon instances; (2) large real urban instances of Brazilian cities adapted from the loggiBUD benchmark, from the repository of the express delivery company Loggi, a partner in the research project; (3) and a new set of instances generated from the state of Amazonas (Manaus and some adjacent cities).

The results were satisfactory, with the column generation method used by VRPSolver showing better performance in VRPTW, especially when time windows are tighter, as well as in large real urban instances of Brazilian cities, validating its applicability in realistic logistics scenarios, and with the conducted investigation presenting possibilities for understanding and mitigating logistical complexity in the Brazilian Amazon region.

Keywords: Branch-Cut-and-Price, column generation, combinatorial optimization, integer programming, routing problems, VRPSolver.

Sumário

Lista de Figuras **xiv**

Lista de Tabelas **xvi**

1 Introdução **1**

1.1 Questão de Pesquisa 2

1.2 Objetivos 2

1.2.1 Objetivo Geral 3

1.2.2 Objetivos Específicos 3

1.3 Metodologia de Pesquisa 3

1.4 Organização desta Dissertação 3

2 Fundamentação Teórica **5**

2.1 Problemas, Algoritmos e Complexidade Computacional 6

2.2 Conceitos Fundamentais em Otimização e Instâncias de Problemas 7

2.3 Problemas de Otimização em Grafos 9

2.4 Problemas de Roteamento de Veículos -*VRP* 11

2.4.1 Variantes do VRP 12

2.4.2 Categorias do *VRP* 12

2.4.3 Problemas de Roteamento de Veículos dinâmicos 13

2.4.4 Problemas de Roteamento de Veículos Estocástico 14

2.4.5 Problemas de Roteamento de Veículos Dinâmico e Estocástico . . 14

2.5 Modelos de Otimização e Programação Linear Inteira 16

2.5.1 Programação Linear (PL) 16

2.5.2 Programação Linear Inteira (PLI) e Mista (PLIM) 17

2.5.3 Formulação de PLIM para Problemas de Roteamento 18

2.5.4 Desafios na Resolução 20
2.6 Logística de Última Milha e Entregas Urbanas Expressas 20
2.6.1 Definição e Importância 21
2.6.2 Desafios Urbanos 22
2.6.3 Entregas Expressas 22
2.6.4 Contexto Brasileiro 23
2.6.5 Métodos de Hubs na Logística Urbana e o Benchmark LoggiBUD 23
2.6.5.1 Conceito de Hubs 23
2.6.5.2 Problema de Localização de P-Hub (P-Hub Location Problem) 24
2.6.5.3 Aplicação no Benchmark LoggiBUD 24

3 Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo - VRPTW 25
3.1 Formulação Matemática do VRPTW 25
3.2 Complexidade Computacional do VRPTW 29
3.3 Trabalhos Relacionados VRPTW 30

4 Modelos e Métodos 36
4.1 Modelo Matemático do VRPTW para o VRPSolver 36
4.1.1 Grafo para o Subproblema RCSP 37
4.1.2 Formulação 38
4.2 Formulação VRTW Clássica de Kohl 39

5 Experimento e Análise de Resultados 42
5.1 Projeto de Experimento 42
5.2 Instâncias 43
5.2.1 Instâncias de Solomon 43
5.2.2 Instâncias do LoggiBUD 44
5.2.3 Instâncias do Amazonas 46
5.2.3.1 Parâmetros de Validação das Instâncias Criadas 50
5.2.3.2 Processo de Criação de Instâncias 52
5.3 Resultados 53
5.3.1 Instâncias de Solomon 53

5.3.2 Experimentos para as instâncias adaptadas do *loggiBUD* com *VRP-Solver* 55
5.3.3 Instâncias do Estado do Amazonas 57
5.3.3.1 Resultados para Manaus 57
5.3.3.2 Resultados para Manaus e Cidades Metropolitanas . . . 66
5.4 Publicações 74

6 Considerações finais **75**

Referências **77**

Lista de Figuras

2.1 A categorização de VRPs. Fonte:(SCHORPP, 2012). 13
2.2 Sistema Dinâmico Baseado em Informações Estocástica Pré-Processada. Fonte: Próprio autor (2024). 15
2.3 Sistema Dinâmico Baseado em Informações Estocástica com tomada de decisão on-line. Fonte: Próprio autor (2024). 15
2.4 Representação da Cadeia de Suprimentos (*supply chain*). Fonte: Próprio autor (2025) 21

4.1 Exemplo de grafo com restrição de recursos. Fonte: próprio autor (2022). 38

5.1 Cidades do Estado do Amazonas. Fonte: Próprio autor (2025). 46
5.2 Instância: manaus-1hub-0-am-3-292. Fonte: Próprio autor (2025). 47
5.3 Instância: manaus-2hub-1-am-6-328. Fonte: Próprio autor (2025). 47
5.4 Instância: manaus-4hub-0-am-59-119. Fonte: Próprio autor (2025). . . . 48
5.5 Instância: metro-4hub-0-am-12-118. Fonte: Próprio autor (2025). 48
5.6 Instância: metro-4hub-1-am-10-18. Fonte: Próprio autor (2025). 49
5.7 Instância: metro-4hub-2-am-10-24. Fonte: Próprio autor (2025). 49
5.8 Instância Adaptada: manaus-1hub-0-am-3-1h-292. Fonte: Próprio autor (2025). 50
5.9 Comparativo dos dados demográficos e socioeconômicos das cidades do Estados do Amazonas, DF, Pará e Rio de Janeiro. Fonte: Próprio autor (2025) 51
5.10 Fluxograma: Processo de Criação das Instâncias do Estado do Amazonas. Fonte: Próprio autor (2025) 52

5.11 Solução para a instância F30m-pa-n266, traçada no mapa, contendo as ruas da cidade de Castanhal, no estado do Pará, e arredores. Fonte: (LOGGI, 2021a). 57
5.12 Instância de Manaus para 1 hub. Fonte: Próprio autor (2025). 63
5.13 Instância de Manaus: manaus-1hub-0-am-3-15m-292. Fonte: Próprio autor (2025). 63
5.14 Instâncias de Manaus para 2 hub. Fonte: Próprio autor (2025). 64
5.15 Instância de Manaus: manaus-2hub-1-am-55-2h-108. Fonte: Próprio autor (2025). 64
5.16 Instâncias de Manaus para 4 hub. Fonte: Próprio autor (2025). 65
5.17 Instância de Manaus: manaus-4hub-0-am-59-15m-119. Fonte: Próprio autor (2025). 65
5.18 Instância de Manaus e Cidades Metropolitanas para 1 hub. Fonte: Próprio autor (2025). 71
5.19 Instância: metro-1hub-0-am-52-1h-128. Fonte: Próprio autor (2025). . . . 71
5.20 Instância de Manaus e Cidades Metropolitanas para 2 hub. Fonte: Próprio autor (2025). 72
5.21 Instância: metro-2hub-0-am-52-2h-128. Fonte: Próprio autor (2025). . . . 72
5.22 Instância de Manaus e Cidades Metropolitanas para 4 hub. Fonte: Próprio autor (2025). 73
5.23 Instância: metro-4hub-0-am-12-1h-118. Fonte: Próprio autor (2025). . . . 73

Lista de Tabelas

3.1 Resumo dos Artigos sobre VRP/VRPTW 31

4.1 Tabela com o exemplo de uma instância. 38

5.1 Comparativo dos dados demográficos e socioeconômicos. Fonte: Próprio autor (2025) 50

5.2 Tabela com resultados de experimentos realizados nas instâncias Solomon. 54

5.3 Tabela com resultados para as instâncias com janelas fixas de 30 minutos. 55

5.4 Tabela com resultados para as instâncias com janelas fixas de 1 hora. . . . 56

5.5 Resultados das instâncias de Manaus para 15 minutos e 1 Hub. 59

5.6 Resultados das instâncias de Manaus para 15 minutos e 2 Hubs. 59

5.7 Resultados das instâncias de Manaus para 15 minutos e 4 Hubs. 59

5.8 Resultados das instâncias de Manaus para 30 minutos e 1 Hub. 60

5.9 Resultados das instâncias de Manaus para 30 minutos e 2 Hubs. 60

5.10 Resultados das instâncias de Manaus para 30 minutos e 4 Hubs. 60

5.11 Resultados das instâncias de Manaus para 1 hora e 1 Hub. 61

5.12 Resultados das instâncias de Manaus para 1 hora e 2 Hubs. 61

5.13 Resultados das instâncias de Manaus para 1 hora e 4 Hubs. 61

5.14 Resultados das instâncias de Manaus para 2 horas e 1 Hub. 62

5.15 Resultados das instâncias de Manaus para 2 horas e 2 Hubs. 62

5.16 Resultados das instâncias de Manaus para 2 horas e 4 Hubs. 62

5.17 Resultados da região metropolitana de Manaus para 15 minutos e 1 Hub. . 66

5.18 Resultados da região metropolitana de Manaus para 15 minutos e 2 Hubs. 67

5.19 Resultados da região metropolitana de Manaus para 15 minutos e 4 Hubs. 67

5.20 Resultados da região metropolitana de Manaus para 30 minutos e 1 Hub. . 67

5.21 Resultados da região metropolitana de Manaus para 30 minutos e 2 Hubs. 68

5.22 Resultados da região metropolitana de Manaus para 30 minutos e 4 Hubs. 68
5.23 Resultados da região metropolitana de Manaus para 1 hora e 1 Hub. . . . 68
5.24 Resultados da região metropolitana de Manaus para 1 hora e 2 Hubs. . . . 69
5.25 Resultados da região metropolitana de Manaus para 1 hora e 4 Hubs. . . . 69
5.26 Resultados da região metropolitana de Manaus para 2 horas e 1 Hub. . . . 69
5.27 Resultados da região metropolitana de Manaus para 2 horas e 2 Hubs. . . 70
5.28 Resultados da região metropolitana de Manaus para 2 horas e 4 Hubs. . . 70

Capítulo 1

Introdução

Com a internet cada vez mais presente na vida das pessoas, o comércio eletrônico no Brasil experimentou um crescimento exponencial. Esse avanço foi impulsionado pela pandemia de *COVID-19*, levando o setor a crescer de 2020 com o faturamento de R$ 87,4 bilhões a 204,27 bilhões em 2024 (ABIACOM, 2025). A tendência de crescimento se manteve contínua, com o *e-commerce* sustentando altos níveis de vendas mesmo após a pandemia. Um dos reflexos desse avanço é o desempenho notável das pequenas e médias empresas (PMEs), cujas vendas *online* aumentaram significativamente e projetam um crescimento de até 1.200% de 2019 até o final de 2025 (MDIC, 2025). Essa mudança de hábito de compra, que prioriza a satisfação do cliente e a reputação da marca, criou novos desafios logísticos.

Esse cenário de expansão do *e-commerce* gerou desafios cruciais para a logística de última milha, a etapa final e mais crítica da entrega. A satisfação do cliente e a reputação da marca dependem muito da eficiência dessa fase. Para garantir que as entregas sejam realizadas de forma rápida e com o menor custo possível, as empresas se deparam com o Problema de Roteamento de Veículos (do inglês, *Vehicle Routing Problem - VRP*). Esse desafio consiste em otimizar as rotas para que os veículos saiam do *hub*/depósito, passem por todos os pontos de entrega e retornem, utilizando a menor distância e o menor custo.

O *VRP* e suas diversas variantes são temas de investigações na área de pesquisa operacional. O objetivo é desenvolver algoritmos e metodologias que permitam às empresas alocar suas entregas em veículos de diferentes capacidades, planejando percursos eficientes. Essa otimização é fundamental para que a cadeia de suprimentos funcione de forma fluida, atendendo à crescente demanda sem comprometer a rentabilidade. Em aplicações

reais, o *VRP* se torna mais complexo, pois diversas restrições operacionais precisam ser consideradas.

Entre as restrições mais importantes estão as janelas de tempo, que são os prazos de entrega específicos impostos pelos clientes. Um exemplo prático e notável é o da Loggi, uma empresa de entregas expressas que opera com um modelo de economia compartilhada. O maior desafio da Loggi é criar uma rede logística sustentável para entregas no mesmo dia, uma situação que representa o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (do inglês, *Vehicle Routing Problem with Time Windows- VRPTW*). Esse problema se intensifica pela complexidade de respeitar os prazos de entrega rigorosos, impostos por alguns clientes.

Diante desse cenário, onde a expansão do *e-commerce* exige uma logística cada vez mais eficiente para entregas rápidas e com janelas de tempo, essa pesquisa propõe um modelo para solucionar o *VRPTW*. O objetivo é encontrar rotas de custo mínimo para uma frota homogênea, ao mesmo tempo que se respeita a capacidade dos veículos e, de forma crucial, as restrições de tempo de entrega, incorporando as características de dinamicidade de uma rota real, mesmo que de modo fixo. Essa abordagem busca contribuir para a otimização da logística de última milha, um fator determinante para o sucesso das empresas no mercado digital.

1.1 Questão de Pesquisa

Analisando as necessidades deste cenário, uma **questão de pesquisa** pode ser formulada: será que um método exato mais robusto e computacionalmente intensivo, incorporado em um *solver* de propósito específico para resolução do *VRPTW*, é mais adequado para a resolução de grandes instâncias urbanas reais? E se forem incorporadas outras condições que representem aspectos dinâmicos e/ou estocásticos do problema?

1.2 Objetivos

Com base na questão de pesquisa foram estabelecidos os objetivos geral e específicos desta dissertação, que são descritos a seguir.

1.2.1 Objetivo Geral

O **objetivo geral** deste trabalho consiste em analisar comparativamente a aplicação de métodos exatos robustos *Branch-and-Cut* (BC) e *Branch-Cut-and-Price* (BCP) usando *solvers* de propósito geral e específico na resolução do *VRPTW*, considerando grandes instâncias urbanas reais.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os principais **objetivos específicos** consistem em:

- Compilar os principais resultados envolvendo problemas de roteamento de veículos e aspectos dinâmicos e estocásticos da literatura;
- Desenvolver estratégias para explorar o *benchmark* LoggiBUD de entregas urbanas reais;
- Incorporar características de dinamicidade, mesmo de modo fixo, contribuindo para o *benchmark* LoggiBUD.
- Contribuir com novas instâncias para o *benchmark* LoggiBUD que incorporem o cenário de cidades do estado do Amazonas.

1.3 Metodologia de Pesquisa

A pesquisa é de natureza **aplicada e quantitativa**, pois busca resolver um problema prático de otimização de rotas para entregas, investigando variações do Problema de Roteamento de Veículos (VRP) e aplicando métodos para encontrar soluções eficientes.

A metodologia científica é de cunho **básico e aplicado**, de procedimento experimental, visando ampliar o conhecimento científico sobre o *VRP* e resolver problemas reais e específicos através de instâncias geradas e solucionadas em *Solvers*.

1.4 Organização desta Dissertação

Este trabalho está organizado conforme descrito a seguir. No Capítulo 1 é apresentado o problema em estudo, a motivação da pesquisa e os objetivos geral e específicos. No

Capítulo 2 é dada a contextualização bibliográfica deste trabalho. No Capítulo 3 é detalhado o *VRPTW*. No Capítulo 4 é dada uma explicação técnica sobre o que é cada modelo utilizado na pesquisa. No Capítulo 5 são apresentados os resultados da pesquisa. No Capítulo 6 são tecidas as considerações finais deste trabalho e apresentadas as referências consultadas.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Este capítulo estabelece os fundamentos teóricos necessários para a compreensão do problema da pesquisa. Iniciamos com a subseção 2.1 Problemas, Algoritmos e Complexidade Computacional que vai apresentar como a eficiência de um algoritmo é medida e por que certos problemas são considerados "difíceis"de resolver. Em seguida na subseção 2.2, aprofundamos em Conceitos Fundamentais em Otimização e Instâncias de Problemas, definindo os componentes essenciais de um problema de otimização e a importância da formulação de instâncias representativas.

A partir desses conceitos, passamos a um domínio mais específico: os Problemas de Otimização em Grafos,na subseção 2.3, que serve como a base para a modelagem de redes de transporte. Esta seção leva à discussão dos Problemas de Roteamento de Veículos *(VRP)*, na subseção 2.4 , onde introduzimos a estrutura básica e as variações deste problema clássico da otimização. Para resolver esses desafios, apresentamos na subseção 2.5 os Modelos de Otimização e Programação Linear Inteira, uma ferramenta poderosa que permite traduzir problemas do mundo real em equações matemáticas.

Finalmente, conectamos toda essa teoria ao contexto prático na subseção 2.6 Logística de Última Milha e Entregas Urbanas Expressas, destacando como os modelos de roteamento são cruciais para otimizar as operações logísticas e enfrentar os desafios do ambiente urbano.

2.1 Problemas, Algoritmos e Complexidade Computacional

Um problema computacional é dito tratável se existe um algoritmo cuja complexidade de tempo e espaço é polinomial, do tipo $O(N^k)$, para resolvê-lo, e intratável caso contrário. No entanto, o desconhecimento de tal algoritmo não significa que ele não exista. Em 1971, Cook (COOK, 1971) deu uma contribuição significativa a este assunto, criando uma classe de problemas NP-completos. A classe de problemas cujas soluções podem ser obtidas por um algoritmo polinomial determinístico é chamada P. Muitos problemas, mesmo que não possam ser resolvidos por algoritmos polinomiais determinísticos, podem ser testados para soluções em tempo polinomial ou soluções podem ser encontradas usando algoritmos polinomiais não determinísticos. Diz-se que esses problemas pertencem à classe NP *(do inglês, Nondeterministic Polynomial)* (CORMEN et al., 2002). Cook (COOK, 1971) prova a existência de uma subclasse de problemas mutuamente correlacionados em NP onde há uma grande chance de serem verdadeiramente intratáveis, ou seja, não existe um algoritmo polinomial determinístico para resolvê-lo. Como resultado, não há muita expectativa de se obter algum algoritmo exato eficiente que possa resolvê-lo a tempo, para casos grandes. Atualmente, a complexidade dos algoritmos conhecidos para resolvê-los é exponencial $O(K^n)$, fatorial $O(N!)$, mas nunca polinomial.

Problemas dessa classe contidos em NP são chamados de NP-completos. O primeiro problema NP-completo, provado por Cook (COOK, 1971), é o SAT *(do inglês, boolean satisfiability problem, muitas vezes abreviado como SATISFIABILITY ou SAT)*, que consiste em dizer se existe ou não uma combinação de estados (sim/não) para as variáveis de uma expressão booleana regular conjuntiva que a torna verdadeira. Cook provou que se existe um algoritmo determinístico capaz de resolver SAT em tempo polinomial então P=NP. Usando transformações de tempo polinomial, o SAT já foi reduzido a vários outros problemas, como o problema do caixeiro viajante, o problema da coloração de grafos e muitos outros. Consequentemente, se algum desses problemas for resolvido por algoritmos polinomiais, SAT também será resolvido, resultando em P=NP. Portanto, acredita-se que tal algoritmo dificilmente exista. No entanto, problemas NP-completos são todos problemas do tipo decisão, como SAT (Sim ou Não) e ainda devem estar na classe NP. Outra classe de problemas que também são intratáveis como problemas NP-completos é a

classe NP-difícil que em teoria da complexidade computacional, é uma classe de problemas que são, informalmente, "Pelo menos tão difíceis quanto os problemas mais difíceis em NP"(SIPSER, 1996). Um problema é NP-difícil se todos os problemas NP são deriváveis dele em tempo polinomial.

Na prática, basta provar que um problema NP-completo ou outro problema NP-difícil já comprovado pode ser polinomialmente transformado no problema de que se trata para ser classificado como NP-difícil. Assim como os problemas NP-completos, um problema NP-difícil só pode ser resolvido em tempo polinomial se P=NP.

2.2 Conceitos Fundamentais em Otimização e Instâncias de Problemas

A Otimização Combinatória é vastamente utilizada para resolver problemas de tomada de decisão em que as soluções possíveis são discretas e em número finito, mas frequentemente vasto ((SCHRIJVER et al., 2003);(PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998)). Um problema de otimização combinatória pode ser definido como a busca por um elemento ideal em um conjunto discreto de soluções factíveis. Este problema é tipicamente caracterizado por uma função objetivo e um conjunto de restrições, os quais devem ser satisfeitos por uma solução factível.

Matematicamente, um problema de otimização pode ser formulado como:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar/Maximizar} & f(x) \\
\text{Sujeito a} & x \in S \\
& g_i(x) \leq b_i, \forall i \in I \\
& h_j(x) = c_j, \forall j \in J \\
& x \in D^n
\end{array}
$$

Onde:

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o vetor de variáveis de decisão, cujos valores devem ser determinados.
- $f(x)$ é a função objetivo, que quantifica a medida de desempenho a ser minimizada (custo, distância) ou maximizada (e.g., lucro, eficiência).

- S é o espaço de busca, que define o domínio das variáveis de decisão. No contexto combinatório, D é um conjunto finito ou enumerável, e $x \in D^n$ indica que as variáveis são discretas (inteiras, binárias).

- $g_i(x) \leq b_i$ e $h_j(x) = c_j$ representam as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente, que limitam as soluções factíveis.

A natureza NP-Difícil para muitos problemas de otimização combinatória, como o Problema do Caixeiro Viajante *(em inglês, Traveling Salesperson Problem - TSP*) e suas variações como o Problema de Roteamento de Veículos - PRV *(em inglês, Vehicle Routing Problem-VRP)* , significa que a complexidade computacional para encontrar soluções ótimas cresce exponencialmente com o tamanho do problema. Essa intrínseca dificuldade impulsiona a pesquisa por algoritmos eficientes, que podem variar de métodos exatos (garantindo a otimalidade, mas com alto custo computacional para grandes instâncias) a heurísticas e meta-heurísticas (que fornecem soluções de boa qualidade em tempo razoável).

Para a validação e comparação dessas abordagens algorítmicas, o conceito de instância de problema é central. Uma instância é uma especificação concreta de todos os dados numéricos e paramétricos necessários para definir um caso particular de um problema de otimização. Em outras palavras, uma instância corresponde a uma atribuição específica de valores a todos os parâmetros de entrada de um modelo matemático.

Por exemplo, para um Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo - PRVJT *em inglês, Vehicle Routing Problem with Time Windows - VRPTW*, que foi formalmente introduzido por Dantzig e Ramser((DANTZIG; RAMSER, 1959)) e referenciado por Solomon (SOLOMON, 1987), uma instância é definida por um conjunto de parâmetros de entrada, tais como:

- N: número de clientes.

- M: número de veículos disponíveis.

- d_{ij}: distância ou tempo de viagem entre o ponto i e o ponto j.

- q_k: demanda do cliente k.

- Q_v: capacidade do veículo v.

- $[a_k, b_k]$: janela de tempo para atendimento do cliente k.
- Coordenadas cardeais ou geográficas dos nós.

A importância das instâncias na pesquisa em otimização é multifacetada:

- **Reprodutibilidade e Testes Rigorosos**: Elas fornecem um ambiente controlado para a execução e teste de algoritmos, garantindo que os resultados sejam comparáveis e reproduzíveis.
- **Avaliação de Desempenho**: Permitem a avaliação quantitativa da eficácia (qualidade da solução) e da eficiência (tempo computacional) de diferentes métodos sob as mesmas condições.
- **Identificação de Pontos Fortes e Fracos**: Através de testes em diversas instâncias com características variadas, é possível identificar os cenários em que um algoritmo performa melhor ou pior, orientando seu aperfeiçoamento.

As instâncias podem ser:

- **Sintéticas**: Geradas a partir de modelos estatísticos ou distribuições específicas para explorar diferentes características de problemas (dispersão de clientes, densidade de rede).
- **Reais**: Derivadas de dados operacionais para simular cenários práticos e validar a aplicabilidade das soluções em contextos do mundo real.

2.3 Problemas de Otimização em Grafos

Muitos problemas no campo da pesquisa operacional e logística, especialmente aqueles envolvendo transporte e fluxos, podem ser representados e analisados utilizando a Teoria dos Grafos. Um grafo, em sua forma mais fundamental, é uma estrutura matemática que consiste em um conjunto de objetos, chamados vértices (ou nós), e um conjunto de conexões entre pares desses objetos, chamadas arestas (ou arcos).

Formalmente, um grafo G pode ser definido como um par ordenado $G = (V, E)$, onde:

- V é um conjunto finito e não vazio de vértices.

- E é um conjunto de arestas, onde cada aresta é um par de vértices $\{u, v\}$ (para grafos não direcionados) ou um par ordenado (u, v) (para grafos direcionados, também chamados de digrafos), com $u, v \in V$.

- Arestas podem ter associados pesos ou custos (e.g., distância, tempo, capacidade), representados por uma função $w : E \to \mathbb{R}$.

Dentro de um grafo, conceitos como caminhos (sequência de vértices conectados por arestas distintas), ciclos (caminho que começa e termina no mesmo vértice) e conectividade são fundamentais para descrever relações e possibilidades de movimento ou fluxo. Problemas logísticos, como o roteamento de veículos, a alocação de recursos ou o fluxo de mercadorias, são naturalmente modelados como problemas em Grafos, onde os vértices podem representar clientes, depósitos ou pontos de transbordo, e as arestas, as rotas ou conexões entre eles (CORMEN et al., 2022), (AHUJA; MAGNANTI; ORLIN, 1994).

No contexto da otimização em grafos, diversos problemas clássicos servem como blocos de construção para formulações mais complexas, como o *VRP*. Dentre eles, destacam-se:

Problema do Caminho Mais Curto (*Shortest Path Problem - SPP*): Visa encontrar o caminho entre dois vértices em um grafo com o menor custo ou distância acumulada. Algoritmos como *Dijkstra* e *Bellman-Ford* são soluções eficientes para este problema fundamental (CORMEN et al., 2022). Ele é subjacente a muitos problemas de roteamento, pois o custo de mover-se entre dois pontos é frequentemente uma distância ou tempo mínimo.

Problema do Caixeiro Viajante (*(TSP)*: Um dos problemas mais estudados em otimização combinatória. O *TSP* busca a rota mais curta que visita um conjunto de cidades (vértices) exatamente uma vez e retorna à cidade de origem. A complexidade NP-difícil do *TSP* o torna um desafio computacional significativo para um grande número de cidades, e ele é um precursor direto do *VRP*, sendo, em essência, um caso especial do *VRP* com um único veículo e uma única rota cobrindo todos os clientes (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998).

A compreensão desses conceitos e problemas clássicos é crucial para o desenvolvimento e a análise de algoritmos mais sofisticados, como aqueles aplicados ao VRPTW, que expande as restrições e objetivos do *TSP* para cenários mais realistas de logística com

múltiplos veículos e outras particularidades operacionais como janelas de tempo para recebimento e tempo de entrega.

2.4 Problemas de Roteamento de Veículos -*VRP*

O *Problema de Roteamento de Veículos (VRP)* constitui uma das áreas mais estudadas e de maior relevância prática na otimização combinatória e logística ((TASAN; GEN, 2012); (O; Z; E, 2016)). Sua formulação original, apresentada por Dantzig e Ramser (DANTZIG; RAMSER, 1959), visava otimizar as rotas de uma frota de caminhões para atender a um conjunto de pontos de demanda a partir de um depósito central, minimizando a distância total percorrida. Desde então, o *VRP* evoluiu significativamente, tornando-se um arcabouço para modelar uma vasta gama de desafios logísticos reais enfrentados por empresas de transporte e distribuição.

Em sua essência, o *VRP* busca determinar um conjunto de rotas de custo mínimo para uma frota de m veículos homogêneos ou heterogêneos, que partem de um ou mais depósitos para visitar um conjunto de n clientes geograficamente dispersos. Cada cliente deve ser visitado exatamente uma vez por um único veículo, e cada veículo deve iniciar e terminar sua rota no depósito. Os objetivos típicos incluem a minimização do custo total (distância, tempo, combustível), do número de veículos utilizados, ou do tempo máximo de rota.

Formalmente, o *VRP* pode ser visto como uma extensão do *Problema do Caixeiro Viajante (TSP)* para múltiplos veículos e com restrições adicionais ((PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998)). A complexidade do *VRP* e de suas variantes é notória; o problema é NP-difícil, o que significa que, para instâncias de tamanho real, encontrar a solução ótima exaustivamente é computacionalmente intratável ((PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998)). Isso impulsionou o desenvolvimento de uma vasta gama de métodos de solução, incluindo algoritmos exatos para instâncias menores e, predominantemente, heurísticas e meta-heurísticas para instâncias de grande porte ((BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016)).

2.4.1 Variantes do VRP

Ao longo das décadas, o *VRP* deu origem a inúmeras variantes que incorporam características do mundo real e complexidades operacionais, buscando refletir cenários logísticos mais precisos. As variantes mais conhecidas incluem:

- **Problema de Roteamento de Veículos Capacitados (*CVRP - Capacitated VRP*):** Nesta variante, os veículos possuem uma capacidade máxima de carga, e a soma das demandas dos clientes atendidos por um veículo não pode exceder essa capacidade ((BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016)).

- **Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (*VRPTW - Vehicle Routing Problem with Time Windows*):** Uma extensão crucial onde o serviço a cada cliente deve começar dentro de um intervalo de tempo predefinido (janela de tempo). Esta variante é particularmente relevante para logística de entrega urbana, onde os clientes exigem atendimento em horários específicos (SOLOMON, 1987) (EKSIOGLU; VURAL; REISMAN, 2009).

- ***VRP* com *Pickup* e *Delivery* (*VRPPD*):** Envolve tanto a coleta quanto a entrega de mercadorias.

- ***VRP* com Frota Heterogênea (*HFVRP*):** Considera veículos com diferentes capacidades e custos operacionais.

- ***VRP* Dinâmico e Estocástico:** Aborda situações onde as informações (demandas de clientes, tráfego) mudam em tempo real ou são incertas.

2.4.2 Categorias do *VRP*

A categorização de *VRPs* introduzida por (SCHORPP, 2012) e referenciada por (PILLAC et al., 2013) é feita com base nas informações, disponibilidade e a incerteza dos dados. Essas categorias são resumidas da seguinte forma conforme o quadro 2.1:

1. *VRP* Estático e Determinístico: Todas as informações sobre o problema com componentes (entrada) são conhecidos com antecedência e não mudam durante execução de rota.

Categoria \ Informação	Determinística	Estocástica
Estático	(1)	(2)
Dinâmico	(3)	(4)

Figura 2.1: A categorização de VRPs. Fonte:(SCHORPP, 2012).

2. *VRP* Estático e Estocástico: Os componentes do problema (entrada) são parcialmente conhecidos, e eles são representados com parâmetros aleatórios, onde os valores reais são conhecidos durante a execução da rota. Além disso, as rotas são projetadas antes de sua execução e, em seguida, pequenas alterações são aceitas.

3. *VRP* Dinâmico e Determinista: As informações sobre o componentes do problema (entrada) são desconhecidas parcial ou total e são apenas divulgados durante a execução ou concepção das rotas. Nenhum componente do problema é representado com variáveis aleatórias.

4. *VRP* Dinâmico e Estocástico: As informações sobre os componentes do problema (entrada) são desconhecidos parcial ou total e são apenas divulgados durante a execução das rotas. Tem pelo menos um componente que é representado com uma variável aleatória. O *VRP* Dinâmico e Estocásticos entraremos em mais detalhes na subseção 2.4.5.

2.4.3 Problemas de Roteamento de Veículos dinâmicos

Em muitas aplicações reais de entrega nem todas as informações sobre a instância do problema são conhecidas com antecedência. No *VRP* dinâmico (*DVRP*), também conhecido como *VRP* em tempo real ou online, alguns dados de entrada são revelados durante a execução do dia ou durante a execução do plano de entregas. O mais comum em *VRPs* dinâmicos são a chegada de novas solicitações de clientes, mas as demandas, tempos de serviço e tempos de viagem também são possíveis componentes dinâmicos. O *DVRP* é amplamente estudado na literatura, começando com o trabalho de (PSARAFTIS, 1988) que demonstra as diferenças entre *VRP* estático e dinâmico. (LARSEN; MADSEN, 2000) apresentam uma classificação de *DVRP* de acordo com o dinamismo do sistema, enquanto (PILLAC et al., 2013) classifica-o em relação ao tipo de dinâmica dos eventos. Vários algoritmos de manipulação de *DVRP* são propostos na literatura e excelentes revisões sobre

ele são fornecidas por (PSARAFTIS, 1995), (PILLAC et al., 2013).

Envolver informações dinâmicas aumenta a complexidade do problema e novos desafios surgem. Quando uma nova solicitação é aceita ou retirada no plano de entregas a complexidade pode aumentar (LAPORTE et al., 2000). Uma vez que os *DVRPs* exigem decisões em tempo real, um meio-termo entre reatividade e qualidade de decisão deve ser encontrado.

2.4.4 Problemas de Roteamento de Veículos Estocástico

O VRP estocástico *(SVRP)* é basicamente qualquer *VRP* onde um ou mais parâmetros são estocásticos, o que significa que alguns eventos futuros são variáveis aleatórias com uma distribuição de probabilidade conhecida (GENDREAU; LAPORTE; SÉGUIN, 1996). Existem vários problemas de otimização com incerteza, resumido em (SAHINIDIS, 2004). Geralmente, os *SVRP* puros têm uma distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias disponíveis e o processo de otimização é executado antes de serem realizados. As rotas planejadas não são alteradas ou atualizadas após sua realização, portanto, é muitas vezes referida como otimização a priori .

2.4.5 Problemas de Roteamento de Veículos Dinâmico e Estocástico

A categoria de *VRP* dinâmico e estocástico *(DSVRP*) tem tido crescente interesse em pesquisas nos últimos anos. Devido aos avanços recentes nas tecnologias de informação e comunicação, esta nova classe de problema permite lidar com aplicações de uma maneira mais precisa do mundo real. Considerado (GENDREAU; LAPORTE; SÉGUIN, 1996) classificam o *DSVRP* baseada na natureza da informação e sua incerteza. No entanto, o foco da classificação está em uma caracterização adicional com base no momento em que o esforço computacional para tomar decisões ocorre. Isso resulta em dois grupos:

- O primeiro grupo, decisões pré-processadas, consiste em abordagens onde as soluções são calculadas antes da execução do plano.
- O segundo grupo, decisões online, consiste em abordagens onde as soluções são computadas assim que um evento dinâmico ocorre.

Ambos os grupos consideram sistemas dinâmicos e são baseados em informações estocásticas. Para lidar com esses sistemas apropriadamente, decisões dependentes do

estado devem ser tomadas. As abordagens de solução que pertencem ao primeiro grupo (decisões pré-processadas) determinam os valores para a tomada de decisão, respectivamente antes da execução do plano de solução. Portanto, os possíveis estados precisam ser construídos com antecedência e avaliados com base em possíveis eventos dinâmicos e informações estocásticas ao longo de um tempo considerado Figura 2.2.

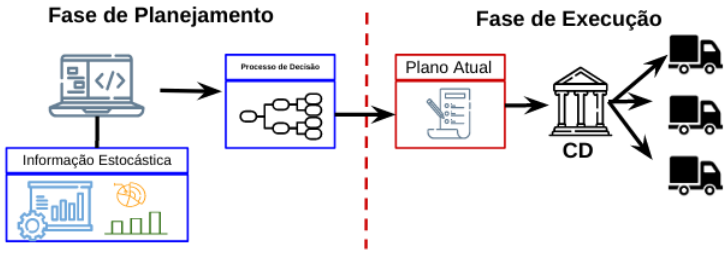


Figura 2.2: Sistema Dinâmico Baseado em Informações Estocástica Pré-Processada. Fonte: Próprio autor (2024).

O segundo grupo (decisões *online*) difere na medida em que o cálculo é feito. A maior parte do tempo computacional é para processar informações estocásticas na fase de planejamento, antes da execução real do plano. No decorrer a execução do plano, o plano atual é atualizado com base nas informações pré-processadas que são inseridas no calculo. Durante as abordagens de decisão online os resultados são atualizados e o sistema recebe um plano atualizado capaz de atribuir aos veículos despachos apropriados Figura 2.3.

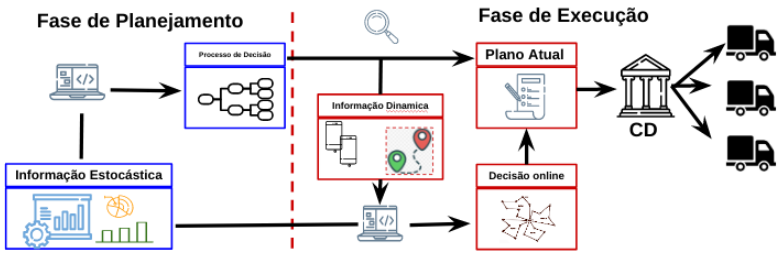


Figura 2.3: Sistema Dinâmico Baseado em Informações Estocástica com tomada de decisão on-line. Fonte: Próprio autor (2024).

A capacidade de modelar e resolver o *VRP* e suas variantes é forma um grande potencial a ser explorado sendo o problema fundamental para otimizar as operações de transporte, reduzir custos logísticos, melhorar o nível de serviço ao cliente e até minimizar impactos ambientais.

Um problema de escalonamento é definido por três componentes principais

2.5 Modelos de Otimização e Programação Linear Inteira

A modelagem matemática é a arte de traduzir um problema do mundo real em uma estrutura matemática, permitindo que ferramentas analíticas e computacionais sejam utilizadas para encontrar uma solução ótima. No contexto da otimização, isso envolve a identificação de variáveis de decisão, a formulação de uma função objetivo a ser otimizada (maximizada ou minimizada) e a definição de um conjunto de restrições que as variáveis devem satisfazer.

2.5.1 Programação Linear (PL)

A Programação Linear (PL) é uma das classes mais fundamentais e amplamente utilizadas de problemas de otimização. Um problema é classificado como de Programação Linear se tanto a função objetivo quanto todas as suas restrições forem funções lineares das variáveis de decisão. Além disso, as variáveis de decisão na PL são contínuas, ou seja, podem assumir qualquer valor real dentro de um determinado intervalo.

A forma geral de um problema de Programação Linear pode ser expressa como(MACAMBIRA et al., 2022):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar/Maximizar} && c^T x \\ &\text{Sujeito a} && Ax \leq b \\ & && A_{eq}x = b_{eq} \\ & && lb \leq x \leq ub \end{aligned}$$

Onde:

- x é o vetor de variáveis de decisão.
- $c^T x$ é a função objetivo linear.
- $Ax \leq b$ e $A_{eq}x = b_{eq}$ são as restrições lineares de desigualdade e igualdade, respectivamente.
- lb e ub são os limites inferiores e superiores para as variáveis de decisão.

Os problemas de PL são amplamente aplicáveis em áreas como alocação de recursos, planejamento de produção e otimização de transporte, e podem ser resolvidos de forma eficiente por algoritmos como o Método Simplex ou Dual Simplex sendo estes os mais utilizados (MACAMBIRA et al., 2022) . No entanto, a exigência de que as variáveis sejam contínuas limita sua aplicação direta em cenários onde as decisões são inerentemente discretas, como a atribuição de tarefas ou a escolha binária (sim/não).

2.5.2 Programação Linear Inteira (PLI) e Mista (PLIM)

Para lidar com a natureza discreta de muitas decisões em problemas de otimização combinatória, a Programação Linear é estendida para a Programação Linear Inteira (PLI) e a Programação Linear Inteira Mista (PLIM).

Em um problema de PLI, todas as variáveis de decisão são restritas a assumir apenas valores inteiros. Quando todas as variáveis são binárias (0 ou 1), a variante é conhecida como Programação Linear Binária ou 0-1 PLI, que é particularmente útil para modelar decisões de "sim ou não".

Programação Linear Inteira Mista (PLIM): Esta é uma classe intermediária e muito comum, onde algumas variáveis de decisão são contínuas e outras são restritas a valores inteiros. Isso permite a modelagem de sistemas onde algumas quantidades podem ser fracionárias (volume de combustível) enquanto outras são discretas (número de veículos a serem utilizados ou se uma rota é selecionada ou não)

A formulação geral para PLI é a mesma da PL, mas com a adição da restrição que algumas ou todas as variáveis x devem pertencer ao conjunto dos números inteiros ($x \in \mathbb{Z}^n$) ou binários ($x \in \{0,1\}^n$).

Um fragmento de formulação comum em problemas de roteamento usando variáveis inteiras é a decisão de usar uma rota específica ou visitar um cliente (KOHL et al., 1999):

- *Variáveis Binárias*:
  - $x_{ijk} \in \{0,1\}$: igual a 1 se o veículo k viajar do nó i para o nó j, e 0 caso contrário.
  - $y_{ik} \in \{0,1\}$: igual a 1 se o veículo k visitar o cliente i, e 0 caso contrário.

- *Restrição de Demanda de Cliente* (exemplo simples em VRP):

$$\sum_{k \in K} y_{ik} = 1, \quad \forall i \in N \quad \text{(Cada cliente } i \text{ deve ser visitado por exatamente um veículo } k\text{)}.$$

2.5.3 Formulação de PLIM para Problemas de Roteamento

A Programação Linear Inteira Mista (PLIM) desempenha um papel fundamental na formulação de problemas de otimização complexos, especialmente quando integrados a algoritmos de *BCP*. Em um contexto genérico de problemas de roteamento com múltiplas restrições e objetivos, a PLIM permite a representação matemática precisa dos elementos do problema, facilitando sua resolução.

A formulação baseia-se na definição de um conjunto $\mathcal{P}^k$ de caminhos viáveis, cada um com restrições de recursos específicas sobre um grafo G^k. O conjunto total de caminhos considerados é $\mathcal{P} = \cup \mathcal{P}^k$. Para modelar a solução, são empregadas variáveis inteiras x_j e y_s, que representam decisões do problema, e variáveis inteiras não negativas λ_p, onde cada λ_p indica a multiplicidade com que o caminho p específico é incluído na solução ótima(PESSOA et al., 2020).

Adicionalmente, constantes L^k e U^k definem os limites mínimo e máximo, respectivamente, para o número de caminhos em $\mathcal{P}^k$ que podem aparecer na solução. A relação entre os arcos e os caminhos é capturada pela constante h_a^p, que quantifica o número de vezes que o arco a é percorrido no caminho p.

A formulação genérica pode ser formalmente expressa (ROBOREDO VINíCIUS CARVALHO SOARES, 2022) como :

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n_1} c_j x_j + \sum_{s=1}^{n_2} f_s y_s \tag{2.1a}$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^{\overline{n}_1} \alpha_{ij} x_j + \sum_{s=1}^{\overline{n}_2} \beta_{is} y_s \geq d_i \qquad \forall i = 1, \ldots, m \tag{2.1b}$$

$$x_j = \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{a \in M(x_j)} h_a^p \right) \lambda_p \qquad \forall j = 1, \ldots, \overline{n}_1 \tag{2.1c}$$

$$L^k \leq \sum_{p \in \mathcal{P}^k} \lambda_p \leq U^k \qquad \forall G^k \in K \tag{2.1d}$$

$$\lambda_p \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall p \in \mathcal{P} \tag{2.1e}$$

$$x_j \in \mathbb{Z},\ y_s \in \mathbb{Z} \qquad \forall j = 1, \ldots, \overline{n}_1,\ s = 1, \ldots, \overline{n}_2 \tag{2.1f}$$

A função objetivo 2.1a é genérica e representa o critério de otimização. As restrições 2.1b são restrições lineares que modelam as condições gerais do problema. As restrições 2.1c estabelecem uma ponte entre as variáveis de decisão primárias (x_j) e as variáveis de caminhos (λ_p) através de uma função de mapeamento M. Esta função associa cada variável x_j a um subconjunto de arcos ($M(x_j) \subseteq \cup_{G^k \in K} A^k$), garantindo que o valor de x_j seja consistente com o fluxo total de arcos em $M(x_j)$ conforme definido pelos caminhos selecionados. As restrições 2.1d impõem limites superior e inferior ao número de caminhos restritos em recursos para cada grafo G^k, enquanto 2.1e e 2.1fdefinem a natureza inteira e não negativa das variáveis.

A formulação PLIM descrita acima 2.1 serve como o modelo mestre para ambos os algoritmos, *Branch-and-Cut - BC* e *Branch-and-Cut-and-Price - BCP* , embora a forma como cada um lida com a geração de variáveis e restrições seja distinta.

Em um algoritmo *BC*, a formulação é tratada de forma que todas as variáveis e restrições consideradas relevantes já estão explicitamente presentes no modelo inicial (ou na sua relaxação linear). O processo de otimização se dá pela resolução iterativa da relaxação linear do modelo. Se a solução ótima obtida for fracionária ou violar alguma propriedade do poliedro convexo das soluções inteiras, cortes (*cutting planes*) são gerados e adicionados ao modelo. Esses cortes são novas desigualdades que "apertam"a região de soluções, eliminando a solução fracionária atual sem excluir nenhuma solução inteira viável. O algoritmo então continua a resolver a relaxação linear enriquecida pelos cortes. Se a solução

ainda for fracionária e não for possível adicionar mais cortes que a eliminem, o algoritmo realiza a ramificação (*branching*), dividindo o problema em subproblemas menores ao adicionar restrições que forçam variáveis fracionárias a assumir valores inteiros.

Já o algoritmo *BCP*, como o nome sugere, estende o *BC* com a funcionalidade de "*pricing*"(geração de colunas). Este é um mecanismo crucial quando o número de variáveis (especialmente as variáveis λ_p associadas aos caminhos) é excessivamente grande ou combinatorialmente explosivo, tornando inviável enumerá-las todas de antemão. Nesse cenário, o *BCP* opera com uma formulação mestre restrita, que inclui apenas um subconjunto das variáveis λ_p. A resolução da relaxação linear desta formulação mestre restrita gera valores duais. Esses valores duais são então usados em um subproblema ("gerador de colunas") para identificar e gerar "novas"variáveis λ_p (colunas) que, se adicionadas ao modelo mestre, poderiam melhorar o valor da função objetivo.

As restrições 2.1c, que conectam as variáveis x_j às variáveis λ_p, são fundamentais para este processo, pois definem a estrutura da coluna a ser gerada. Assim como no BC, o BCP também integra a geração de cortes para fortalecer a relaxação linear e o *branching* para garantir a integralidade da solução final. A capacidade de incorporar estruturas de "*packing sets*", por exemplo, pode ser utilizada para auxiliar na geração de cortes e de ccolunas eficientes dentro da estrutura do *BCP*.

2.5.4 Desafios na Resolução

Embora a PLI e a PLIM sejam extremamente poderosas para modelar uma vasta gama de problemas combinatórios, elas introduzem uma complexidade computacional significativamente maior em comparação com a PL. Problemas de PLI são, em geral, NP-Difícil, o que significa que o tempo de resolução cresce exponencialmente com o tamanho da instância, tornando-se intratável para grandes problemas.

2.6 Logística de Última Milha e Entregas Urbanas Expressas

A Logística de Última Milha e as Entregas Urbanas Expressas, estabelecendo uma conexão direta entre a gestão estratégica da *supply chain* e a eficiência operacional viabilizada

pelo *VRP*. Em um cenário de urbanização densa e janelas de entrega reduzidas, o *VRP* transcende sua natureza matemática para consolidar-se como o motor de responsividade das cadeias de suprimentos modernas. Fundamenta-se aqui os gargalos da perna final da distribuição e as soluções de otimização que permitem conciliar a agilidade exigida pelo mercado com a sustentabilidade da cadeia logística final.

2.6.1 Definição e Importância

A cadeia de suprimentos (ou *supply chain*) pode ser definida como a rede complexa de organizações, pessoas, atividades, informações e recursos envolvidos no processo de movimentação de um produto ou serviço, desde o fornecedor de matérias-primas até o consumidor final, englobando todas as etapas de planejamento, execução e controle do fluxo de mercadorias e informações(BALLOU, 2009) como mostra o diagrama 2.4. Dentro desta rede abrangente, a logística de última milha refere-se à fase final e mais crucial da cadeia de suprimentos, abrangendo o transporte de um produto desde um centro de distribuição ou armazém até o destino final do cliente, geralmente sua residência(SOLOMON, 1987) (ALTENRIED, 2019).

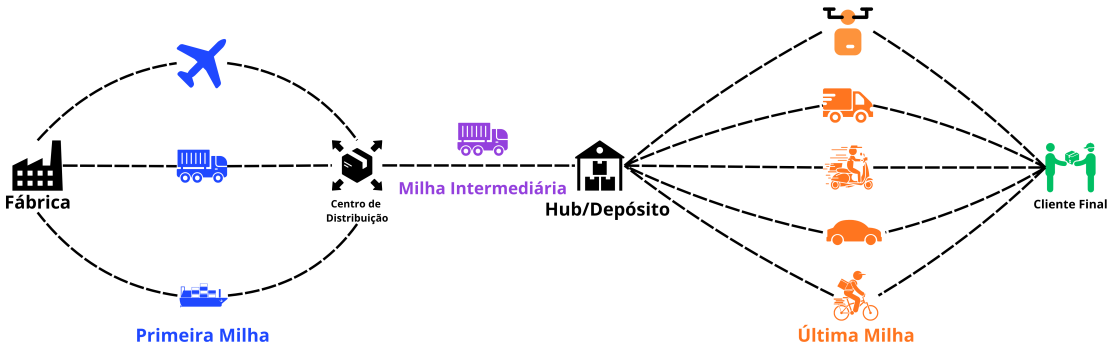


Figura 2.4: Representação da Cadeia de Suprimentos (*supply chain*). Fonte: Próprio autor (2025)

Considerada a etapa mais desafiadora e dispendiosa da logística(LIU et al., 2023), a última milha é vital para a satisfação do cliente e a reputação da marca/empresa (REIS;

CHAGAS; CARVALHO, 2023). O sucesso nesta fase impacta diretamente a lealdade do consumidor, sendo que entregas falhas podem gerar atrasos, custos adicionais, a necessidade de reentregas e a insatisfação do cliente. Sua importância cresceu exponencialmente com o aumento do comércio eletrônico e a demanda por entregas rápidas e convenientes(LOGGI, 2021b).

2.6.2 Desafios Urbanos

A complexidade da última milha é amplificada em ambientes urbanos densos, onde múltiplos desafios precisam ser superados(ZHANG et al., 2023):

- *Congestionamento de Tráfego*: O grande volume de veículos em áreas urbanas leva a atrasos e ineficiências operacionais.
- *Restrições de Acesso*: Ruas estreitas, estacionamento limitado e restrições de horários de entrega dificultam as operações de forma significativa.
- *Expectativas do Cliente*: A demanda por rapidez, janelas de tempo curtas e rastreamento em tempo real exige alta precisão e flexibilidade das operações de entrega.
- *Impactos Ambientais*: A necessidade de entregas eficientes esbarra na preocupação crescente com a sustentabilidade e a redução de emissões em áreas urbanas, impulsionando a busca por rotas mais ecológicas.
- *Escassez de Pessoal*: A falta de motoristas e entregadores qualificados pode ser um obstáculo significativo para a escalabilidade das operações.

2.6.3 Entregas Expressas

O segmento de entregas expressas é caracterizado pela demanda por rapidez e cumprimento de janelas de tempo rigorosas. Empresas neste setor oferecem prazos de entrega garantidos, diferenciando-se dos serviços de entrega de encomendas padrão(REIS; CHAGAS; CARVALHO, 2023). A agilidade é fundamental, e o processo é otimizado para reduzir o tempo da operação, desde a coleta até a entrega, muitas vezes com informações de rastreamento em tempo real para o cliente(ERNST et al., 2009).

2.6.4 Contexto Brasileiro

No Brasil, a logística de última milha enfrenta particularidades desafiadoras(REIS; CHAGAS; CARVALHO, 2023):

- *Infraestrutura Deficiente*: Rodovias mal conservadas e uma rede de transporte muitas vezes inadequada impactam diretamente a eficiência das entregas, especialmente em áreas rurais.
- *Dimensão Geográfica e Diversidade*: O vasto território do país e suas diversas paisagens, como a Região Amazônica, apresentam complexidades únicas no transporte de mercadorias, aumentando os tempos de trânsito e custos.
- *Altos Custos Logísticos*: A ineficiência de entregas, os custos com combustível e a burocracia contribuem para que os custos logísticos no Brasil estejam entre os mais altos do mundo.
- *Crescimento do E-commerce*: Apesar dos desafios, o crescimento significativo do comércio eletrônico impulsiona a demanda por soluções inovadoras na última milha, incluindo a busca por entregas no mesmo dia e programadas. Em regiões com restrições de entrega, taxas adicionais podem ser aplicadas ao frete.

2.6.5 Métodos de Hubs na Logística Urbana e o Benchmark Loggi-BUD

2.6.5.1 Conceito de Hubs

Em redes logísticas, *hubs* (ou centros de conexão/distribuição) são instalações centrais estrategicamente localizadas na cadeia de suprimentos(HEKMATFAR; PISHVAEE, 2009) (WANG et al., 2024). Eles funcionam como pontos de consolidação e desconsolidação de mercadorias, onde os produtos são recebidos, organizados e redistribuídos para seus destinos finais. O objetivo principal dos *hubs* é otimizar os fluxos de transporte, permitindo que cargas de múltiplas origens sejam agrupadas para um roteamento mais eficiente para múltiplos destinos, resultando em redução de custos e complexidade operacional(HEKMATFAR; PISHVAEE, 2009). Ao contrário de um centro de distribuição focado em armazenagem de longo prazo, um *hub* é projetado para o movimento e a transferência eficientes de mercadorias.

2.6.5.2 Problema de Localização de P-Hub (P-Hub Location Problem)

O *Problema de Localização de P-Hub* (PHLP) é um problema clássico de otimização no campo da pesquisa operacional (WANG et al., 2024). Ele visa determinar a localização ideal de um número fixo de P *hubs* em uma rede e, subsequentemente, alocar todos os nós não-*hub* a esses *hubs*, de forma a minimizar os custos totais de transporte ou outras métricas de desempenho. Este problema é fundamental para o design eficiente de redes de transporte em larga escala, como em sistemas de companhias aéreas, telecomunicações e serviços postais, onde o fluxo de mercadorias é consolidado em poucos nós (*hubs*) em vez de ser enviado diretamente entre todos os pares de origem-destino(ERNST et al., 2009). O PHLP permite a exploração de economias de escala no transporte entre *hubs*(CAMPBELL, 1996).

2.6.5.3 Aplicação no Benchmark LoggiBUD

O *Benchmark LoggiBUD* utiliza o conceito de *hubs* para estruturar suas instâncias, simulando a realidade de grandes operações de entrega urbana(LOGGI, 2021b). Ao empregar princípios semelhantes ao problema de P-*hub* na metodologia de geração de algumas de suas instâncias, o *LoggiBUD* define a distribuição geográfica dos clientes e sua alocação a pontos de consolidação (que podem ser *hubs* virtuais ou reais)(LOGGI, 2021a). Essa abordagem influencia diretamente o roteamento e a complexidade das entregas, permitindo a simulação de cenários mais realistas de distribuição em larga escala em áreas urbanas.

Capítulo 3

Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo - VRPTW

Este capítulo aborda os pilares teóricos e práticos do *VRPTW*. Iniciamos com a Formulação Matemática do *VRPTW*, Subseção 3.1, detalhando os elementos que compõem o modelo, como variáveis de decisão, função objetivo e restrições. Em seguida na Subseção 3.2, discutimos a Complexidade Computacional do *VRPTW*, explicando por que esse problema é considerado NP-difícil e as implicações dessa característica para a busca por soluções ótimas. Por fim, a Subseção 3.3 de Trabalhos Relacionados apresenta uma revisão da literatura, destacando as principais abordagens e algoritmos exatos já propostos para a resolução do *VRPTW*.

3.1 Formulação Matemática do VRPTW

O Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (VRPTW) é classicamente formalizado como um Problema de Programação Linear Inteira (PLI) (SOLOMON, 1987).O que o diferencia de outros problemas de roteamento é a inclusão de janelas de tempo, que são intervalos de tempo específicos nos quais cada cliente deve ser atendido.

Suponha que uma empresa de entregas que precise levar encomendas a 50 endereços diferentes. O VRPTW ajuda a planejar as rotas de seus motoristas para que cada encomenda seja entregue dentro do horário de serviço e com o combinado com o cliente (por exemplo, "entre 14h e 16h", horário de serviço de 8h a 17h). Além disso, o problema

considera outras restrições importantes:

- **Capacidade dos veículos:** Um caminhão pequeno não pode levar a carga de um caminhão grande.
- **Tempo de viagem:** Leva tempo para ir de um ponto a outro.
- **Tempo de serviço:** O motorista precisa de tempo para descarregar e entregar a encomenda em cada parada.

O objetivo final é encontrar o conjunto de rotas que minimiza o custo total, que geralmente é a distância ou o tempo total percorrido por todos os veículos, garantindo que todas as restrições sejam respeitadas.

Computacionalmente, existem diversas variantes da formulação do VRPTW, mas uma abordagem comum e intuitiva é o modelo de fluxo de variáveis binárias em grafos, que utiliza variáveis para representar a passagem de um veículo entre dois nós. Essa formulação permite expressar as interdependências entre as decisões de roteamento, capacidade e tempo.

A seguir, apresenta-se uma formulação matemática geral para o VRPTW, onde o objetivo é minimizar o custo total de roteamento enquanto se satisfazem todas as restrições operacionais e temporais (SOLOMON, 1987).

Conjuntos e Parâmetros

- $N = \{0, 1, \ldots, n\}$: Conjunto de nós, onde 0 representa o depósito e $1, \ldots, n$ representam os clientes.
- $K = \{1, \ldots, m\}$: Conjunto de veículos disponíveis.
- $V = \{0, \ldots, n\}$: Conjunto de vértices (nós).
- $E = \{(i, j) \mid i, j \in V, i \neq j\}$: Conjunto de arcos que conectam os nós.
- c_{ij}: Custo de percorrer o arco (i, j), geralmente correspondendo à distância ou tempo de viagem.
- q_i: Demanda do cliente $i \in \{1, \ldots, n\}$. Assume-se $q_0 = 0$.
- Q_k: Capacidade máxima de carga do veículo $k \in K$.

- $[a_i, b_i]$: Janela de tempo do nó $i \in V$, onde a_i é o início mais cedo e b_i é o fim mais tardio do serviço.
- s_i: Tempo de serviço requerido no nó $i \in V$.
- t_{ij}: Tempo de viagem do nó i para o nó j.
- M: Uma constante grande o suficiente (*Big M*), utilizada para linearizar restrições condicionais.

Variáveis de Decisão

- $x_{ijk} \in \{0,1\}$: Variável binária que assume valor 1 se o veículo k viaja do nó i para o nó j; 0 caso contrário.
- $w_{ik} \geq 0$: Tempo de espera do veículo k no nó i, se ele chegar antes do início da janela de tempo (a_i).
- $e_{ik} \geq 0$: Tempo de início do serviço do veículo k no nó i.

Função Objetivo

Função Objetivo: Minimizar a Distância Total Percorrida

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ i \neq j}} c_{ij} x_{ijk} \tag{3.1}$$

Restrições:

1. *Atendimento a Clientes* (uma única visita): Cada cliente deve ser visitado exatamente uma vez por um veículo.

$$\sum_{k \in K} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \tag{3.2}$$

2. *Fluxo de Veículos* (Contiguidade das Rotas): Se um veículo k entra em um nó j, ele

deve sair desse nó j.

$$\sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} x_{ijk} - \sum_{\substack{l \in V \\ l \neq j}} x_{jlk} = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \forall k \in K \tag{3.3}$$

3. *Partida do Depósito*: Cada veículo deve partir do depósito uma única vez.

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq 0}} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \tag{3.4}$$

4. *Retorno ao Depósito*: Cada veículo que parte deve retornar ao depósito.

$$\sum_{\substack{i \in V \\ i \neq 0}} x_{i0k} = 1 \quad \forall k \in K \tag{3.5}$$

5. *Restrição de Capacidade do Veículo*: A demanda total de todos os clientes visitados por um veículo k não pode exceder a capacidade Q_k desse veículo.

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} q_i \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{ijk} \leq Q_k \quad \forall k \in K \tag{3.6}$$

6. *Restrições de Janela de Tempo*: O serviço em cada nó i deve começar dentro de sua janela de tempo $[a_i, b_i]$.

$$a_i \leq e_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in V, \forall k \in K \text{ (se } x_{i \cdot k} \text{ for 1)} \tag{3.7}$$

7. *Continuidade do Tempo* (Sequência de Serviço): Garante que o tempo de início do serviço em um nó subsequente j esteja correto.

$$e_{ik} + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ijk}) \leq e_{jk} \quad \forall i \in V, \forall j \in V, i \neq j, \forall k \in K \tag{3.8}$$

Esta restrição, utilizando o "*Big M*", assegura que a relação temporal só se aplica se o veículo k realmente viajar de i para j. Se $x_{ijk} = 0$, o termo $M(1 - x_{ijk})$ é grande e a desigualdade se torna trivial. Se $x_{ijk} = 1$, a desigualdade força a relação temporal entre e_{ik} e e_{jk}.

Esta formulação de PLI busca encontrar os valores binários para x_{ijk} (definindo as rotas) e os tempos e_{ik} que satisfazem todas as restrições com o custo mínimo. A natureza discreta das variáveis x_{ijk} e a inclusão das janelas de tempo são os fatores que tornam este problema um desafio computacional complexo para instâncias de grande porte.

3.2 Complexidade Computacional do VRPTW

Apesar da simplicidade aparente de sua formulação e da clareza de seu objetivo, o *VRPTW* é classificado como um problema NP-difícil. Esta classificação tem implicações profundas para a sua resolução, especialmente no contexto de instâncias de grande porte, as quais são comuns em cenários logísticos reais.

A designação NP-Difícil implica que, até o momento, não existe um algoritmo conhecido capaz de encontrar a solução ótima para o VRPTW em tempo polinomial, ou seja, em um tempo que cresce de forma "razoável"(não exponencial) com o aumento do número de clientes e veículos. Acredita-se que o tempo computacional necessário para resolver o VRPTW de forma ótima cresça exponencialmente com o tamanho do problema. Isso implica que, para um número grande de clientes, a busca exaustiva por todas as combinações de rotas e agendamentos se torna inviável, mesmo para os computadores mais poderosos.

A complexidade inerente ao VRPTW surge da combinação de múltiplos fatores:

- **Natureza Combinatória**: O problema envolve a escolha de quais clientes visitar em qual ordem, o que por si só já é um problema combinatório complexo (similar ao Problema do Caixeiro Viajante, que é NP-completo (CORMEN et al., 2002)).

- **Restrições de Capacidade**: A necessidade de respeitar a capacidade de carga de cada veículo adiciona uma camada de dificuldade, pois as decisões de roteamento devem considerar constantemente o volume ou peso das demandas (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016).

- **Restrições de Janelas de Tempo**: As janelas de tempo introduzem uma dimensão de agendamento que interage de forma complexa com a decisão de roteamento. A chegada antecipada ou tardia a um cliente pode invalidar uma rota, ou exigir tempo de espera, afetando o tempo total e a viabilidade da rota subsequente. Essas

interdependências tornam o espaço de soluções factíveis altamente instável e difícil de atender.

Dada a natureza NP-Difícil do VRPTW, a pesquisa e o desenvolvimento de algoritmos concentram-se em duas frentes principais (PILLAC et al., 2013):

- **Métodos Exatos**: Para instâncias de pequeno e médio porte, que podem garantir a otimalidade, mas com custos computacionais elevados.
- **Heurísticas e Meta-heurísticas**: Para instâncias de grande porte, que buscam soluções de boa qualidade (próximas do ótimo) em um tempo computacional aceitável.

A compreensão da complexidade computacional do VRPTW é fundamental para a escolha e o desenvolvimento de abordagens de resolução adequadas, bem como para o gerenciamento das expectativas em relação ao tempo necessário para obter soluções ótimas ou aproximadas para problemas de logística do mundo real.

3.3 Trabalhos Relacionados VRPTW

Para a revisão da literatura, adotou-se a base de dados *Scopus* (<https://www.scopus.com>) e *Springer* (<https://link.springer.com>), como fontes primárias de artigos científicos. Após um processo de seleção baseado em critérios de relevância temática, os artigos escolhidos foram submetidos a uma análise, envolvendo leitura integral, extração de dados metodológicos e interpretação crítica dos resultados. Essa abordagem permitiu sistematizar as principais contribuições dos autores, identificar o problema de estudo e como foi o processo de solução.

A seleção bibliográfica apresentada na Tabela 3.1 reflete a análise sistemática da evolução dos métodos de otimização exata para o *VRP*. A base deste estudo é fundamentada em trabalhos que estabeleceram as formulações de Programação Linear Inteira (PLI) e as técnicas de particionamento de conjuntos como pilares para a resolução exata, como demonstrado por (DESROCHERS; DESROSIERS; SOLOMON, 1992) e (BALDACCI; MINGOZZI; ROBERTI, 2011).

A progressão metodológica é evidenciada pela inclusão de métodos avançados de *Branch-and-Cut*, como os desenvolvidos por (KOHL et al., 1999) e (LYSGAARD; LETCH-

FORD; EGLESE, 2004), que permitiram a resolução de instâncias de maior complexidade. A pesquisa avança para abordagens mais recentes, incluindo o *Branch-and-Bound* de (UCHOA et al., 2017), e culmina com o domínio de métodos híbridos e sofisticados como o *Branch-Cut-and-Price* de (PESSOA et al., 2020) e as formulações modernas de Otimização Combinatória (MILP) de (LIU et al., 2023).

Deste modo, o conjunto de referências selecionadas abrange um m amplo espectro de soluções exatas, desde as formulações clássicas até as técnicas contemporâneas, fornecendo a base teórica e metodológica necessária para o desenvolvimento da presente dissertação

Autores	**Ano**	**Tipo de Problema**	**Método de Solução**
Solomon	1987	VRPTW	PLI + Heurísticas de Inserção
Desrochers et al.	1992	VRPTW	PLI + Programação Dinâmica
Kohl et al.	1999	VRPTW	Branch-and-Cut + Geração de Colunas
Lysgaard et al.	2004	CVRP	Branch-and-Cut
Ropke & Pisinger	2006	VRPTW	ALNS + PLI
Baldacci et al.	2012	VRP	Particionamento de Conjuntos
Toth & Vigo	2014	VRP	Formulações PLI
Uchoa et al.	2017	CVRP	Branch-and-Bound
Pessoa et al.	2020	VRPs	Branch-Cut-and-Price
Liu, X. et al.	2023	VRPs	MILP

Tabela 3.1: Resumo dos Artigos sobre VRP/VRPTW

- *Solomon (1987) - "Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints"*

  Este trabalho estabeleceu os fundamentos teóricos e práticos para o VRPTW, introduzindo não apenas as primeiras formulações de programação linear inteira para o problema, mas também desenvolvendo heurísticas baseadas em inserção sequencial que se tornaram referência na área. O autor propôs um framework matemático ri-

goroso para lidar com janelas de tempo rígidas, criando um conjunto de instâncias benchmark (conhecidas como "instâncias de Solomon") que continuam sendo o padrão para avaliação de algoritmos até hoje. O estudo comparou sistematicamente diferentes abordagens, demonstrando a eficácia de métodos que combinam técnicas exatas com heurísticas, especialmente para problemas de média escala (50-100 clientes) (SOLOMON, 1987).

- *Desrochers et al. (1992) - "A New Optimization Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows"*

  Pioneiro no uso combinado de programação dinâmica e PLI para VRPTW, este trabalho introduziu um algoritmo exato que estabeleceu novos patamares de desempenho. A abordagem baseia-se em uma relaxação Lagrangeana inteligente que explora a estrutura especial das restrições de janela de tempo, acoplada a um esquema de Branch-and-Bound eficiente. Os autores demonstraram a viabilidade de resolver problemas reais de dimensionamento moderado (até 100 clientes) com garantia de otimalidade, superando em velocidade os métodos existentes na época (DESROCHERS; DESROSIERS; SOLOMON, 1992).

- *Kohl et al. (1999) - "Exact Methods for the Vehicle Routing Problem with Time Windows"*

  Este artigo marcante avançou significativamente os métodos exatos para VRPTW ao propor uma abordagem inovadora que combina Branch-and-Cut com geração de colunas. Os autores desenvolveram uma série de cortes válidos especialmente projetados para fortalecer a formulação matemática, incluindo desigualdades do tipo "capacity-indexed"e "subset-row". O método demonstrou capacidade de resolver de forma ótima instâncias com até 75 clientes, um marco para a época. Uma contribuição particularmente importante foi a introdução de técnicas de pré-processamento agressivo que reduziram drasticamente o espaço de busca sem comprometer a otimalidade (KOHL et al., 1999).

- *Lysgaard et al. (2004) - "A New Branch-and-Cut Algorithm for the Capacitated Vehicle Routing Problem"*

  Focado no CVRP clássico, este artigo introduz um framework avançado de Branch-and-Cut que incorpora várias inovações importantes. Os autores desenvolveram no-

vas classes de desigualdades válidas, que provaram ser extremamente eficazes para apertar a relaxação linear. O algoritmo implementa ainda uma estratégia sofisticada de gerenciamento de nós na árvore de busca que prioriza ramos promissores baseado em critérios múltiplos. Os resultados experimentais mostraram desempenho excepcional, resolvendo várias instâncias de Solomon (1987) de forma ótima pela primeira vez (LYSGAARD; LETCHFORD; EGLESE, 2004).

- *Ropke & Pisinger (2006) - "An Adaptive Large Neighborhood Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem with Time Windows"*

  Este trabalho introduziu uma abordagem híbrida que combina técnicas meta-heurísticas com componentes exatos de PLI. O algoritmo ALNS (Adaptive Large Neighborhood Search) proposto emprega um conjunto dinâmico de operadores de destruição e reconstrução, cuja seleção é guiada por aprendizado automático durante a execução. A inovação principal reside na integração de um módulo exato de resolução de subproblemas (via PLI) para recompor soluções parciais, resultando em um método que superou significativamente as abordagens puramente heurísticas da época, especialmente em instâncias com restrições complexas de janelas de tempo (ROPKE; PISINGER, 2006).

- *Baldacci et al. (2012) - "An Exact Algorithm for the Vehicle Routing Problem Based on the Set Partitioning Formulation"*

  Este trabalho representa um marco no desenvolvimento de algoritmos exatos para VRP, apresentando um método baseado em formulação por particionamento de conjuntos que integra três componentes principais: um procedimento de redução de estado, um esquema de bounding combinatório e um mecanismo de memorização de rotas. A abordagem conseguiu resolver de forma ótima várias instâncias com até 200 clientes, estabelecendo novos recordes na época. Uma inovação particularmente impactante foi o uso de "ng-rota"(rotas sem ciclos elementares) para acelerar a convergência sem perder garantias de otimalidade (BALDACCI; MINGOZZI; ROBERTI, 2012).

- *Toth & Vigo (2014) - "Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications"*

  Este livro-capítulo abrangente sintetiza décadas de pesquisa em VRP, dedicando atenção especial às formulações PLI e métodos exatos. Os autores apresentam uma

taxonomia detalhada das diferentes formulações matemáticas para VRP/VRPTW, comparando sistematicamente suas forças e limitações. Uma contribuição notável é a análise aprofundada de técnicas de pré-processamento e reformulação que podem fortalecer significativamente as relaxações lineares, tornando os métodos de Branch-and-Bound mais eficientes. O trabalho também discute extensivamente a aplicação desses métodos em cenários reais de logística urbana (TOTH; VIGO, 2014).

- *Uchoa et al. (2017) - "New Benchmark Instances for the Capacitated Vehicle Routing Problem"*

  Além de introduzir um novo conjunto de instâncias benchmark mais desafiadoras, este artigo apresenta avanços significativos em técnicas exatas para CVRP. Os autores desenvolveram um solver baseado em Branch-and-Bound que emprega uma estratégia inovadora de decomposição por recursos, combinada com um esquema de geração de colunas acelerado por aprendizado de máquina. O método demonstrou capacidade de resolver instâncias com geometrias complexas e distribuições de demanda assimétricas que eram consideradas intratáveis por abordagens anteriores. O trabalho também inclui uma análise estatística detalhada das características que tornam instâncias de VRP particularmente difíceis (UCHOA et al., 2017).

- *Pessoa et al. (2020) - "A generic exact solver for vehicle routing and related problems"*

  Este trabalho propõe um solucionador (Solver) genérico para Problemas de Roteamento de Veículos (VRPs), utilizando *branch-cut-and-price* (BCP). Ele incorpora e generaliza os melhores elementos de algoritmos existentes, usando os novos conceitos de "conjunto de empacotamento"e "conjunto de elementaridade". Testes abrangentes mostram que este Solver genérico oferece excelente desempenho, muitas vezes superior a algoritmos especializados, e é capaz de resolver eficazmente outros problemas de otimização combinatória (PESSOA et al., 2020).

- *Liu, X. et al. (2023) - "A systematic literature review of vehicle routing problems with time windows"*

  O artigo oferece uma revisão abrangente da literatura sobre Problemas de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (VRPTW), destacando sua importância

na logística e a complexidade de sua resolução devido às múltiplas restrições e objetivos. A pesquisa, baseada em literatura dos últimos cinco anos (2018-2022), revela que a maioria dos algoritmos são aproximados, com predominância de metaheurísticas e métodos híbridos onde 10% dos tipos de resoluções são de métodos MILP. O estudo analisa os desafios, métodos de solução existentes, métricas de avaliação e deficiências dos algoritmos atuais, além de apontar direções futuras para a pesquisa em VRPTW, visando o desenvolvimento de soluções mais eficazes e eficientes (LIU et al., 2023).

Capítulo 4

Modelos e Métodos

Este capítulo aprofunda a compreensão técnica dos modelos matemáticos utilizados para resolver o *VRPTW*, será apresentada a formulação específica do *VRPTW* implementada no VRPSolver (Seção 4.1) e a Formulação *VRPTW* Clássica de Kohl (Seção 4.2), um modelo de referência na literatura acadêmica.

4.1 Modelo Matemático do VRPTW para o VRPSolver

O VRPSolver foi proposto inicialmente para problemas de roteamento (PESSOA et al., 2020), nesse trabalho o VRPSolver é submetido a vários problemas de roteamento, dentre eles CVRP, PDPTW, VRPTW, MDVRP, BWTSP, e CARP. O trabalho ainda aplica o VRPSolver em problemas que não são de roteamento como *Bin Packing Problem* e *Generalized Assigment Problem*.

Na maior parte dos problemas o VRPSolver alcança soluções tão boas ou melhores do que o estado da arte até então. Em outro trabalho são abordados problemas de *Bin Packing* geral utilizando o VRPSolver (PESSOA; SADYKOV; UCHOA, 2021). Damião et al. aplicaram solver ao CCVRP resolvendo instancias em aberto na literatura (DAMIÃO; SILVA; UCHOA, 2021).

A ideia do solver (VRPSolver) é definir um modelo genérico tal que, nas ocasiões em que se consegue encaixar um problema de otimização nesse modelo genérico ele pode ser resolvido por um algoritmo Branch-Cut-and-Price. No modelo, todos os subproblemas são modelados como um problema de caminho mínimo com restrição de recurso (do inglês *Resource Constrained Shortest Path* - RCSP (PUGLIESE; GUERRIERO, 2013)).

Para resolver os subproblemas, esses devem ser modelados como grafos com recursos associados as arestas (ou aos vértices), além disso deve ser definido a formulação mestre contendo a função objetivo e uma função de mapeamento que mapeia as variáveis de decisão aos grafos de subproblema.

4.1.1 Grafo para o Subproblema RCSP

O Subproblema de Caminho Mais Curto com Restrições de Recursos (RCSP) é a base do processo de geração de colunas, atuando na identificação de novas rotas viáveis para o problema mestre. Modelado em um grafo que representa a rede de clientes, o subproblema tem como objetivo encontrar um caminho de custo mínimo entre o depósito e cada cliente, respeitando rigorosas restrições de recursos, como a capacidade do veículo e as janelas de tempo. A seguir, será apresentada a definição para este subproblema 4.1, detalhando as variáveis, a função objetivo e as restrições que o definem.

$$G = (V,A), v_{source} = v_{sink} = 0 \tag{4.1a}$$

$$R = R_M = \{1,2\} \tag{4.1b}$$

$$q_{a,1} = d_j, a \in A \tag{4.1c}$$

$$q_{a,2} = t_{ij}, a \in A \tag{4.1d}$$

$$[l_{i,1}, u_{i,1}] = [0, Q], i \in V \tag{4.1e}$$

$$[l_{i,2}, u_{i,2}] = [a_i, b_i], i \in V \tag{4.1f}$$

No grafo G definido acima, foram adicionados dois recursos principais. O recurso de número 1 representa a restrição de capacidade, quando um veículo utiliza a aresta $a = (i, j)$ o seu consumo $q_{a,1}$ para essa aresta é dado pela demanda d_j do cliente j. Além disso, para respeitar a restrição de capacidade do problema foi definido que em cada um dos vértices i o limite superior de consumo acumulado $u_{i,1} = Q$.

O recurso de número 2 representa a restrição de tempo (janela), quando um veículo utiliza a aresta $a = (i, j)$ o seu consumo $q_{a,2}$ para essa aresta é dado pelo tempo de deslocamento t_{ij} entre os vértices i e j. Seguindo a definição do problema foi definido como limites de consumo acumulado para o recurso de tempo $[l_{i,2}, u_{i,2}] = [e_i, d_i]$. Na Figura 4.1 é ilustrado um grafo para a instância descrita na Tabela 4.1.

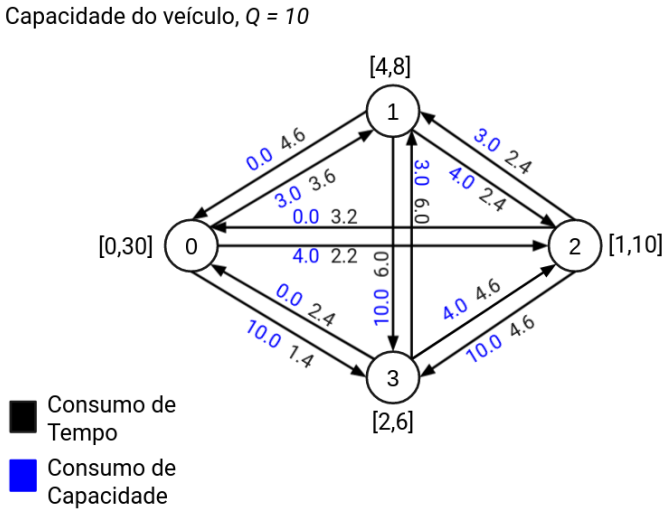


Figura 4.1: Exemplo de grafo com restrição de recursos. Fonte: próprio autor (2022).

i	q_i	e_i	d_i	s_i
0	0	0	30	0
1	3	4	8	1
2	4	1	10	1
3	10	2	6	1

Tabela 4.1: Tabela com o exemplo de uma instância.

4.1.2 Formulação

$$min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{4.2a}$$

$$\sum_{(i,j)\in \delta^-(j)} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \tag{4.2b}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A \tag{4.2c}$$

Na Formulação, a função objetivo (4.2a) quer minimizar o custo das rotas selecionadas para a solução. As Restrições (4.2b) definem que a solução só deve passar uma única vez por um cliente. A Restrição (4.2c) define o domínio inteiro binário para a variável de decisão x.

As outras restrições para o problema são definidas implicitamente através do grafo

descrito na seção 4.1.1. Para isso define-se uma função de mapeamento simples, no qual cada variável de decisão é mapeado para a respectiva aresta, formalmente $M(x_{ij}) = \{(i,j)\}, \forall (i,j) \in A$; e os limites de rotas no grafo são definidos por $L = 1, U = K$.

Além da modelagem básica para um algoritmo *Branch-Cut-and-Price* foram definidos *packing sets* (ou conjuntos de empacotamento), eles são utilizados pelo VRPSolver para melhorar o desempenho, passando para um algoritmo de *Branch-Cut-and-Price* avançado. Pode ser melhor entendido no artigo original (PESSOA et al., 2020) que explica que Packing Sets, são subconjuntos de clientes cuja demanda excede a capacidade do veículo (Q). Estes *packing sets* são cruciais, pois geram restrições que guiam o código, otimizando a enumeração de rotas e permitindo a aplicação de cortes de capacidade mais eficazes, como os *ng-paths*, ao eliminar rapidamente porções inviáveis do espaço de soluções.

$$P^V = E^V = \cup_{i \in V} \{\{i\}\} \tag{4.3}$$

Adicionalmente, são aplicados os *Rounded Capacity Cuts* (RCCs) (LAPORTE; NOBERT, 1983), que ainda são úteis em algoritmos *Branch-Cut-and-Price* modernos, que têm o papel fundamental de impor a restrição de capacidade de forma mais rígida, cortando as soluções fracionárias inadequadas e forçando o modelo a convergir para soluções inteiras e logisticamente viáveis.

$$(\cup_{i \in V} \{(\{i\}, q_i)\}, Q) \tag{4.4}$$

4.2 Formulação VRTW Clássica de Kohl

Para a resolução computacional do problema e a avaliação do desempenho em diferentes cenários, empregou-se a formulação proposta por Kohl et al.(KOHL et al., 1999). Esta formulação foi implementada utilizando-se o ambiente de programação Julia, em conjunto com a interface de modelagem JuMP e o solucionador comercial CPLEX.

O modelo de Kohl (KOHL et al., 1999) visa a minimização o custo total, considerando as restrições de janelas de tempo e de capacidade dos veículos que são determinísticas a priori. A formulação matemática de (KOHL et al., 1999) para o *VRPTW* compreende as seguintes variáveis de decisão:

$$X_{ij}^{v} = \begin{cases} 1, \text{se } j \text{ é atendido após } i \text{ pelo veiculo } v \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$T_i =$ horário de atendimento em $i, i \in \{1,2,...,N\}$

O modelo matemático do VRPTW é apresentado a seguir:

$$min \sum_{v=1}^{NV} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N+1} c_{ij} X_{ij}^{v} \tag{4.5a}$$

$$S.t. \sum_{v=1}^{NV} \sum_{j=1}^{N+1} X_{ij}^{v} = 1, \qquad i = 1,2,...,N; i \neq j \tag{4.5b}$$

$$\sum_{j=0}^{N+1} X_{0j}^{v} = 1, \qquad v = 1,2,...,NV \tag{4.5c}$$

$$\sum_{i=0}^{N} X_{ij}^{v} - \sum_{i=1}^{N+1} X_{ji}^{v} = 0 \qquad j = 1,...,N; v = 1,...,NV \tag{4.5d}$$

$$\sum_{i=0}^{N+1} X_{i,N+1}^{v} = 0 \qquad v = 1,...,NV \tag{4.5e}$$

$$a_i \leq T_i \leq b_i \qquad i = 1,...,N \tag{4.5f}$$

$$T_i + s_i + c_i - T_j \leq (1 - X_{ij}^{v}) M_{ij} \qquad (i,j) \in A; v = 1,...,NV \tag{4.5g}$$

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} q_j X_{ij}^{v} \leq K \qquad v = 1,...,NV \tag{4.5h}$$

$$X_{ij}^{v} \in \{0,1\} \qquad (i,j) \in A; v = 1,...,NV \tag{4.5i}$$

A função objetivo (4.5a) representa o tempo total a ser minimizado. As restrições do modelo representam:

- As restrições (4.5b) asseguram que cada cliente seja visitado uma única vez e por um único veículo;
- As restrições (4.5c) asseguram que todo veículo inicie uma rota a partir do depósito;
- As restrições (4.5d) impõem que todo veículo deve entrar e sair de um cliente;
- As restrições 4.5e) impõem que todo veículo termine uma rota no depósito. Caso o veículo não seja utilizado, ele segue o caminho do arco direto ligando a base de partida (nó 0) à base de chegada (nó $N+1$).

- As restrições (4.5f) impõem que o horário de início de atendimento de cada nó ocorra dentro da sua respectiva janela de tempo.

- As restrições (4.5g) estabelecem a relação entre o horário de partida do veículo a partir de um cliente e seu sucessor imediato, garantindo também a eliminação de sub-rotas.

- As restrições de capacidade de carga são dadas pela expressão (4.5h 1h).

- As restrições (4.5i) asseguram a integralidade da solução.

As restrições (4.5g) foram obtidas a partir da linearização das restrições originais não lineares ($X_{ij}^{v}(T_i + s_i + c_i - T_j) \leq 0,\ i = 1,2,...,N; j = 1,2,...,N; v = 1,2,...,NV$), a qual foi possível através da condição de integralidade pelas restrições (4.5i). O valor da constante M_{ij} nas restrições pode ser substituído por $max(b_i + s_i + c_{ij} - a_i, 0), i, j \in \{1,2,...,N\}$

Capítulo 5

Experimento e Análise de Resultados

O presente capítulo descreve os resultados do experimento realizado para avaliar o desempenho dos Modelos. A seção Projeto de Experimento 5.1, explica os objetivos e a estrutura do estudo, detalhando o que foi testado, as métricas de avaliação utilizadas e as especificações do ambiente computacional. Em seguida, a seção Instâncias 5.2, apresenta os diferentes conjuntos de dados que foram gerados e utilizados para o teste, descrevendo suas características e o método de criação. Por fim, a seção Resultados 5.3, analisa os dados obtidos nos experimentos, organizando as descobertas em tabelas claras e fornecendo uma interpretação dos resultados para extrair as principais conclusões do Modelo.

5.1 Projeto de Experimento

O experimento tem como objetivo central testar a eficácia e o desempenho do método *Branch-and-Price-and-Cut (BPC)*, implementado na ferramenta *VRPsolver*. A pesquisa busca demonstrar que o *VRPsolver* é uma ferramenta eficaz para otimizar rotas reais, pois consegue gerar soluções de alta qualidade que são essenciais para a dinâmica das entregas expressas. Para isso, o estudo avaliará a capacidade do nosso modelo e da ferramenta em lidar com a complexidade, as restrições de tempo e a escala de grandes conjuntos de dados.

Para garantir a validade e a aplicabilidade da pesquisa, serão utilizados dois conjuntos de instâncias. O conjunto clássico de instâncias de Solomon (SOLOMON, 1987) que servirá para a validação do método, permitindo a reprodução de resultados de referência da literatura e a comparação com estudos anteriores. Já as instâncias reais de cidades

brasileiras do *benchmark LoggiBUD* das cidades do Rio de Janeiro, Belém e Brasília, instâncias da cidade de Manaus somadas a algumas cidades metropolitanas ao redor da capital, serão usadas para testar a aplicabilidade do modelo em um contexto real. Essas instâncias foram adaptadas para incorporar janelas de tempo, refletindo os desafios específicos da logística nacional.

A avaliação dos resultados foi realizada por meio de métricas que avaliam tanto a qualidade das soluções quanto a eficiência do método. A qualidade da solução foi avaliada pelo custo total (distância e tempo), pelo número de veículos utilizados e pela taxa de entregas concluídas dentro das janelas de tempo. Além disso, o tempo de execução do *VRPsolver* foi medido para verificar a eficiência em grandes instâncias, com um tempo limite de 90 minutos (1,5 horas) para a resolução dos cenários. Caso ultrapasse esse limite de tempo evidenciando a complexidade de cálculos, classificaremos como *Não Concluído no Limite de Tempo (> 1,5h)* e caso a instância testada não tenha uma solução possível, seja por não conseguiu traçar nenhuma rota que satisfizesse, ao mesmo tempo, as restrições de capacidade dos veículos e os prazos de entrega dentro da janela de tempo dos clientes classificaremos como *Inviável*. Os resultados para as instâncias de Solomon foram comparados com a literatura, enquanto os resultados para as instâncias *LoggiBUD* estabelecerão uma nova base para futuras análises no campo da logística urbana.

5.2 Instâncias

5.2.1 Instâncias de Solomon

Desenvolvido por Marius Solomon em 1987 (SOLOMON, 1987), suas instâncias são conjuntos de dados que representam cenários fictícios de distribuição e entrega de mercadorias. Cada instância inclui um conjunto de clientes, cada um com uma demanda específica, e um depósito central de onde os veículos partem e retornam.

Essas instâncias são divididas em seis classes principais, nomeadas de C1, C2, R1, R2, RC1 e RC2. Cada uma dessas classes tem características distintas em termos de distribuição geográfica dos clientes e a relação entre as demandas e a capacidade dos veículos:

- Classe C *(Clustered)*:

C1: Clientes estão agrupados em clusters, ou seja, os clientes próximos tendem a estar agrupados. O horizonte de tempo é curto, exigindo que as rotas sejam compactas.

C2: Clientes também estão agrupados em clusters, mas com um horizonte de tempo mais longo, permitindo que os veículos cubram uma área maior.

- Classe R *(Random)*:

  R1: Os clientes são distribuídos de forma aleatória ao longo de uma área e o horizonte de tempo é curto. As rotas são geralmente mais curtas, mas menos estruturadas em termos de agrupamento.

  R2: Clientes distribuídos aleatoriamente, mas com um horizonte de tempo mais longo, o que permite rotas mais extensas.

- Classe RC *(Random-Clustered)*:

  RC1: Combina características de clientes agrupados e distribuídos aleatoriamente, com um horizonte de tempo curto.

  RC2: Também combina características de agrupamento e distribuição aleatória, mas com um horizonte de tempo mais longo.

As instâncias empregadas neste experimento (C203, C204, R202, R203, R204, R206, R207, R208, R209, R210, R211, RC204, RC207 e RC208) são instâncias muito complexas e são as mesmas utilizadas nos testes do algoritmo *Branch-and-Cut-and-Price (BCP)* para o *VRPTW*, cujos detalhes se encontram em (PESSOA et al., 2020).

5.2.2 Instâncias do LoggiBUD

As instâncias do *LoggiBUD* foram projetadas para simular cenários reais de entregas urbanas, onde a eficiência na rota é crucial para o sucesso da operação. Elas são utilizadas para medir o desempenho de algoritmos em termos de qualidade da solução, tempo de processamento e escalabilidade, em situações que refletem os desafios enfrentados no ambiente urbano, como tráfego intenso, alta densidade de clientes e restrições de tempo (LOGGI, 2021b).

Atualmente o LoggBUD fornece 120 instâncias para o problema de ponta a ponta no Rio de Janeiro (RJ), Brasília (DF) e Belém (PA) que é é um serviço de entregas que vai

diretamente do ponto de origem ao ponto de destino, sem paradas ou intermediários. Os tamanhos das instâncias variam de 320 a 32k entregas.

Embora a meta do *Benchmark* seja resolver o problema de ponta a ponta, ele também fornece instâncias com bases de demandas em 11 *hubs* obtidos usando uma atribuição $p-hub$, Tendo a 990 instâncias para o $CVRP$ das cidades do Rio de Janeiro (RJ), Brasília (DF) e Belém (PA) (LOGGI, 2021a).

No repositório do *benchmark* loggiBUD são disponibilizados dois tipos de instâncias: *delivery-instances* e *cvrp-instances*. As instâncias trabalhadas neste projeto representam o clássico problema de roteamento de veículos capacitados (CVRP). Nessas instâncias são apresentadas informações sobre: a localização do depósito; a capacidade Q dos veículos da frota; as localizações de cada entrega a ser feita; e as demandas de cada uma das entregas.

O *benchmark loggiBUD* possui 1320 instâncias do tipo *cvrp-instances*, assim, foram selecionadas algumas instâncias representativas para serem adicionadas janela de tempo, com quatro tipos diferentes de intervalos:

- R - Instâncias com Janelas de Tempo aleatórias;
- F30m - Instâncias com Janelas de Tempo fixas de 30 min;
- F1h - Instâncias com Janelas de Tempo fixas de 1h;
- F2h - Instâncias com Janelas de Tempo fixas de 2h;

Para cada um dos tipos foram gerados 15 instâncias, sendo 5 geradas a partir de instâncias para o PA, e 5 a partir de instâncias para o DF e 5 para RJ. Em termos de número de entregas a serem feitas, as instâncias RJ são as maiores, com mais de 1000 entregas a serem feitas por instância, seguido pelas instâncias DF que variam entre 700 e 1000 por instância. As instâncias PA são as menores, contendo entre 200 e 400 entregas por instância.

Para construir as novas instâncias foram utilizadas as distâncias entre os clientes em metros disponibilizadas pelo servidor OSRM. Para definir as janelas fixas de tempo ficou definido que um veículo anda em uma velocidade constante de $30km/h$ então, $1h$ para as instâncias são equivalentes a 30000 metros de deslocamento. As instâncias foram construídas com um plano de horizonte $12h$, assim para todas as instâncias $[a_0, b_0] = [0, 360000]$.

5.2.3 Instâncias do Amazonas

Assim como as instâncias do *LoggiBUD* foram projetadas para simular cenários reais de entregas urbanas de cidade do Pará, Rio de Janeiro e Distrito Federal. As instâncias para o estado do Amazonas tiveram o mesmo objetivo, Utilizando o mesmo algorítimo para gerar as primeiras instâncias geramos as instancias da cidade de manaus e de algumas cidades da região metropolitana da capital (SOUZA et al., 2025).

O objetivo foi criar cenários de teste que refletissem as particularidades geográficas e operacionais locais. A delimitação das cidades metropolitanas foi estratégica, selecionando apenas aquelas que possuíam acesso direto via rodovias à capital, Manaus, sendo elas: Iranduba, Manacapuru, Novo Airão, Rio Preto da Eva, Presidente Figueiredo e Itacoatiara (Figura 5.1).

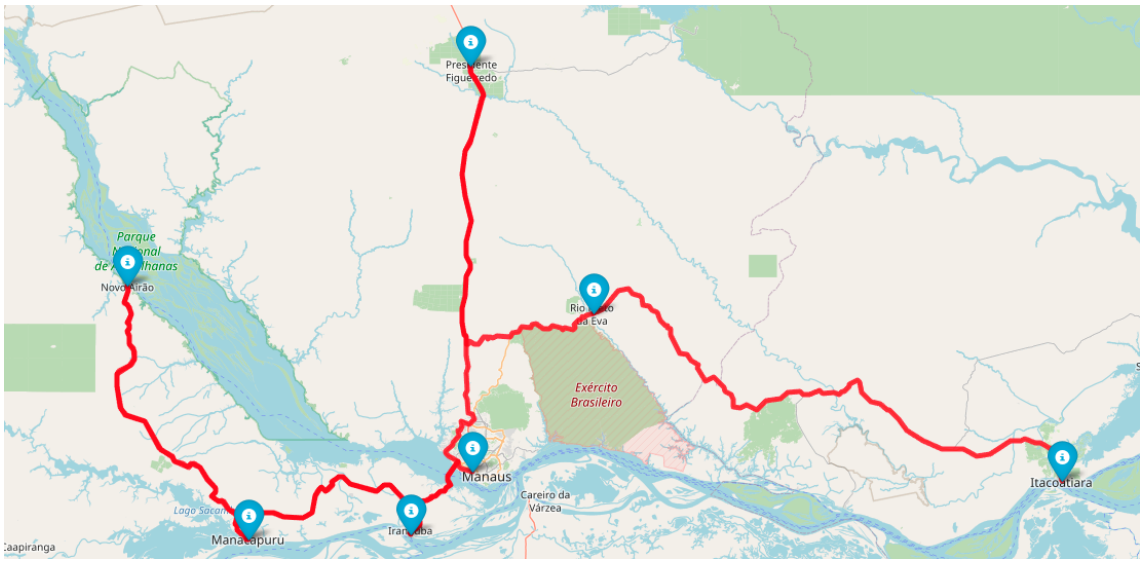


Figura 5.1: Cidades do Estado do Amazonas. Fonte: Próprio autor (2025).

Para o experimento, utilizamos como base instâncias do LoggiBUD (LOGGI, 2021a), utilizamos como referência as instâncias da capital Belém-PA, por serem mais parecidas com o cenário da região. A partir dessa referencia criamos no total 420 instâncias da cidade de Manaus e Manaus Metropolitana no formato LogguiBUD, 28 dessas instancias foram selecionadas aleatoriamente para o estudo, abrangendo até 337 clientes.

Para explorar diferentes cenários de entrega da cidade de Manaus e Manaus Metropolitana. Para cada uma das instâncias dividimos em áreas de entregas ou serviço (com 1, 2 e 4 hubs). Além disso, cada uma dessas instâncias foi testada sob quatro diferentes

janelas de tempo de entrega (15 minutos, 30 minutos, 1 hora e 2 horas). Essa combinação resultou em um total de 112 instâncias de teste. As figuras 5.2 a 5.7 mostram exemplos visuais dessas instâncias, a figura 5.8 mostra um exemplo de instância para o VRPSolver.

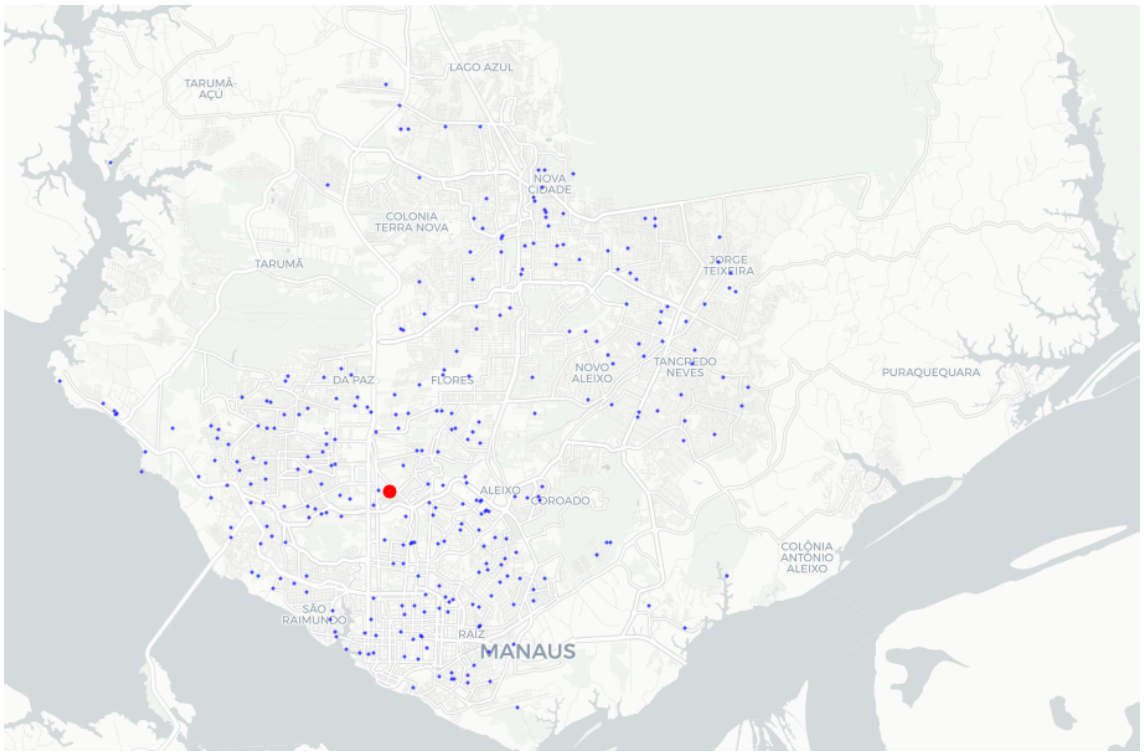


Figura 5.2: Instância: manaus-1hub-0-am-3-292. Fonte: Próprio autor (2025).

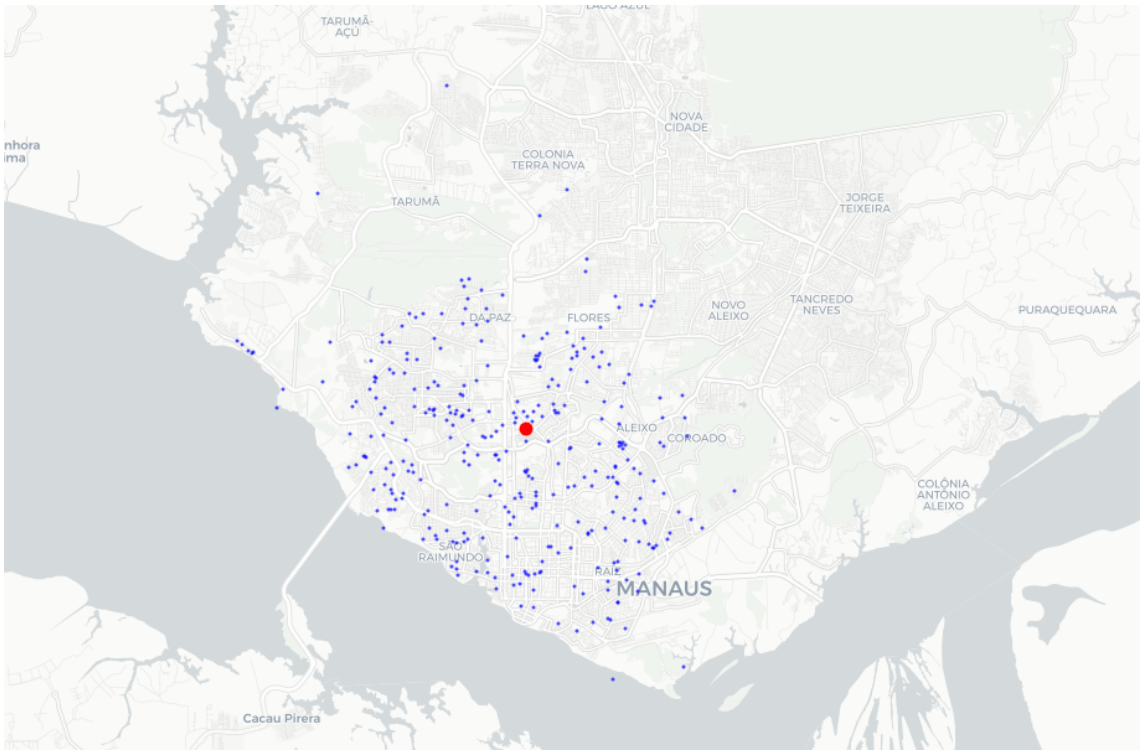


Figura 5.3: Instância: manaus-2hub-1-am-6-328. Fonte: Próprio autor (2025).

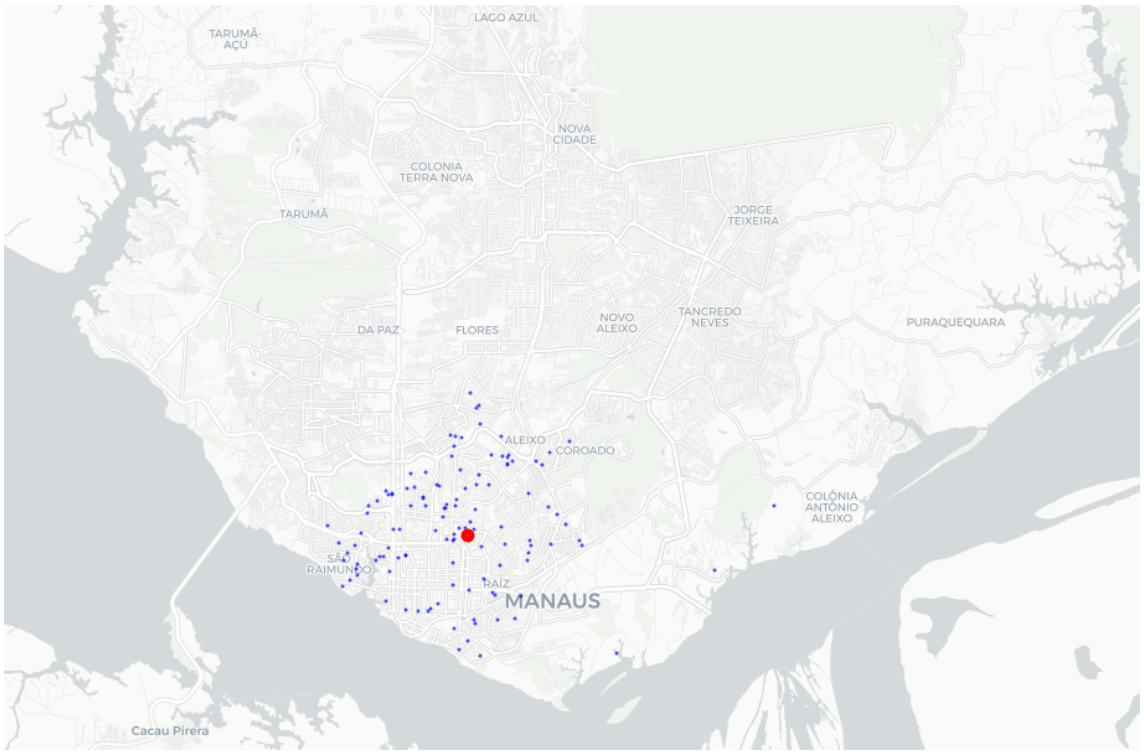


Figura 5.4: Instância: manaus-4hub-0-am-59-119. Fonte: Próprio autor (2025).

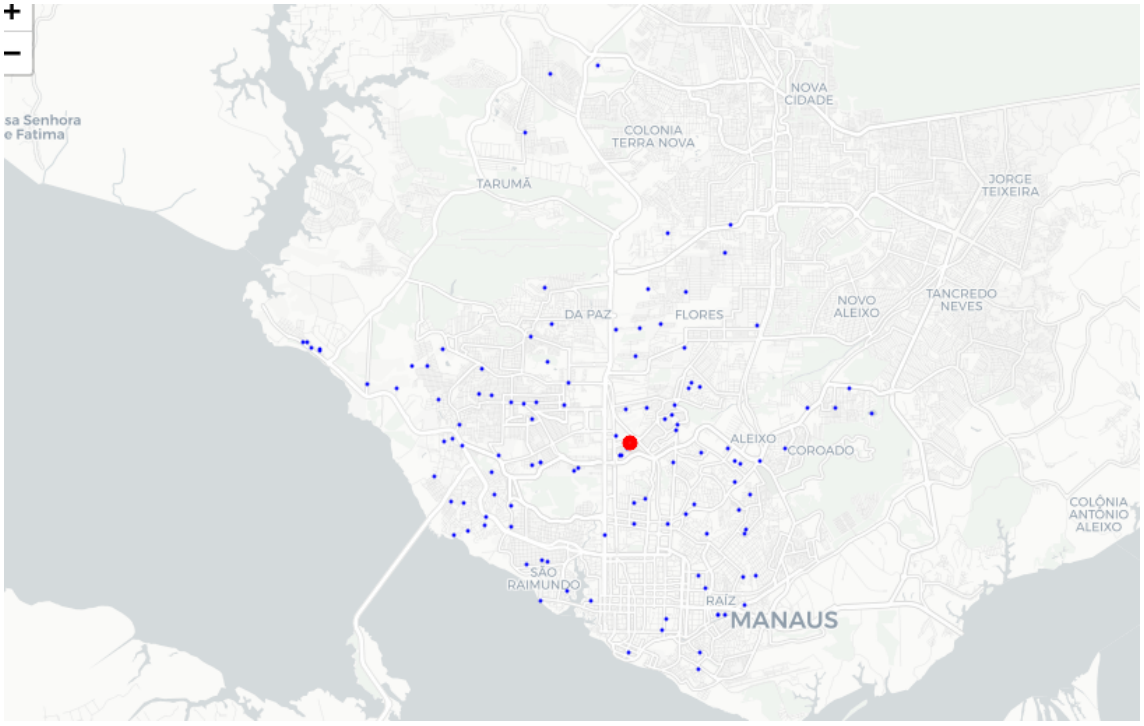


Figura 5.5: Instância: metro-4hub-0-am-12-118. Fonte: Próprio autor (2025).



Figura 5.6: Instância: metro-4hub-1-am-10-18. Fonte: Próprio autor (2025).



Figura 5.7: Instância: metro-4hub-2-am-10-24. Fonte: Próprio autor (2025).

```
manaus-1hub-0-am-3-1h-292

VEHICLE
NUMBER  CAPACITY
292     180

CUSTOMER
CUST NO.  LONGITUDE               LATITUDE                DEMAND    READY TIME  DUE DATE  SERVICE TIME
0         -60.02075278335768      -3.0877150175959867     0         0           360000    0
1         -59.98246229694375      -3.089293204029086      10        271102      301102    1000
2         -59.98612729172097      -3.0891439306558417     2         238057      268057    1000
3         -59.97949211925796      -3.0890969760592606     1         221129      251129    1000
4         -59.97862427074746      -3.086339307512655      6         98188       128188    1000
5         -59.97922092059044      -3.0902721220432565     3         282610      312610    1000
6         -60.038739005763        -3.0562535051535145     2         60460       90460     1000
7         -60.02513516618701      -3.117277875051714      10        291908      321908    1000
8         -60.02573579436986      -3.123095812569047      7         222050      252050    1000
9         -59.95519891308773      -3.035916666903131      6         190220      220220    1000
10        -59.9540358335175       -3.027221595605916      3         133005      163005    1000
11        -59.95240807995247      -3.029185064504874      2         271927      301927    1000
12        -59.95747980168771      -3.026391486750749      10        271509      301509    1000
13        -60.00231912628701      -3.0488291193806814     2         150228      180228    1000
14        -59.996759465464244     -3.0427167809331954     8         139272      169272    1000
15        -59.99864291802541      -3.055719770660646      9         19860       49860     1000
16        -60.011009030919375     -3.0387380387631815     9         230563      260563    1000
17        -60.01007590762505      -3.0858244725968555     9         117252      147252    1000
18        -60.00975885784221      -3.090958887142725      2         9241        39241     1000
19        -60.008158460222965     -3.0920299648313225     7         166622      196622    1000
20        -60.00886119935425      -3.0943257323288016     7         54005       84005     1000
21        -60.006112225641836     -3.0858750600323086     1         140465      170465    1000
22        -60.05914573400837      -3.085512402776593      9         308152      338152    1000
23        -60.05575189510604      -3.09077428402942       1         325645      354100    1000
```

Figura 5.8: Instância Adaptada: manaus-1hub-0-am-3-1h-292. Fonte: Próprio autor (2025).

5.2.3.1 Parâmetros de Validação das Instâncias Criadas

Para definir os parâmetros utilizados nas instâncias das cidades do estado do Amazonas, foram primeiramente analisados os parâmetros das cidades de Belém(PA), Rio de Janeiro(RJ), e Brasília(DF). De acordo com a Tabela 5.1:

Instâncias (UF)	População	Densidade Demográfica	PIB	Área Territorial
Amazonas	2.411.860	23,36	168.323,23	103.232,96
DF	2.817.381	489,06	92.732,27	5.760,78
Pará	2.243.895	629,21	135.174,7	3.566,2
Rio de Janeiro	10.786.484	3.318,1	400.031,49	3.250,8

Tabela 5.1: Comparativo dos dados demográficos e socioeconômicos. Fonte: Próprio autor (2025)

A escolha de basear a geração de instâncias para o estado do Amazonas nas características observadas nas instâncias provenientes do estado do Pará é uma estratégia metodológica que visa enriquecer a avaliação do modelo proposto. Embora o Amazonas apresente uma vasta área territorial (103.232,96 km²) com baixa densidade demográfica (23,36 hab/km²), as instâncias do Pará, conforme o gráfico 5.9, mostram um perfil mais

denso (3.566,2 km² e 629,21 hab/km²). Essa diferença é crucial para modelar os desafios específicos da logística urbana em áreas de maior adensamento.

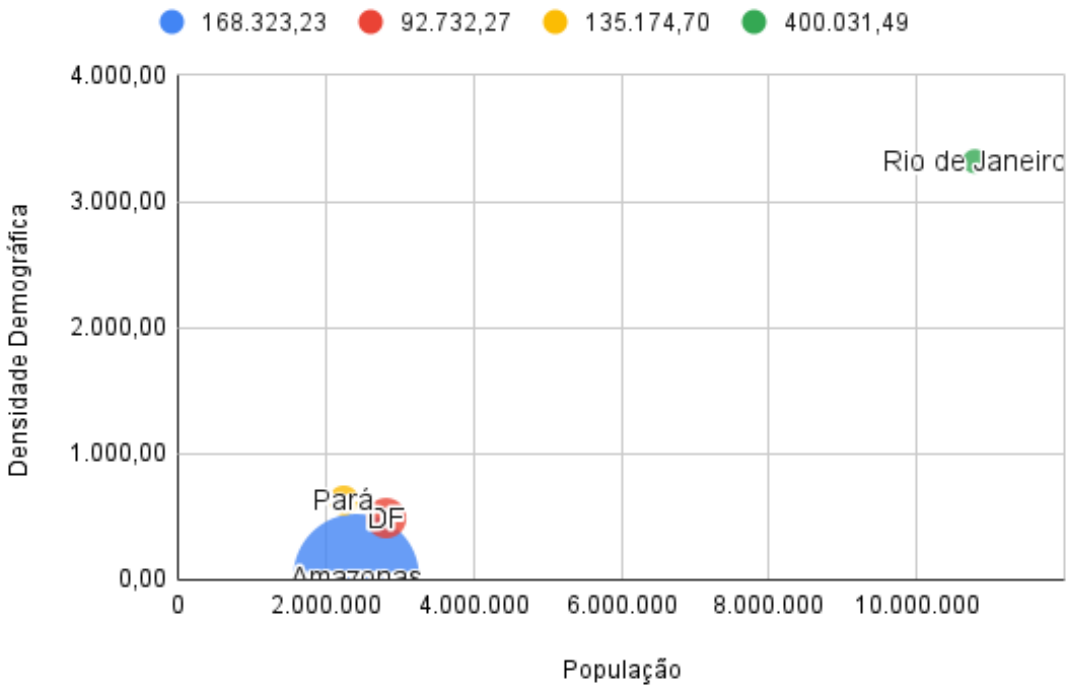


Figura 5.9: Comparativo dos dados demográficos e socioeconômicos das cidades do Estados do Amazonas, DF, Pará e Rio de Janeiro. Fonte: Próprio autor (2025)

Ao utilizar as características das instâncias do Pará como referência para a criação das instâncias do Amazonas (incluindo Manaus e sua Região Metropolitana), busca-se simular cenários urbanos mais concentrados e com maior densidade de clientes. Vale ressaltar que as instâncias do Pará, disponíveis no *LoggiBUD*, continham até 400 entregas por instância, o que as torna um modelo adequado para representar a complexidade de rotas em áreas de demanda considerável. Essa abordagem permite testar o modelo em condições que replicam a complexidade de entregas de *última milha* em centros urbanos movimentados dentro da Amazônia, mesmo que a média estadual do Amazonas seja de baixa densidade. Dessa forma, as instâncias geradas para o Amazonas, embora focadas em suas cidades, incorporam padrões de distribuição de clientes representativos de áreas urbanas mais adensadas, como as observadas no Pará.

Em síntese, essa estratégia assegura que o modelo seja avaliado em cenários urbanos desafiadores e com diferentes escalas de adensamento dentro da Região Amazônica. Ao fazer isso, a pesquisa analisa a adaptabilidade do algoritmo no *VRPSolver*, fornecendo *insights* valiosos para a otimização de operações logísticas em ambientes complexos, con-

forme confirmado pelos dados demográficos e territoriais comparativos.

5.2.3.2 Processo de Criação de Instâncias

O processo de criação envolveu as seguintes etapas principais, como mostrado no fluxograma 5.10 :



Figura 5.10: Fluxograma: Processo de Criação das Instâncias do Estado do Amazonas. Fonte: Próprio autor (2025)

- **Coleta de Dados Brutos**: Foram utilizados dados públicos e oficiais, como microdados do Censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e dados de infraestrutura urbana do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), servindo como base geográfica e demográfica para as cidades selecionadas dentro dos critérios de delimitação.

- **Estruturação e Processamento de Dados**: Os dados coletados foram rigorosamente organizados, padronizados e transformados para garantir a precisão e a adequação na modelagem de cenários realistas de entregas urbanas.

- **Cálculo de Distâncias Reais**: Para determinar as distâncias entre os pontos de entrega, foi configurado um servidor *Open Source Routing Machine (OSRM)*, que utiliza dados do *OpenStreetMaps* e opera via contêiner *Docker*.

- **Geração de Instâncias Iniciais**: Com os dados processados, foram criadas instâncias de Problemas de Roteamento de Veículos Capacitados (*CVRP*) (Figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7)).

- **Adaptação para VRPTW**: Posteriormente, essas instâncias iniciais foram adaptadas para incluir as janelas de tempo, transformando-as em instâncias do *VRPTW*

(como na figura 5.8), adequadas para os testes do algoritmo (ROSAS; CLEMENTINO; FREITAS, 2021).

Ao final, é gerado uma instância com a seguinte nomenclatura e exemplificada por *manaus-1hub-0-am-3-1h-292*, é um código estruturado que resume sua configuração experimental. O primeiro segmento, *manaus*, identifica a cidade ou região dos clientes. O termo *1hub* define o número de centros de distribuição (*hubs*) utilizados na simulação. O código *0-am-3* funciona como o identificador de qual *cluster* (*0*), estado (*am*) e numero da instância (*3*). Em seguida, *1h* especifica a janela de tempo de entrega máxima aplicada ao cenário, neste caso, 1 hora. Por fim, o número *292* indica a quantidade exata de clientes que compõem essa instância específica.

5.3 Resultados

O foco desta subseção é a apresentação e a análise comparativa dos resultados obtidos na otimização do *VRPTW*. O método central explorado foi o *BCP*, aplicado em três implementações distintas. A abordagem *BCP* integrada ao *VRPSolver* se destacou como a ferramenta mais robusta e eficaz, conseguindo alcançar a convergência e produzir soluções viáveis e economicamente competitivas para as instâncias testadas. Por outro lado, a implementação *BCP* baseada na formulação clássica de Kohl (KOHL et al., 1999), embora fundamental na literatura acadêmica, não demonstrou a mesma escalabilidade, revelando uma incapacidade de convergir ou de produzir resultados finais para o mesmo conjunto de testes. Essa discrepância metodológica não apenas justifica a exclusividade dos resultados do *VRPSolver* nas análises subsequentes, mas também sublinha a necessidade crítica de se empregar ferramentas de otimização de última geração, adaptadas para lidar com o volume e a complexidade dos dados logísticos do contexto urbano atual.

5.3.1 Instâncias de Solomon

Durante a execução dos experimentos, observou-se que a maioria das instâncias foi resolvida dentro do limite. A única exceção foi a instância R208, reconhecida por (PESSOA et al., 2019) por sua elevada complexidade no conjunto de dados. Para as instâncias que convergiram, o tempo necessário para alcançar a solução ótima foi inferior a 15 minutos, o que demonstra a eficiência do método empregado. Notavelmente, mesmo com a

condução dos experimentos em um computador pessoal, instâncias que não haviam sido resolvidas antes de 2017 (PECIN et al., 2017) foram solucionadas com sucesso.

Os resultados detalhados desses experimentos estão apresentados na Tabela 5.2, que se estrutura em duas colunas: a primeira indica o tempo médio de execução necessário para atingir a solução ótima, e a segunda exibe o custo da solução encontrada.

Instância	Tempo (s)	Custo
C203	20.78	588.7
C204	46.61	588.1
R202	184.30	1029.6
R203	93.84	870.8
R204	470.02	731.3
R206	527.43	875.9
R207	305.83	794.0
R208	> 5400	
R209	549.01	854.8
R210	897.46	900.5
R211	656.16	746.7
RC204	339.39	783.5
RC207	217.88	962.9
RC208	344.38	776.09

Tabela 5.2: Tabela com resultados de experimentos realizados nas instâncias Solomon.

5.3.2 Experimentos para as instâncias adaptadas do *loggiBUD* com *VRPSolver*

Os resultados dos experimentos para as instâncias estão detalhados nas Tabelas 5.3 e 5.4. Onde observou-se que o método demonstrou eficiência na resolução de algumas instâncias com um número de entregas inferior a 300 e com janelas de tempo fixas, alcançando a solução de forma mais rápida. Contudo, quando o número de entregas excede 300, o algoritmo tende a demandar um tempo de execução significativamente maior para convergir à solução.

Instância	Tempo (s)	Custo
F30m-pa-n289	1288.17	808037.0
F30m-pa-n266	273.04	895959.0
F30m-pa-n354	$>$ 5400	
F30m-pa-n324	3081.95	875398.0
F30m-pa-n308	$>$5400	
F30m-df-n999	$>$5400	
F30m-df-n904	$>$ 5400	
F30m-df-n974	$>$ 5400	
F30m-df-n835	$>$ 5400	
F30m-df-n939	$>$ 5400	

Tabela 5.3: Tabela com resultados para as instâncias com janelas fixas de 30 minutos.

Instância	Tempo (s)	Custo
F1h-pa-n269	486.05	880795.0
F1h-pa-n324	3474.46	1143354.0
F1h-pa-n322	$>$ 5400	
F1h-pa-n212	958.37	645609.0
F1h-pa-n296	778.30	607808.0
F1h-df-n780	$>$ 5400	
F1h-df-n815	$>$ 5400	
F1h-df-n890	$>$ 5400	
F1h-df-n957	$>$ 5400	
F1h-df-n993	$>$ 5400	

Tabela 5.4: Tabela com resultados para as instâncias com janelas fixas de 1 hora.

O método de geração de colunas empregado pelo *VRPSolver* demonstra maior eficácia para o *VRPTW* quando as janelas de tempo possuem intervalos menores. Essa observação foi corroborada durante a resolução das instâncias utilizadas neste trabalho: nenhuma das instâncias geradas a partir do *benchmark LoggiBUD*, que continham janelas aleatórias pôde ser resolvida em menos de 1,5h de execução.

Em contraste, para as instâncias com janelas de tempo fixas, algumas provenientes do estado do Pará (PA) apresentaram certa dificuldade, mas, de maneira geral, foram resolvidas (atingindo o ótimo) em menos de 1,5 horas, que foi o tempo limite estabelecido (Figura 5.11).

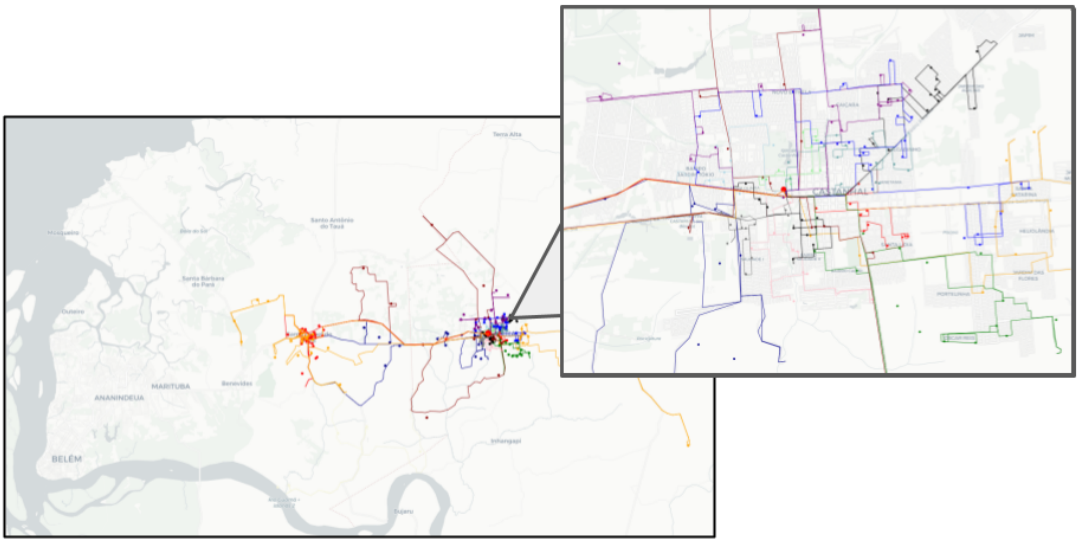


Figura 5.11: Solução para a instância F30m-pa-n266, traçada no mapa, contendo as ruas da cidade de Castanhal, no estado do Pará, e arredores. Fonte: (LOGGI, 2021a).

5.3.3 Instâncias do Estado do Amazonas

Esta seção mostrará os resultados dos experimentos computacionais realizados. A análise concentrou-se em instâncias reais provenientes da cidade de Manaus e de algumas cidades da região metropolitana, explorando como diferentes janelas de tempo de entrega (15 minutos, 30 minutos, 1 hora e 2 horas) e distintas abordagens para a divisão setorial da área de serviço – representadas pelo número de *hubs* (1, 2 e 4 *hubs*) – influenciam diretamente a viabilidade e a eficiência das rotas.

5.3.3.1 Resultados para Manaus

Ao examinar os resultados das instâncias de Manaus, foram identificados padrões claros sobre a eficácia e os limites do modelo de otimização. Percebeu-se que janelas de tempo mais curtas, como 15 e 30 minutos (Tabelas: 5.5 a 5.10), levaram a uma maior taxa de conclusão das rotas. Isso ocorre porque prazos mais apertados ajudam o algoritmo a encontrar soluções de forma mais direta e rápida, resultando em rotas eficientes e com custos adequados.

No entanto, a análise também revelou desafios, pois à medida que as janelas de tempo se estendiam para 1 hora (Tabelas: 5.11, 5.12, 5.13) e, principalmente, para 2 horas (Ta-

belas: 5.14, 5.15, 5.16), a complexidade do problema crescia, resultando em um número maior de instâncias não concluídas ou classificadas como “Inviáveis”. para entender o significado desses *status*: instâncias “Inviáveis” indicam que, dadas as restrições (tempo e capacidade), não foi possível encontrar nenhuma rota que permitisse realizar todas as entregas, revelando uma incompatibilidade fundamental entre a demanda e as condições impostas; já as instâncias “>1,5h” (Não Concluídas no Limite de Tempo) significam que o algoritmo não conseguiu finalizar a otimização no tempo de até 1,5 horas, sugerindo que, embora uma solução possa ser teoricamente possível, o tempo de processamento necessário é muito maior do que o prático para entregas expressas.

A otimização logística em áreas urbanas complexas, como Manaus, exige o uso de estratégias que vão além da simples aplicação dos algoritmos de roteamento. A estratégia de dividir a área de entrega em setores menores usando múltiplos hubs provou ser essencial para melhorar o desempenho, um resultado que é claramente demonstrado pelas Figuras 5.13, 5.15, 5.17, 5.12, 5.14 e 5.16. Essas figuras mostram tanto a separação da área em sub-regiões quanto as rotas geradas.

Em termos práticos, a divisão da área de serviço em setores menores, cada um atendido por um hub específico (como nos cenários de quatro hubs, Figura 5.16), transforma um grande e complexo Problema em vários problemas menores e mais fáceis de resolver. Essa separação reduz a dificuldade de cálculo do problema original, permitindo que o algoritmo encontre as melhores soluções de maneira mais eficiente. O benefício dessa abordagem é duplo: observamos tanto um processo de cálculo mais rápido para as rotas quanto, na maioria das vezes, uma diminuição nos custos operacionais totais.

A chave para essa eficiência está em limitar o alcance de cada veículo a um setor geográfico específico. Em um ambiente urbano com caminhos diversos e clientes espalhados, essa limitação evita que os veículos façam longas viagens entre pontos distantes. Ao administrar sub-regiões de forma independente, o algoritmo consegue planejar o uso dos veículos e cumprir os horários de entrega com maior precisão e economia. Esse resultado sustenta a ideia de que, em grandes áreas metropolitanas que apresentam desafios geográficos, a distribuição das operações (descentralização) é fundamental para otimizar a última milha, sendo mais eficaz que o modelo tradicional que usa apenas um centro de distribuição. Portanto, usar múltiplos hubs não é apenas uma escolha operacional, mas uma estratégia de otimização que garante soluções mais rápidas e viáveis logisticamente.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-1hub-0-am-55-15m-153	1303	535868	Concluído
manaus-1hub-0-am-3-15m-292	15496	102638	Concluído

Tabela 5.5: Resultados das instâncias de Manaus para 15 minutos e 1 Hub.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-2hub-0-am-30-15m-147	1331	580480	Concluído
manaus-2hub-0-am-34-15m-285	16026	671954	Concluído
manaus-2hub-1-am-55-15m-108	1449	325272	Concluído
manaus-2hub-1-am-6-15m-328	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.6: Resultados das instâncias de Manaus para 15 minutos e 2 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-4hub-0-am-59-15m-119	758	274132	Concluído
manaus-4hub-0-am-41-15m-283	14858	460924	Concluído
manaus-4hub-1-am-2-15m-126	997	332426	Concluído
manaus-4hub-1-am-34-15m-184	4052	382048	Concluído
manaus-4hub-2-am-29-15m-130	1564	263755	Concluído
manaus-4hub-2-am-10-15m-168	2866	336121	Concluído
manaus-4hub-3-am-30-15m-154	1656	343983	Concluído
manaus-4hub-3-am-10-15m-250	10434	425939	Concluído

Tabela 5.7: Resultados das instâncias de Manaus para 15 minutos e 4 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-1hub-0-am-55-30m-153	2263	524539	Concluído
manaus-1hub-0-am-3-30m-292	34773	103002	Concluído

Tabela 5.8: Resultados das instâncias de Manaus para 30 minutos e 1 Hub.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-2hub-0-am-30-30m-147	2258	549295	Concluído
manaus-2hub-0-am-34-30m-285	>1,5h	-	Não concluído
manaus-2hub-1-am-55-30m-108	1329	328578	Concluído
manaus-2hub-1-am-6-30m-328	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.9: Resultados das instâncias de Manaus para 30 minutos e 2 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-4hub-0-am-59-30m-119	892	273683	Concluído
manaus-4hub-0-am-41-30m-283	>1,5h	-	Não concluído
manaus-4hub-1-am-2-2h-126	1189	307834	Concluído
manaus-4hub-1-am-34-30m-184	29936	379807	Concluído
manaus-4hub-2-am-29-30m-130	1442	235416	Concluído
manaus-4hub-2-am-10-30m-168	5024	319243	Concluído
manaus-4hub-3-am-30-30m-154	2723	329517	Concluído
manaus-4hub-3-am-10-30m-250	24981	418129	Concluído

Tabela 5.10: Resultados das instâncias de Manaus para 30 minutos e 4 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-1hub-0-am-55-1h-153	8619	486985	Concluído
manaus-1hub-0-am-3-1h-292	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.11: Resultados das instâncias de Manaus para 1 hora e 1 Hub.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-2hub-0-am-30-1h-147	6262	530039	Concluído
manaus-2hub-0-am-34-1h-285	>1,5h	-	Não concluído
manaus-2hub-1-am-55-1h-108	2180	309986	Concluído
manaus-2hub-1-am-6-1h-328	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.12: Resultados das instâncias de Manaus para 1 hora e 2 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-4hub-0-am-59-1h-119	4953	257119	Concluído
manaus-4hub-0-am-41-1h-283	>1,5h	-	Não concluído
manaus-4hub-1-am-2-1h-126	2542	303716	Concluído
manaus-4hub-1-am-34-1h-184	>1,5h	-	Não concluído
manaus-4hub-2-am-29-1h-130	2585	236214	Concluído
manaus-4hub-2-am-10-1h-168	20435	289277	Concluído
manaus-4hub-3-am-30-1h-154	4288	310029	Concluído
manaus-4hub-3-am-10-1h-250	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.13: Resultados das instâncias de Manaus para 1 hora e 4 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-1hub-0-am-55-2h-153	43751	448644	Concluído
manaus-1hub-0-am-3-2h-292	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.14: Resultados das instâncias de Manaus para 2 horas e 1 Hub.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-2hub-0-am-30-2h-147	>1,5h	-	Não concluído
manaus-2hub-0-am-34-2h-285	>1,5h	-	Não concluído
manaus-2hub-1-am-55-2h-108	4728	285941	Concluído
manaus-2hub-1-am-6-2h-328	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.15: Resultados das instâncias de Manaus para 2 horas e 2 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
manaus-4hub-0-am-59-2h-119	4286	234301	Concluído
manaus-4hub-0-am-41-2h-283	>1,5h	-	Não concluído
manaus-4hub-1-am-2-2h-126	10217	268274	Concluído
manaus-4hub-1-am-34-2h-184	>1,5h	-	Não concluído
manaus-4hub-2-am-29-2h-130	14754	207818	Concluído
manaus-4hub-2-am-10-2h-168	>1,5h	-	Não concluído
manaus-4hub-3-am-30-2h-154	34724	278085	Concluído
manaus-4hub-3-am-10-2h-250	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.16: Resultados das instâncias de Manaus para 2 horas e 4 Hubs.

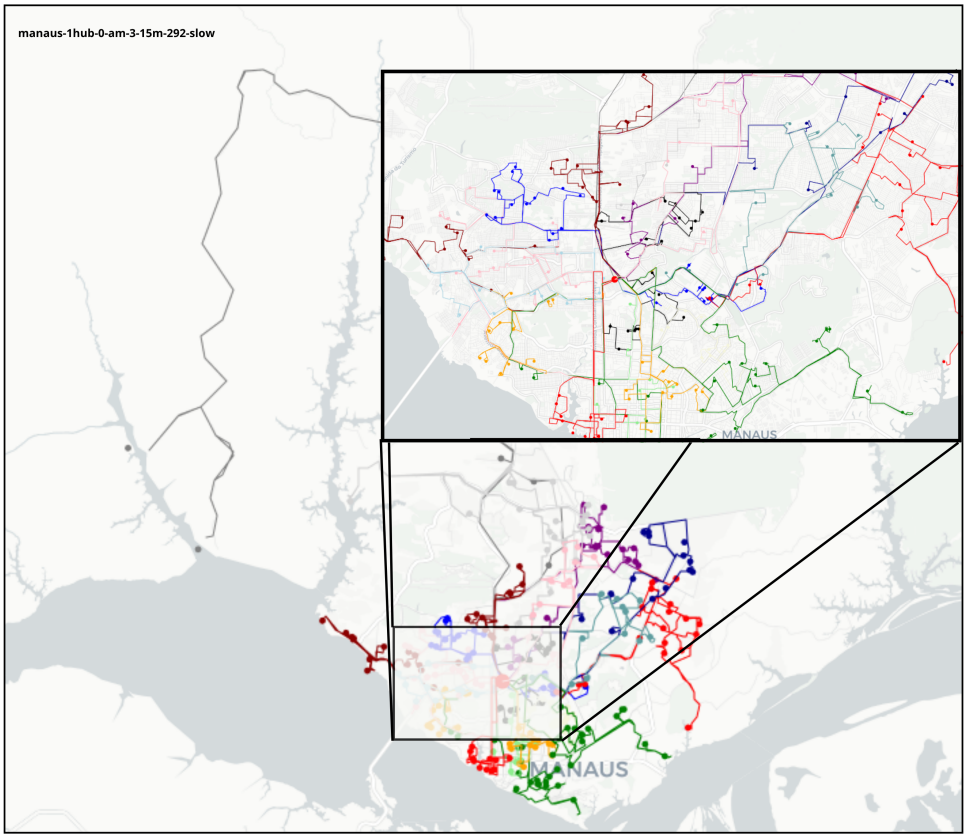


Figura 5.12: Instância de Manaus para 1 hub. Fonte: Próprio autor (2025).

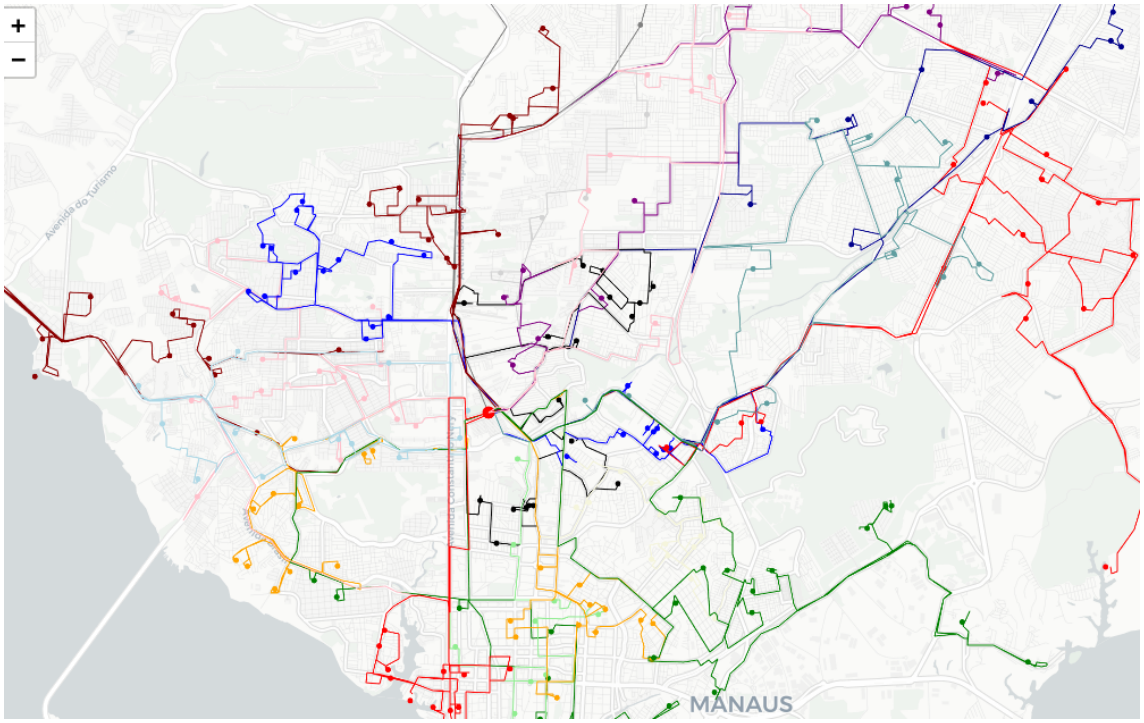


Figura 5.13: Instância de Manaus: manaus-1hub-0-am-3-15m-292. Fonte: Próprio autor (2025).

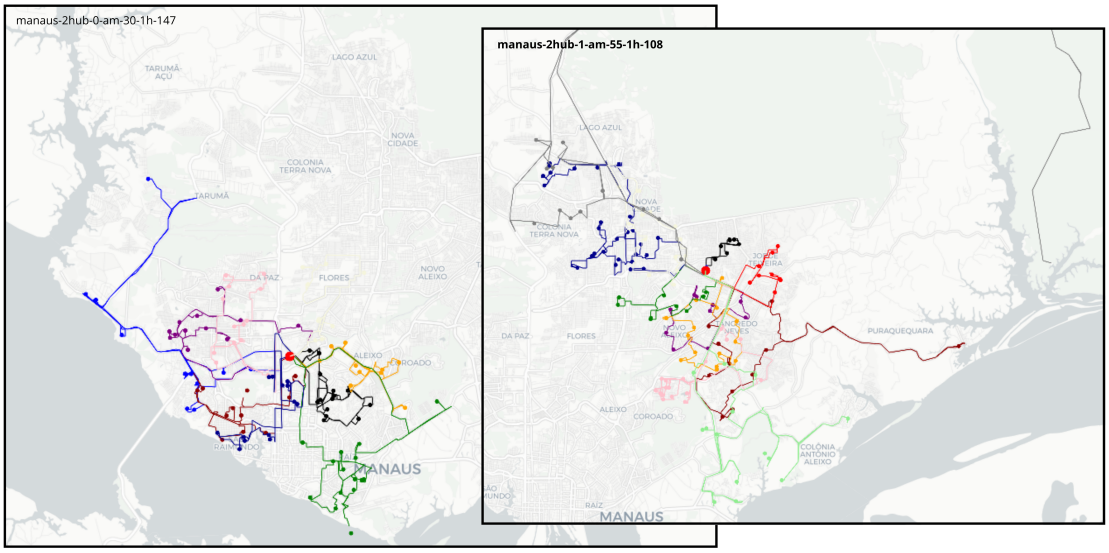


Figura 5.14: Instâncias de Manaus para 2 hub. Fonte: Próprio autor (2025).

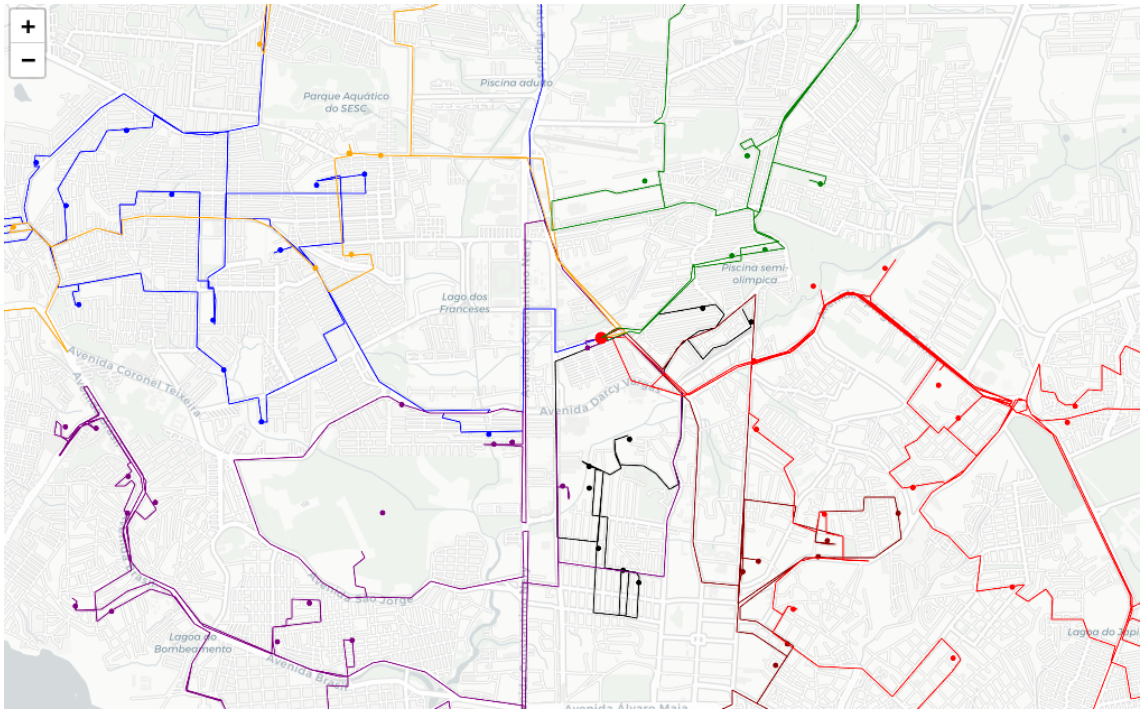


Figura 5.15: Instância de Manaus: manaus-2hub-1-am-55-2h-108. Fonte: Próprio autor (2025).

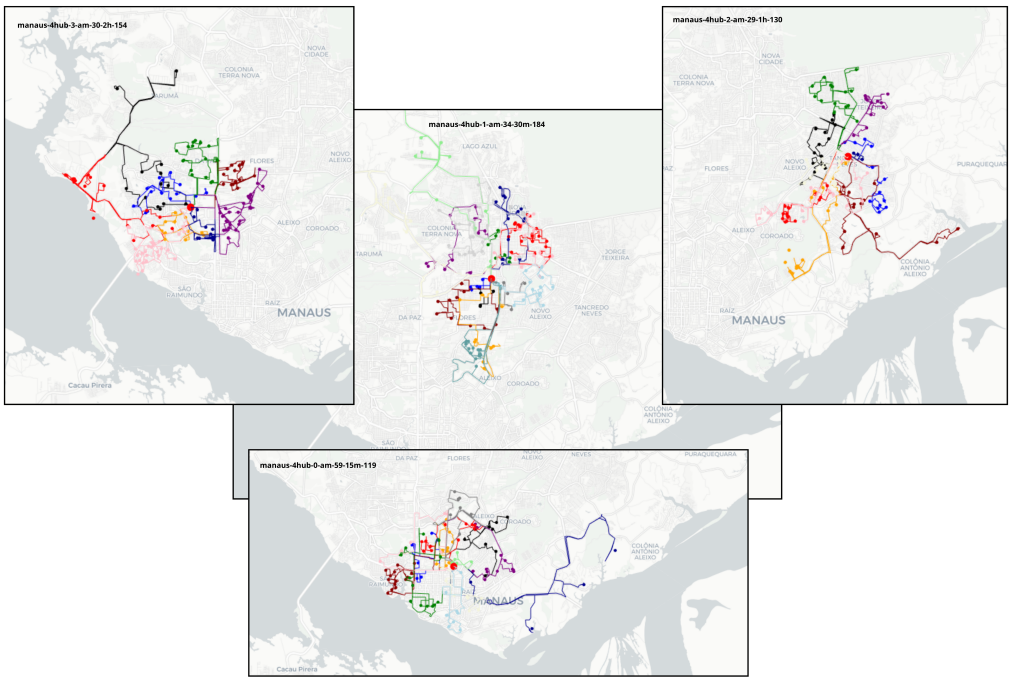


Figura 5.16: Instâncias de Manaus para 4 hub. Fonte: Próprio autor (2025).

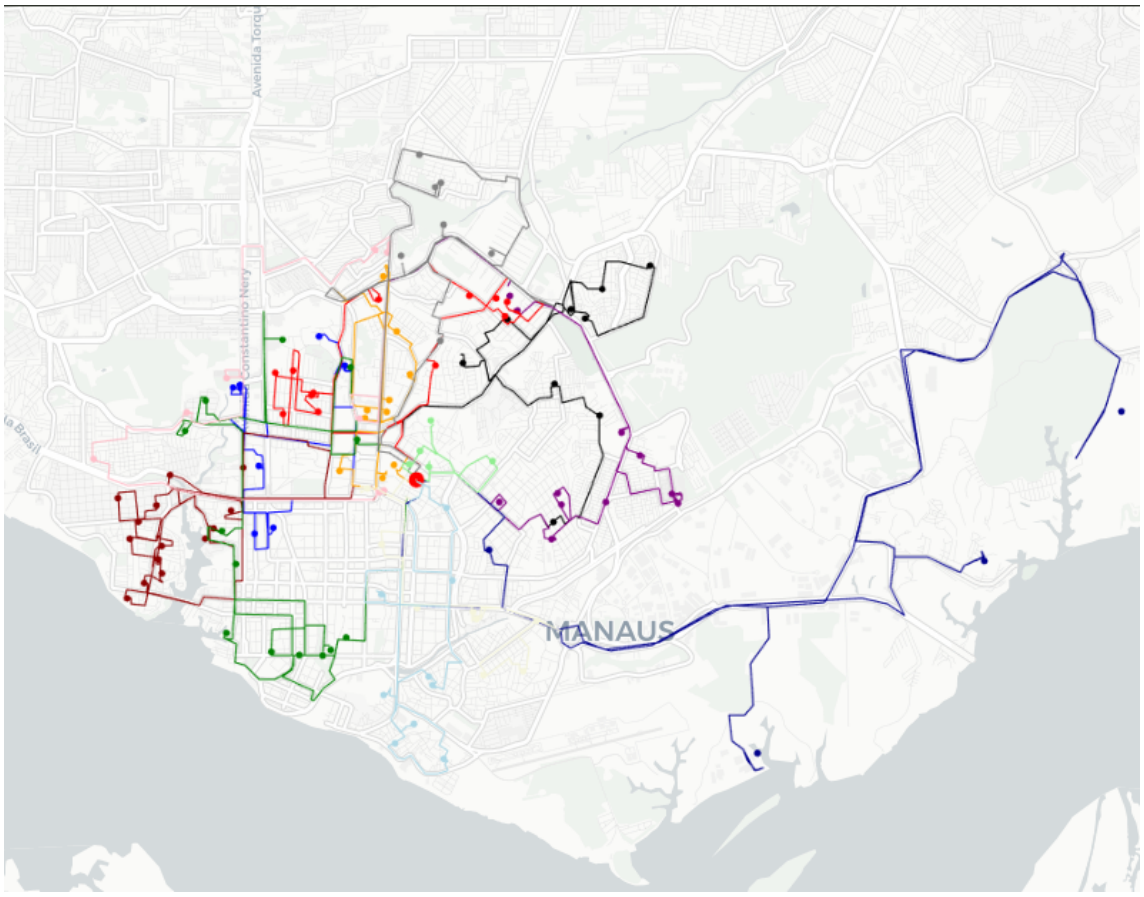


Figura 5.17: Instância de Manaus: manaus-4hub-0-am-59-15m-119. Fonte: Próprio autor (2025).

5.3.3.2 Resultados para Manaus e Cidades Metropolitanas

As instâncias correspondentes à região metropolitana de Manaus (Manaus, Iranduba, Manacapuru, Novo Airão, Presidente Figueiredo, Rio Preto da Eva, Itacoatiara) apresentaram um nível de complexidade e dificuldade ainda mais acentuado (Tabelas: 5.17,5.20, 5.23, 5.26, 5.18, 5.21, 5.24, 5.27, 5.19, 5.22, 5.25, 5.27). Observou-se uma prevalência significativamente maior de resultados "Inviáveis"e "$>$ 1,5h"nessas instâncias, mesmo quando comparadas às da capital e mesmo com a aplicação de configurações de 4 *hubs* e janelas de tempo mais curtas. Essa persistente resistência à otimização é intrinsecamente ligada a uma das realidades mais marcantes da área: a considerável distância entre as localizações dos clientes conforme ilustrado nas Figuras 5.18, 5.20, 5.22, 5.19, 5.21, 5.17, que exibem a plotação dos resultados das rotas, mostrando a complexidade e dispersão em muitas das regiões metropolitanas.

A maneira como os clientes estão espalhados por essa vasta área metropolitana, somada à complexidade das suas ruas, cria um verdadeiro labirinto para a logística. Essa distância maior não só aumenta o tempo necessário para ir de um ponto de entrega a outro, mas também torna muito difícil cumprir os prazos de entrega mais apertados.

Por essa razão, muitas rotas foram classificadas como “Inviáveis” na região metropolitana. Isso significa que, nas condições dadas (como as distâncias, os tempos e a capacidade dos veículos), não há como criar uma rota que permita realizar todas as entregas. Já o alto número de rotas que ultrapassaram o tempo de processamento em 1,5h indica que, embora uma solução possa existir, o tempo de cálculo necessário para encontrá-la é muito longo, o que não é prático para entregas que precisam ser calculadas rapidamente.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_1hub-0-am-52-15m-128	603	112309	Concluído
metro_1hub-0-am-33-15m-277	-	-	Inviável

Tabela 5.17: Resultados da região metropolitana de Manaus para 15 minutos e 1 Hub.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_2hub-0-am-52-15m-128	614	112309	Concluído
metro_2hub-0-am-46-15m-337	-	-	Inviável
metro_2hub-1-am-34-15m-31	88	646379	Concluído
metro_2hub-1-am-19-15m-25	-	-	Inviável

Tabela 5.18: Resultados da região metropolitana de Manaus para 15 minutos e 2 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_4hub-0-am-12-15m-118	743	450815	Concluído
metro_4hub-0-am-6-15m-312	23611	766450	Concluído
metro_4hub-1-am-10-15m-18	77	128218	Concluído
metro_4hub-1-am-48-15m-23	81	560280	Concluído
metro_4hub-2-am-10-15m-24	80	484081	Concluído
metro_4hub-2-am-34-15m-31	87	646379	Concluído
metro_4hub-3-am-17-15m-254	14078	102684	Concluído
metro_4hub-3-am-31-15m-147	1490	956135	Concluído

Tabela 5.19: Resultados da região metropolitana de Manaus para 15 minutos e 4 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_1hub-0-am-52-30m-128	943	120105	Concluído
metro_1hub-0-am-33-30m-277	-	-	Inviável

Tabela 5.20: Resultados da região metropolitana de Manaus para 30 minutos e 1 Hub.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_2hub-0-am-52-30m-128	1051	120105	Concluído
metro_2hub-0-am-46-30m-337	-	-	Inviável
metro_2hub-1-am-34-30m-31	99	621723	Concluído
metro_2hub-1-am-19-30m-25	-	-	Inviável

Tabela 5.21: Resultados da região metropolitana de Manaus para 30 minutos e 2 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_4hub-0-am-12-30m-118	1081	441474	Concluído
metro_4hub-0-am-6-30m-312	-	-	Inviável
metro_4hub-1-am-10-30m-18	79	130757	Concluído
metro_4hub-1-am-48-30m-23	82	585640	Concluído
metro_4hub-2-am-10-30m-24	83	483107	Concluído
metro_4hub-2-am-34-30m-31	99	621723	Concluído
metro_4hub-3-am-31-30m-147	3185	895949	Concluído
metro_4hub-3-am-17-30m-254	38583	992053	Concluído

Tabela 5.22: Resultados da região metropolitana de Manaus para 30 minutos e 4 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_1hub-0-am-52-1h-128	1,638	115915	Concluído
metro_1hub-0-am-33-1h-277	-	-	Inviável

Tabela 5.23: Resultados da região metropolitana de Manaus para 1 hora e 1 Hub.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_2hub-0-am-52-1h-128	1,600	115915	Concluído
metro_2hub-0-am-46-1h-337	-	-	Inviável
metro_2hub-1-am-19-1h-25	-	-	Inviável
metro_2hub-1-am-34-1h-31	92	613002	Concluído

Tabela 5.24: Resultados da região metropolitana de Manaus para 1 hora e 2 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_4hub-0-am-12-1h-118	2,345	414079	Concluído
metro_4hub-0-am-6-1h-312	>1,5h	-	Não concluído
metro_4hub-1-am-48-1h-23	82	56566	Concluído
metro_4hub-1-am-10-1h-18	79	127225	Concluído
metro_4hub-2-am-10-1h-24	83	479062	Concluído
metro_4hub-2-am-34-1h-31	91	613002	Concluído
metro_4hub-3-am-31-1h-147	5075	916447	Concluído
metro_4hub-3-am-17-1h-254	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.25: Resultados da região metropolitana de Manaus para 1 hora e 4 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_1hub-0-am-52-2h-128	3.053	928802	Concluído
metro_1hub-0-am-33-2h-277	23360	-	Inviável

Tabela 5.26: Resultados da região metropolitana de Manaus para 2 horas e 1 Hub.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_2hub-0-am-52-2h-128	3.053	928802	Concluído
metro_2hub-0-am-46-2h-337	-	-	Inviável
metro_2hub-1-am-34-2h-31	176	368033	Concluído
metro_2hub-1-am-19-1h-25	-	-	Inviável

Tabela 5.27: Resultados da região metropolitana de Manaus para 2 horas e 2 Hubs.

Nome	Tempo(s)	Custo	Status
metro_4hub-0-am-12-2h-118	5.535	379039	Concluído
metro_4hub-0-am-6-2h-312	>1,5h	-	Não concluído
metro_4hub-1-am-10-2h-18	81	120086	Concluído
metro_4hub-1-am-48-2h-23	86	558590	Concluído
metro_4hub-2-am-10-2h-24	90	302199	Concluído
metro_4hub-2-am-34-2h-31	103	365630	Concluído
metro_4hub-3-am-17-2h-254	>1,5h	-	Não concluído
metro_4hub-3-am-31-2h-147	>1,5h	-	Não concluído

Tabela 5.28: Resultados da região metropolitana de Manaus para 2 horas e 4 Hubs.

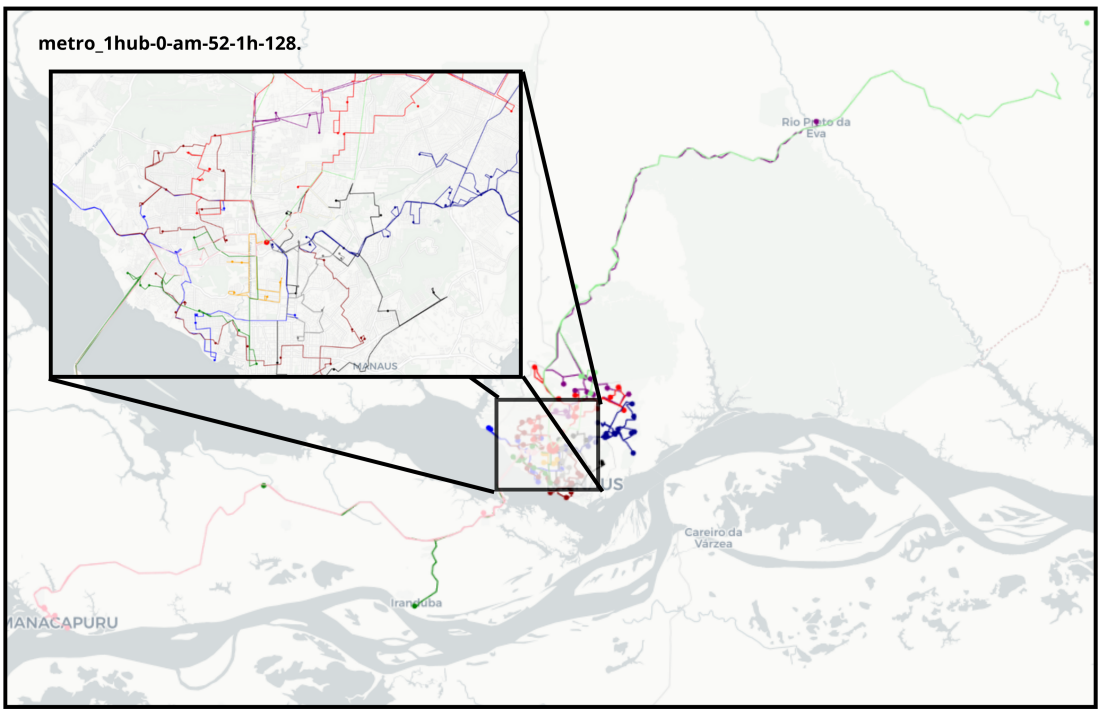


Figura 5.18: Instância de Manaus e Cidades Metropolitanas para 1 hub. Fonte: Próprio autor (2025).

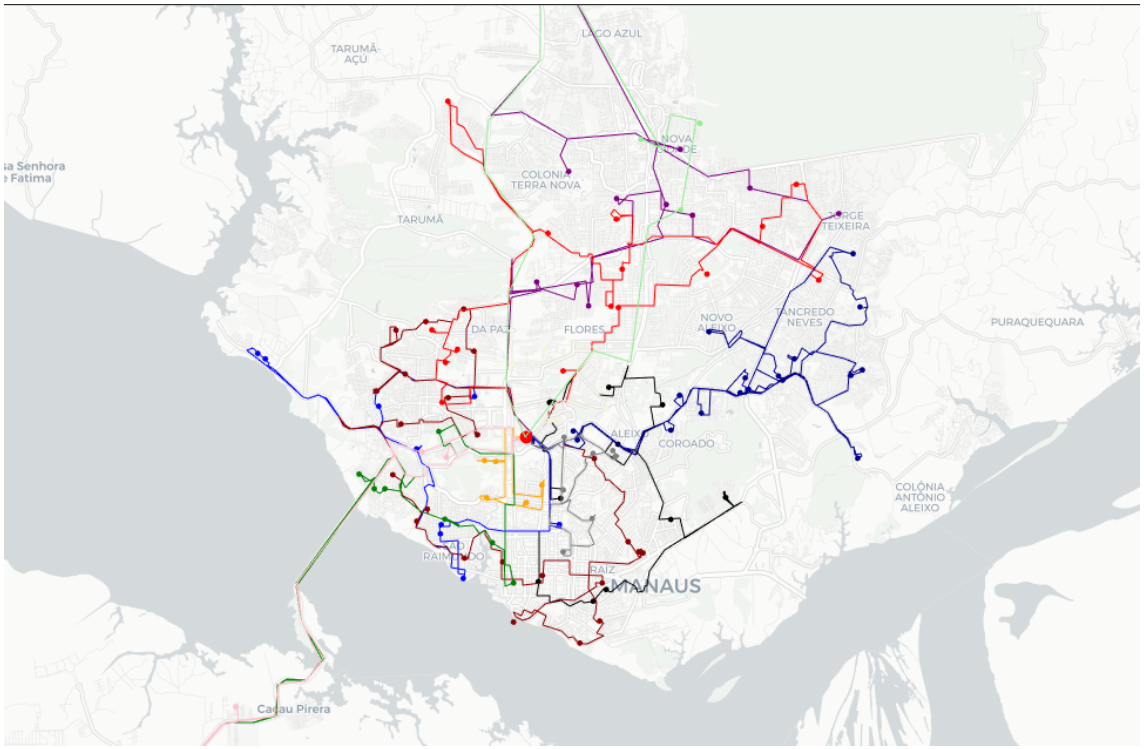


Figura 5.19: Instância: metro-1hub-0-am-52-1h-128. Fonte: Próprio autor (2025).

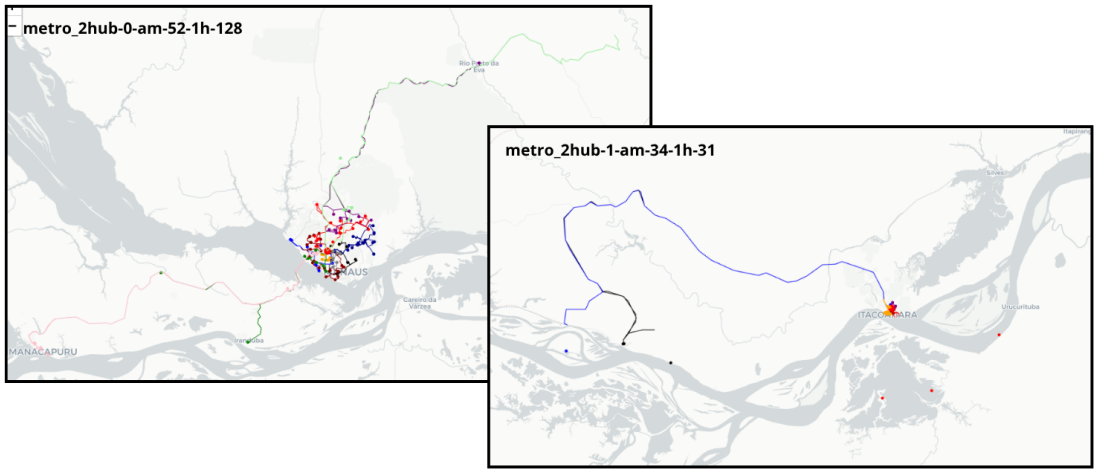


Figura 5.20: Instância de Manaus e Cidades Metropolitanas para 2 hub. Fonte: Próprio autor (2025).

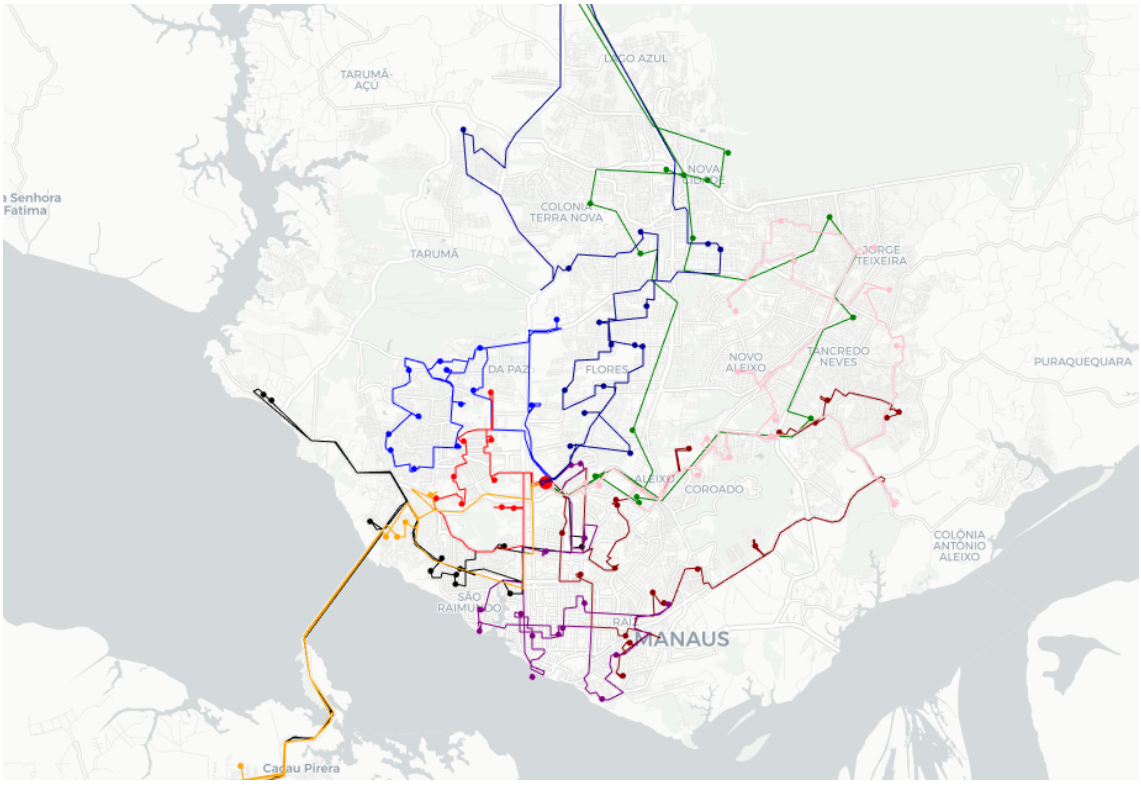


Figura 5.21: Instância: metro-2hub-0-am-52-2h-128. Fonte: Próprio autor (2025).

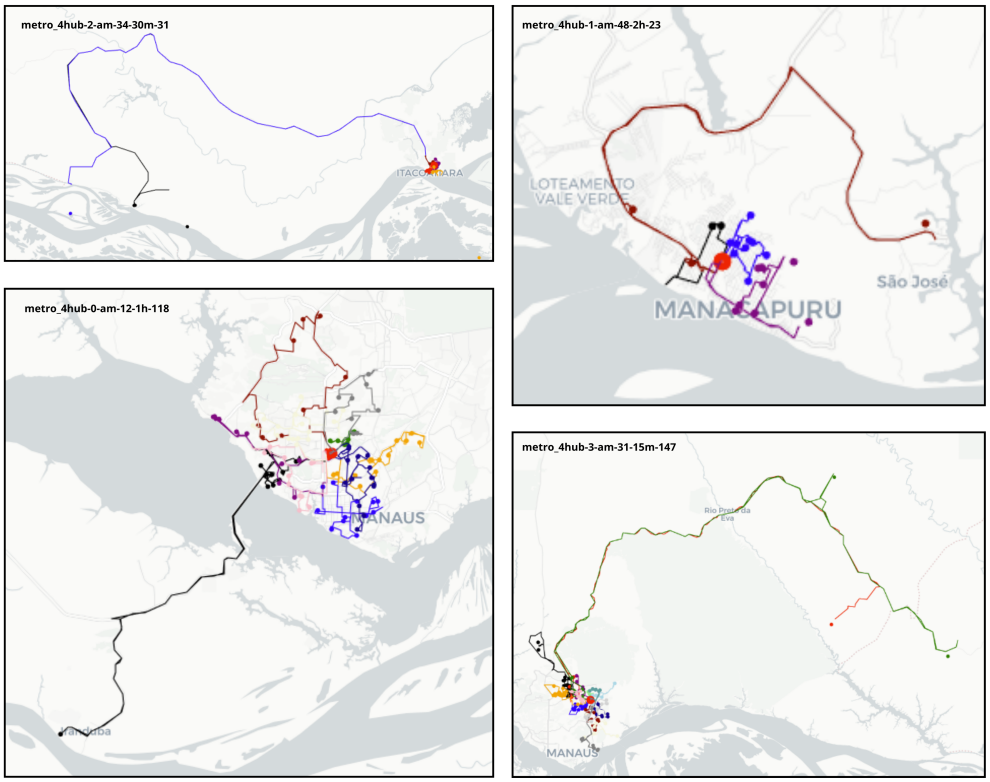


Figura 5.22: Instância de Manaus e Cidades Metropolitanas para 4 hub. Fonte: Próprio autor (2025).

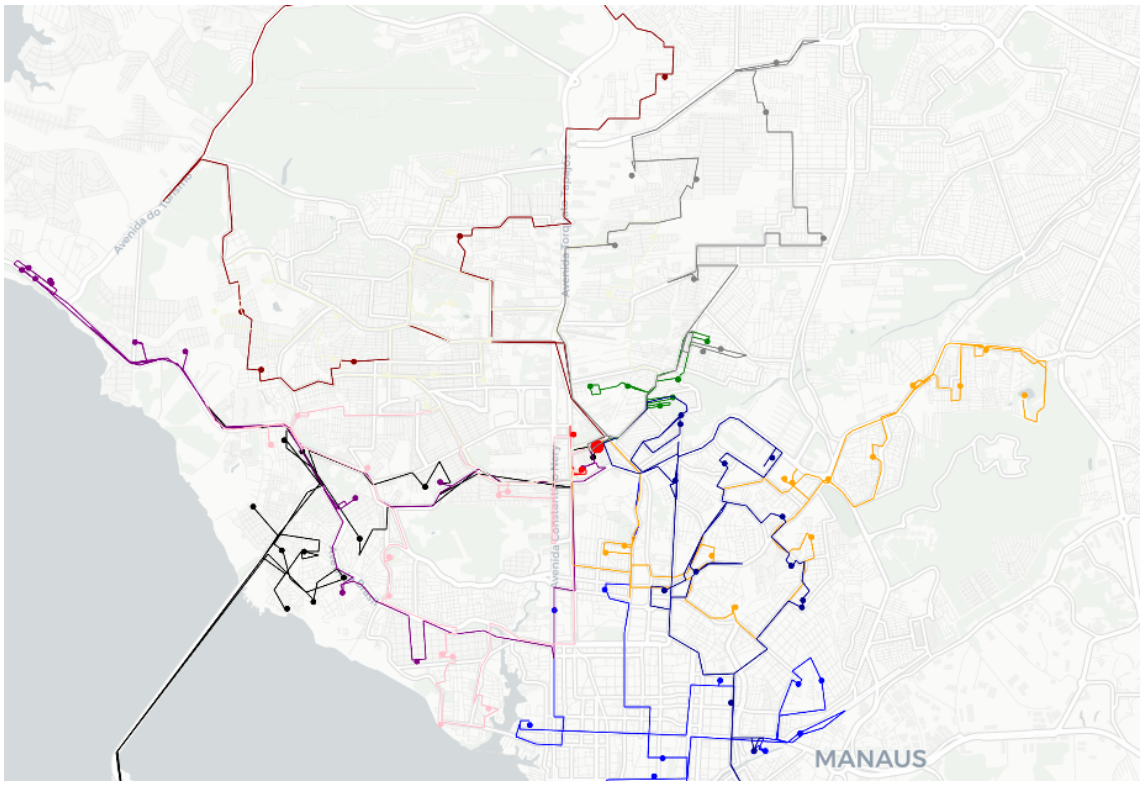


Figura 5.23: Instância: metro-4hub-0-am-12-1h-118. Fonte: Próprio autor (2025).

5.4 Publicações

Resolvendo instâncias de entregas urbanas reais com janelas de tempo baseadas no benchmark loggiBUD e aplicando um Branch-Cut-and-Price via VRPsolver

No artigo autoral *Resolvendo instâncias de entregas urbanas reais com janelas de tempo baseadas no benchmark loggiBUD e aplicando um Branch-Cut-and-Price via VRPsolver* foi proposta uma metodologia para resolver o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo (VRPTW).

Para resolver o problema foi desenvolvido um modelo de solução criado no VRP-Solver que utiliza um algoritmo de *Branch-Cut-and-Price*, onde os subproblemas são modelados como um caminho mínimo com restrição de recurso. O modelo criado no VRPSolver foi testado em 2 conjuntos de instâncias: o primeiro é o conjunto de instâncias de Solomon e o segundo é o *benchmark* de entregas urbanas (loggiBUD) proposto pela empresa Loggi.

Os resultados foram satisfatórios, o método de geração de colunas utilizado pelo VRP-Solver mostrou melhor desempenho com o problema do VRPTW quando suas janelas de tempo eram mais apertadas (ROSAS; CLEMENTINO; FREITAS, 2021).

Contribuições na logística de entrega urbana expressa de última milha usando grandes instâncias reais de cidades brasileiras

O artigo autoral *Contribuições na logística de entrega urbana expressa de última milha usando grandes instâncias reais de cidades brasileiras* apresenta o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo como forma de incorporar características de dinamicidade da cadeia logística de entregas expressas, explorando aspectos teóricos que melhor definem o problema e suas instâncias.

O trabalho utilizou o método de *Branch-Cut-and-Price* através da ferramenta VRP-solver, aplicada em dois conjuntos de instâncias: as instâncias clássicas artificiais de Solomon e instâncias reais brasileiras adaptadas do *benchmark* loggiBUD (CLEMENTINO et al., 2022).

Capítulo 6

Considerações finais

A presente dissertação dedicou-se à resolução do *VRPTW*, um desafio de otimização fundamental para a logística moderna. O estudo focou em sua aplicação em cenários complexos, com ênfase especial nas particularidades da logística urbana e de última milha. Ao longo da pesquisa, buscou-se não apenas formalizar o problema e suas complexidades, mas também posicioná-lo no contexto de operações logísticas reais, evidenciando os desafios urbanos operacionais e computacionais para o desenvolvimento das rotas.

Um dos pontos de destaque foi a ponte estabelecida entre a teoria e a prática, por meio da utilização das instâncias do *benchmark LoggiBUD* e das instâncias de Solomon. Essa abordagem permitiu validar a aplicabilidade e a eficácia das soluções em um contexto que reflete desafios reais da logística, como tempo de espera e restrições de tempo para recebimento de encomendas. Destaca-se a importância de *benchmarks* como o *LoggiBUD* reside em sua capacidade de fornecer um terreno comum para testar algoritmos em condições que transcendem as instâncias sintéticas.

Os resultados obtidos confirmaram a eficiência e a robustez do método *Branch-and-Cut-and-Price* implementado no VRPsolver na resolução do *VRPTW*. Nos experimentos com as instâncias clássicas de Solomon, o modelo reproduziu resultados de referência da literatura, assegurando a consistência e confiabilidade do *solver* 5.3.1. Já nas instâncias reais adaptadas do *benchmark* LoggiBUD e nas criadas para Manaus e algumas de suas cidades da região metropolitana, o método apresentou soluções de alta qualidade, otimizando o custo total, o número de veículos utilizados e o cumprimento das janelas de tempo 5.3.3. O desempenho do *VRPsolver* mostrou-se superior em cenários com janelas mais restritas, o que reflete sua adequação a operações urbanas de entregas expressas.

Esses resultados reforçam o potencial do modelo como uma ferramenta robusta para a otimização logística em contextos reais e complexos.

Uma contribuição significativa deste trabalho é a análise abrangente e estruturada do *VRPTW*, o que o torna uma base teórica sólida tanto para fins de ensino quanto para futuras pesquisas. Além disso, a pesquisa se destaca por conectar o problema diretamente à realidade e aos desafios da logística de última milha, um campo de estudo de crescente importância. Uma segunda contribuição é a integração das instâncias geradas a partir do estado do Amazonas ao *benchmark LoggiBUD*. Isso contribui para diversificar o banco de instâncias, pois aborda os desafios concretos de uma região com características logísticas e geográficas únicas.

Por fim, o estudo demonstra a relevância crucial de utilizar *benchmarks* baseados em dados reais para a validação de algoritmos de otimização, oferecendo uma metodologia robusta para a avaliação da aplicabilidade prática de soluções propostas.

Este trabalho é um dos resultados do *Programa de Bolsas de Pesquisa (PBP)* da empresa brasileira de cadeia logística de entregas expressas *Loggi*, obtido pelo grupo de pesquisa em *Otimização, Algoritmos e Complexidade Computacional (ALGOX)* do *IComp/UFAM*, com a contribuição do pesquisador *Eduardo Uchoa - Universidade Federal Fluminese - UFF*.

Referências

ABIACOM, A. B. d. I. A. e. E.-c. *VPrincipais Indicadores do e-Commerce no Brasil*. 2025. Disponível em: <https://dados.abcomm.org/numeros-do-ecommerce-brasileiro>. Acesso em: 15 julho 2025. Citado na página 1.

AHUJA, R. K.; MAGNANTI, T. L.; ORLIN, J. B. *Network flows: theory, algorithms and applications*. [S.l.]: Prentice hall, 1994. Citado na página 10.

ALTENRIED, M. On the last mile: logistical urbanism and the transformation of labour. *Work Organisation, Labour & Globalisation*, JSTOR, v. 13, n. 1, p. 114–129, 2019. Citado na página 21.

BALDACCI, R.; MINGOZZI, A.; ROBERTI, R. New route relaxation and pricing strategies for the vehicle routing problem. *Operations research*, INFORMS, v. 59, n. 5, p. 1269–1283, 2011. Citado na página 30.

BALDACCI, R.; MINGOZZI, A.; ROBERTI, R. Recent exact algorithms for solving the vehicle routing problem under capacity and time window constraints. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 218, n. 1, p. 1–6, 2012. Citado na página 33.

BALLOU, R. H. *Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos-: Logística Empresarial*. [S.l.]: Bookman editora, 2009. Citado na página 21.

BRAEKERS, K.; RAMAEKERS, K.; NIEUWENHUYSE, I. V. The vehicle routing problem: State of the art classification and review. *Computers & industrial engineering*, Elsevier, v. 99, p. 300–313, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 29.

CAMPBELL, J. F. Hub location and the p-hub median problem. *Operations research*, INFORMS, v. 44, n. 6, p. 923–935, 1996. Citado na página 24.

CLEMENTINO, T. et al. Contribuições na logística de entrega urbana expressa de última milha usando grandes instâncias reais de cidades brasileiras. In: *Anais do III Workshop Brasileiro de Cidades Inteligentes*. Porto Alegre, RS, Brasil: SBC, 2022. p. 1–12. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/wbci/article/view/20440>. Citado na página 74.

COOK, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. In: *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*. [S.l.: s.n.], 1971. p. 151–158. Citado na página 6.

CORMEN, T. H. et al. *Algoritmos - Teoria e Prática*. 2th. ed. [S.l.]: Editora Campus, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 29.

CORMEN, T. H. et al. *Introduction to algorithms*. [S.l.]: MIT press, 2022. Citado na página 10.

DAMIÃO, C. M.; SILVA, J. M. P.; UCHOA, E. A branch-cut-and-price algorithm for the cumulative capacitated vehicle routing problem. *4OR*, Springer, p. 1–25, 2021. Citado na página 36.

DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. The truck dispatching problem. *Management science*, Informs, v. 6, n. 1, p. 80–91, 1959. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 11.

DESROCHERS, M.; DESROSIERS, J.; SOLOMON, M. A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows. *Operations research*, Informs, v. 40, n. 2, p. 342–354, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.

EKSIOGLU, B.; VURAL, A. V.; REISMAN, A. The vehicle routing problem: A taxonomic review. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 57, n. 4, p. 1472–1483, 2009. Citado na página 12.

ERNST, A. T. et al. Uncapacitated single and multiple allocation p-hub center problems. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 36, n. 7, p. 2230–2241, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.

GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; SÉGUIN, R. Stochastic vehicle routing. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 88, n. 1, p. 3–12, 1996. Citado na página 14.

HEKMATFAR, M.; PISHVAEE, M. Hub location problem. In: *Facility location: concepts, models, algorithms and case studies*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 243–270. Citado na página 23.

KOHL, N. et al. 2-path cuts for the vehicle routing problem with time windows. *Transportation Science*, INFORMS, v. 33, n. 1, p. 101–116, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 17, 30, 32, 39 e 53.

LAPORTE, G. et al. Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem. *International transactions in operational research*, Wiley Online Library, v. 7, n. 4-5, p. 285–300, 2000. Citado na página 14.

LAPORTE, G.; NOBERT, Y. A branch and bound algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Operations-Research-Spektrum*, Springer, v. 5, n. 2, p. 77–85, 1983. Citado na página 39.

LARSEN, A.; MADSEN, O. *The dynamic vehicle routing problem*. Tese (Doutorado) — Institute of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, 2000. Citado na página 13.

LIU, X. et al. A systematic literature review of vehicle routing problems with time windows. *Sustainability*, MDPI, v. 15, n. 15, p. 12004, 2023. Citado 3 vezes nas páginas 21, 31 e 35.

LOGGI. *loggiBUD: Loggi Benchmark for Urban Deliveries*. [S.l.]: GitHub, 2021. <https://github.com/loggi/loggibud>. Citado 5 vezes nas páginas xv, 24, 45, 46 e 57.

LOGGI. Loggibud: Loggi benchmark for urban deliveries. In: . [S.l.]: GitHub, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 22, 24 e 44.

LYSGAARD, J.; LETCHFORD, A. N.; EGLESE, R. W. A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical programming*, Springer, v. 100, n. 2, p. 423–445, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.

MACAMBIRA, A. F. U. et al. Tópicos em otimização inteira. *UFRJ*, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

MDIC, G. F. *Vendas de pequenas empresas pela internet crescem 1.200% desde a pandemia, mostra painel do MDIC*. 2025. Disponível em: <https://www.gov.br/mdic/pt-br/assuntos/noticias/2025/junho/vendas-de-pequenas-empresas-pela-internet-crescem-1-200-desde-a-pandemia-mostra-painel-do-mdic>. Acesso em: 15 julho 2025. Citado na página 1.

O, E. M. T.; Z, A. H. E.; E, M. G. Literature review on the vehicle routing problem in the green transportation context. *Luna Azul*, Universidad de Caldas, n. 42, p. 362–387, 2016. Citado na página 11.

PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity*. [S.l.]: Courier Corporation, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 7, 10 e 11.

PECIN, D. et al. New enhancements for the exact solution of the vehicle routing problem with time windows. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 29, n. 3, p. 489–502, 2017. Citado na página 54.

PESSOA, A.; SADYKOV, R.; UCHOA, E. Solving bin packing problems using vrpsolver models. In: SPRINGER. *Operations Research Forum*. [S.l.], 2021. v. 2, n. 2, p. 1–25. Citado na página 36.

PESSOA, A. et al. A generic exact solver for vehicle routing and related problems. In: SPRINGER. *International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization*. [S.l.], 2019. p. 354–369. Citado na página 53.

PESSOA, A. et al. A generic exact solver for vehicle routing and related problems. *Mathematical Programming*, Springer, v. 183, n. 1, p. 483–523, 2020. Citado 6 vezes nas páginas 18, 31, 34, 36, 39 e 44.

PILLAC, V. et al. A review of dynamic vehicle routing problems. *European Journal of Operational*, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 14 e 30.

PSARAFTIS, H. N. Dynamic vehicle routing problems. *Vehicle routing: Methods and studies*, North Holland, Amsterdam, The Netherlands, v. 16, p. 223–248, 1988. Citado na página 13.

PSARAFTIS, H. N. Dynamic vehicle routing: Status and prospects. *Annals of operations research*, Springer, v. 61, n. 1, p. 143–164, 1995. Citado na página 14.

PUGLIESE, L. D. P.; GUERRIERO, F. A survey of resource constrained shortest path problems: Exact solution approaches. *Networks*, Wiley Online Library, v. 62, n. 3, p. 183–200, 2013. Citado na página 36.

REIS, K. A. L.; CHAGAS, R. S.; CARVALHO, S. M. d. O. Desafios da logística voltados para o e-commerce: um estudo sobre os problemas na entrega de mercadorias. 031, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

ROBOREDO VINíCIUS CARVALHO SOARES, P. D.-H. G. C. M. C. Um algoritmo exato para um problema de roteamento de velículos seletivo com mÚltiplos deplósitos e precificacã. *SBPO*, 2022. Citado na página 18.

ROPKE, S.; PISINGER, D. An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows. *Transportation Science*, v. 40, p. 455–472, 11 2006. Citado na página 33.

ROSAS, J.; CLEMENTINO, T.; FREITAS, R. Resolvendo instâncias de entregas urbanas reais com janelas de tempo baseadas no benchmark loggibud e aplicando um branch-cut-and-price via vrpsolver. In: *Anais do Workshop PBP-Loggi*. [s.n.], 2021. Disponível em: <https://raw.githubusercontent.com/loggi/loggibud/fillipe/add-pbploggi-docs/docs/pdfs/pbp_loggi_2021_proceedings.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 74.

SAHINIDIS, N. V. Optimization under uncertainty: state-of-the-art and opportunities. *Computers & chemical engineering*, Elsevier, v. 28, n. 6-7, p. 971–983, 2004. Citado na página 14.

SCHORPP, S. Dynamic fleet management for international truck transportation. In: SPRINGER. *Operations Research Proceedings 2011: Selected Papers of the International Conference on Operations Research (OR 2011), August 30-September 2, 2011, Zurich, Switzerland*. [S.l.], 2012. p. 593–598. Citado 3 vezes nas páginas xiv, 12 e 13.

SCHRIJVER, A. et al. *Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency*. [S.l.]: Springer, 2003. v. 24. Citado na página 7.

SIPSER, M. Introduction to the theory of computation. *ACM Sigact News*, ACM New York, NY, USA, v. 27, n. 1, p. 27–29, 1996. Citado na página 7.

SOLOMON, M. M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations research*, Informs, v. 35, n. 2, p. 254–265, 1987. Citado 8 vezes nas páginas 8, 12, 21, 25, 26, 32, 42 e 43.

SOUZA, S. P. et al. A criação da constituição da região metropolitana de manaus. *BIUS-Boletim Informativo Unimotrisaúde em Sociogerontologia*, v. 52, n. 46, p. 1–9, 2025. Citado na página 46.

TASAN, A. S.; GEN, M. A genetic algorithm based approach to vehicle routing problem with simultaneous pick-up and deliveries. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 62, n. 3, p. 755–761, 2012. Citado na página 11.

TOTH, P.; VIGO, D. *Vehicle routing: problems, methods, and applications*. [S.l.]: SIAM, 2014. Citado na página 34.

UCHOA, E. et al. New benchmark instances for the capacitated vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 257, n. 3, p. 845–858, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 34.

WANG, Y. et al. A fuzzy interval optimization approach for p-hub median problem under uncertain information. *Plos one*, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 19, n. 3, p. e0297295, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

ZHANG, C. et al. Solving hub location problems with profits using variable neighborhood search. *Transportation Research Record*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 2677, n. 1, p. 1675–1695, 2023. Citado na página 22.