



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTÔNIO FERREIRA AZEVEDO

*Modelo Dinâmicos Fréchet- Γ com aplicações a dados
Correlacionados de Múltiplos Observadores Meteorológicos*

Manaus

2025

ANTÔNIO FERREIRA AZEVEDO

*Modelo Dinâmicos Fréchet- Γ com aplicações a dados Correlacionados
de Múltiplos Observadores Meteorológicos*

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Max Sousa

Manaus

2025

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

A994m Azevedo, Antônio Ferreira
 Modelo Dinâmico Fréchet-gama com aplicações a dados
 Correlacionados de Múltiplos Observadores Meteorológicos. /
 Antônio Ferreira Azevedo. - 2025.
 81 f. : il., color. ; 31 cm.

 Orientador(a): Max Sousa de Lima.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Amazonas,
 Programa de Pós-Graduação em Matemática, Manaus, 2025.

 1. Séries Temporais. 2. Modelos Lineares Dinâmicos
 Generalizados(MLDG). 3. Modelos de Espaço de Estados(MEE). 4.
 Distribuição de Fréchet. I. Lima, Max Sousa de. II. Universidade
 Federal do Amazonas. Programa de Pós-Graduação em
 Matemática. III. Título

*Modelo Dinâmicos Fréchet- Γ com aplicações a dados Correlacionados
de Múltiplos Observadores Meteorológicos*

ANTÔNIO FERREIRA AZEVEDO

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Max Sousa de Lima
Orientador (UFAM)

Prof. Dr. José Mir Justino da Costa
Membro interno (UFAM)

Prof. Dr. Luiz Henrique Duczmal
Membro externo (UFMG)

Manaus-AM, 14 de novembro de 2025.

À Deus que nos concedeu a vida e sem ele nada existiria. Aos meus avós, Clóvis Ferreira e Maria Nilda (in memorian) por terem ajudado na minha educação e me ofertado a paciência e o amor. A minha mãe Marcília, a minha irmã Ana Cristina pela amizade, amor e carinho a mim dedicado ao longo da minha vida. A minha esposa Francisca, minha filha Carolina e aos meus filhos Sávio Roberto e Clovis Antônio por estarem sempre ao meu lado com paciência e amor e ao meu irmão Francisco Roberto (in memorian), por ter me ensinado o valor das ciências e ofertado grande amizade.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, pela sua infinita misericórdia e amor. E sem ele nada existi.

A minha família: Francisca (minha esposa) e meus filhos (Carolina e Cloves) por estarem sempre ao meu lado com paciência e amor.

Ao Prof Dr Max Sousa pela sua amizade e por ter sido o primeiro professor do departamento a ter me incentivado em realizá-las, bem como a orientação desse trabalho.

Ao Prof Dr José Raimundo por ser um grande amigo, professor de uma didática impecável e que tenho o privilégio de pertencer ao seu círculo de amizade.

Ao Prof Dr José Mir pela sua amizade, pelas suas orientações, por ter sido meu primeiro professor no departamento de Estatística.

Ao Prof Dr Celso Rômulo pela sua amizade, pelas suas orientações acadêmicas e pelos nossos diálogos políticos.

Ao Prof Dr Cardoso pela amizade e pelas suas orientações no período preparatório para o mestrado.

Ao Prof Dr James Dean por ter ofertado sua amizade e que me apresentou os modelos em séries temporais.

Aos meus amigos Naor e Josemá de mestrado pela convivência harmoniosa e pela nossas discussões acadêmicas.

Ao Prof Dr Maurício, amigo e compadre, que recebi orientações valiosas no tocante a parte Meteorológica/climatológica do trabalho.

Ao Coronel Valadares do CINDACTA IV, um grande amigo que sempre me apoiou nas pesquisas operacionais na Meteorologia.

A minha amiga Prof Suelicy pela ajuda na pesquisa dos dados

Aos Integrantes do Departamento de Estatística que contribuíram direta ou indiretamente com minha formação.

A Primeira Igreja Batista de Manaus na pessoa do Pastor Norton Lajes pelo apoio espiritual.

"Os céus contam a glória de Deus, e o firmamento proclama a obra de suas mãos. O dia entrega a mensagem a outro dia, e a noite a faz conhecer a outra noite...."

(Salmo 19)

RESUMO

Os Modelos de Espaço de Estados representam ferramentas versáteis e robustas para a modelagem e análise de séries temporais. Sua abordagem unificada permite a aplicação em uma ampla gama de modelos, sejam univariados ou multivariados, conferindo-lhes um papel central em diversas áreas do conhecimento. Uma dessas áreas é a climatologia, onde a análise de séries temporais meteorológicas se torna indispensável no atual contexto de mudanças climáticas. Compreender o comportamento de fatores climáticos, como tempestades e trovoadas, é essencial para o estudo das dinâmicas atmosféricas e suas implicações. Neste trabalho, analisa-se a série temporal dos máximos mensais de horas de trovoadas registradas pelas estações meteorológicas de superfície localizadas em Ponta Pelada (SBMN) e Eduardo Gomes (SBEG), situadas nas zonas sul e oeste de Manaus, respectivamente, e pertencentes ao Comando da Aeronáutica (COMAER). As séries analisadas compreendem o período de janeiro de 1982 a dezembro de 2024. A modelagem, análise e previsão serão realizadas utilizando a metodologia dos Modelos Lineares Dinâmicos Generalizados (MLDG), associados à distribuição de *Fréchet*, a qual pertence à família exponencial de distribuições de observações. O referencial teórico para esses modelos inclui os trabalhos de Migon (1984), Migon e Harrison (1985) e West, Harrison e Migon (1985). Para a análise preditiva, adota-se a métrica descrita por Petris, Petrone e Campagnoli (2008), especificamente no capítulo 3 de sua obra.

Palavras-chave: Séries Temporais, Modelos Lineares Dinâmicos Generalizados (MLDG), Modelos de Espaço de Estados (MEE), Distribuição de *Fréchet*.

ABSTRACT

State Space Models are versatile and powerful tools for modeling and analyzing time series. Their unified approach allows them to address a wide variety of models, whether univariate or multivariate, granting them a central role in several fields of knowledge. One such field is climatology, where the analysis of meteorological time series becomes essential in the current context of climate change. Understanding the behavior of climatic factors, such as storms and thunderstorms, is crucial for studying atmospheric dynamics and their implications. In this study, we analyze the time series of the monthly maximum hours of thunderstorms recorded by surface meteorological stations located at Ponta Pelada (SBMN) and Eduardo Gomes (SBEG), situated in the southern and western zones of Manaus, respectively, and under the management of the Brazilian Air Force (COMAER). The analyzed series spans the period from January 1982 to December 2024. The modeling, analysis, and forecasting will be conducted using the methodology of Generalized Dynamic Linear Models (GDLMs), associated with the *Fréchet* distribution, which belongs to the exponential family of observational distributions. The theoretical framework for these models is based on the works of Migon (1984), Migon and Harrison (1985), and West, Harrison, and Migon (1985). For predictive analysis, we adopt the metric described by Petris, Petrone, and Campagnoli (2008), specifically in Chapter 3 of their book. Finally, comparisons will be made between simulated values, observed data, and the predictions generated by the GDLM to assess the efficiency and accuracy of the proposed model. This study highlights the relevance of State Space Models, particularly in climatology, contributing to the understanding and forecasting of extreme climatic events in the Amazonian context.

Keywords: Time Series, Generalized Dynamic Linear Models (GDLM), State Space Models (SSM), *Fréchet* Distribution.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Imagens de trovoadas. Fonte: http://www.bing.com/2020	17
2	(a) Área da região monitorada pelo radar meteorológico, representado pelo círculo maior e áreas de observações das estações, representadas pelos círculos menores e (b) Localização das estações meteorológicas de superfície de Ponta Pelada (SBMN) na zona sul e Eduardo Gomes (SBEG) zona oeste de Manaus. Fonte: (Manaus-Wikipédia, a enciclopédia livre, 2010), adaptadas pelo autor.	18
3	Região da cidade de Manaus. Fonte: Jornal em tempo, 2019.	20
4	Cidade de Manacapuru, município que faz parte da região metropolitana de Manaus. Fonte: Jornal em tempo, 2019.	21
5	Diagrama de um modelo de espaço de estado.	26
6	Análise sequencial do processo de estimação do modelo dinâmico linear generalizado.	29
7	(à esquerda) Função de Distribuição e (à direita) Função Densidade: para densidade Fréchet para valores distintos de forma (α) e escala (λ), com localização igual a zero.	34
8	Fontes de observação meteorológica ($O_1, O_2, O_3, \dots, O_j$), localizadas em diferentes pontos de uma região sob vigilância contínua de radar, registram o mesmo processo estocástico $\{Y_t\} t \geq 1$	39
9	Área de influência e vigilância do Radar Meteorológico de Manaus. Fonte: Redemet, 2024.	48
10	(acima) (a) Localização do Bairro Crespo na Zona Sul de Manaus e (b) Localização da estação meteorológica de superfície do aeroporto Ponta Pelada (EMS-2), Lat.: 03°09'S, long.: 059°59'W e altitude: 85m. e (abaixo) (a) Localização do Bairro do Tarumã de Manaus e (b) Localização da estação meteorológica de superfície do aeroporto Eduardo Gomes (EMS-1), Lat.: 03°02'S, long.: 060°02'W e altitude: 82.1m. Fonte: Cart-Mapas, 2005, adaptadas pelo autor.	49

11	Exemplo de Formulário de observações meteorológicas diárias (IEPV-105-78 de SBEG -Eduardo Gomes) Fonte: Cindacta 4, 2013, (Arquivos do autor).	50
12	Exemplos de Formulário sumário climatológico mensal 01 para o mês de janeiro de 2010. (à esquerda) para Eduardo Gomes (SBEG) e (à direita) para Ponta Pelada (SBMN). Fonte: Cindacta 4, 2013, (Arquivos do autor)	51
13	plotagem das séries e boxplots: fonte 1=SBMN, fonte 2-SBEG e máximo(SBMN/SBEG) no espaço de tempo de 516 meses.	53
14	Histogramas das séries:fonte 1(SBMN), fonte 2(SBEG) e máximo(SBMN/SBEG) no espaço de tempo de 516 meses.	54
15	Correlações e autocorrelações entre as séries:fonte 1(SBMN), fonte 2(SBEG) e máximo(SBMN/SBEG) no espaço de tempo de 516 meses.	55
16	Decomposição aditiva da Série de Máxima duração de horas de trovoadas.	55
17	Season plot para a Série de Manaus duração de horas de trovoadas.	56
18	Gráficos das séries e retas de regressão: fonte 1[SBMN], fonte 2[SBEG] e máximo(SBMN/SBEG) no espaço de tempo de 516 dados.	57
19	Distribuição do valor de alpha obtido através do coeficiente de variação empírico.	60
20	Modelo estimado, em linha vermelha, com parâmetros (3,0.90,0.90).	61
21	Modelo estimado, em linha vermelha, com parâmetros (5,0.95,0.50).	61
22	Modelo estimado, em linha vermelha, com parâmetros (7,0.95,0.25).	61
23	Mapa de calor do rmse para alfa de 3 à 5 segundo os fatores de desconto para tendência e sazonalidade.	62
24	Mapa de calor do rmse para alfa de 6 à 8 segundo os fatores de desconto para tendência e sazonalidade.	62
25	Série de máxima duração de trovoadas observada em azul, Modelo Fréchet- $\Gamma(5,0,30,0.95)$ em vermelho, SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] em preto.	63

26	Histogramas das séries:Máximo(SBMN/SBEG), Modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] e fréchet-Gama(5.0,0.30,0.95) no espaço de tempo de 516 meses.	64
27	Séries temporais comparativas dos previsões Modelos Fréchet- Γ (5,0.30,0.95) para um espaço de tempo de jan/2025 a dez/2029(60 meses passos a frente).	64
28	Histogramas e Boxplots das séries previsões:Modelo Fréchet-Gama(5.0,0.30,0.95) no espaço de tempo de jan/2025 a dez/2029 (60 meses a frente)	65
29	plotagem das séries e boxplots: máximo(SBMN/SBEG), previsões dos Modelos SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] e FRÉCHET- Γ (5,0.30.0.95) no espaço de tempo de janeiro a outubro de 2025.	67
30	Histogramas das séries:Máximo(SBMN/SBEG), Modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] e fréchet-Gama(5.0,0.30,0.95) no espaço de tempo de janeiro a outubro de 2025.	68
31	Desvios padronizados das médias mensais de horas de trovoadas: (à esquerda) série de máximos (SBMN/SBEG) no período de jan/1982 a dez/2024; (ao centro) série do modelo Fréchet- Γ (1982–2024); (à direita) série do modelo Fréchet- Γ para o horizonte futuro (2025–2029).	71

LISTA DE TABELAS

1	Medidas da distribuição Fréchet (α, λ), com α = forma e λ = escala.	34
2	Parâmetros da distribuição Fréchet- Γ na família exponencial.	37
3	Distâncias médias em linha reta do Radar localizado em SBMN (Manaus) a localidades do município de Manaus.Fonte:br.distanciaskm.com/Manaus,2024.	48
4	Sumário descritivo da série : fonte 1=SBMN, fonte 2=SBEG e máximos (SBMN/SBEG), (n=516)	53
5	Sumário descritivo das inclinações das série simulada:fonte 1=SBMN,fonte 2=SBEG e máximo= (SBMN/SBEG) para $n = 516$	57
6	Sumário descritivo dos valores das métricas RMSE, MAD e MAPE para as séries simuladas por um Modelo Fréchet- $\Gamma(\alpha, \delta_{trend}, \delta_{season})$ comparado ao Modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12]	63
7	Sumário descritivo da série : máximos (SBMN/SBEG), Fréchet- Γ (jan/1982 a dez/2024),Fréchet- Γ (jan/2025 a dez/2029), respectivamente.	65
8	Previsões mensais para o ano de 2025(jan/out) através dos valores dos máximo(SBMN/SBEG), previsão SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] e Fréchet- $\Gamma(5,0.30,0.95)$,respectivamente.	66
9	Sumário descritivo dos valores das métricas RMSE, MAD, MAPE, BIC, CV(%) e Correlação para as séries dos Máximos(SBMN/SBEG), previsões Modelo Fréchet- $\Gamma(5,0.30,0.95)$ comparado ao Modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] para o ano de 2025 de janeiro a outubro	68
10	Valores médios mensais, desvios amostrais e IC(95%) para as séries: máximos (SBMN/SBEG) e Modelo Fréchet- $\Gamma(5,0.30,0.95)$ para os períodos de jan/1982 a dez/2024 [n=516 (43 anos)] e jan/2025 a dez/2029 [h=60 (5 anos)],respectivamente.	70

11	Sumário descritivo das inclinações da série real máximo= (SBMN/SBEG)[jan/1982 a dez/2024] e séries simuladas: Fréchet- $\Gamma(5,0.30,0.95)$ para os períodos (jan/1982 a dez/2024) e (jan/2025 a dez/2029),respectivamente.	72
----	--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CINDACTA-IVQuarto Centro Integrado de Defesa e Espaço Aéreo.

COMAER Comando da Aeronáutica.

DTCEA-EGDestacamento de Controle e Espaço Aéreo de Eduardo Gomes.

EMS1-EG Estação Meteorológica de superfície de classe 1 do aeroporto de Eduardo Gomes(indicador operacional âmbito Comaer.

EMS2-MN Estação Meteorológica de superfície classe 2 do aeroporto de Ponta Pelada(indicador operacional âmbito Comaer.

FK - Filtro de Kalman.

ITCZ - Intertropical Confluence Zone.

LQG - Linear-quadratic-Gaussian control.

LQR - Linear-quadratic regulador.

MEE - Modelos de Espaço de Estados.

MLD - Modelo Linear Dinâmico.

MLDG - Modelo Linear Dinâmico Generalizado.

RMMN - Região Metropolitana de Manuas.

OMM - Organização Meteorológica Mundial.

SBEG - Indicativo Operacional via OMM para estação meteorológica de superfície de Eduardo Gomes.

SBMN - Indicativo Operacional via OMM para estação meteorológica de superfície de Ponta Pelada.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Considerações gerais	17
1.2	Justificativa e importância do trabalho	20
1.3	Objetivos	21
1.3.1	Objetivo geral	21
1.3.2	Objetivos específicos	21
1.4	Estrutura da Dissertação	23
2	REVISÃO DA LITERATURA	24
2.1	Modelos Dinâmicos	24
2.1.1	Modelos de Espaço de Estado	24
2.1.2	Modelos Lineares Dinâmicos Generalizado (MLDG)	26
2.2	Modelo e Definições	27
2.2.1	Inferência Bayesiana	29
2.2.2	Previsão Bayesiana e avaliação de Modelo	31
2.2.3	A distribuição Fréchet	33
3	Modelo Dinâmico <i>Fréchet</i>-Γ Para Múltiplos Observadores Correlacionados	35
3.1	Construção do Modelo	35
3.1.1	Inferência Bayesiana Conjugada no Modelo	39
3.1.2	Resumindo o processo de Estimação, seleção de modelos e Previsão Modelo Fréchet- Γ	41
3.1.3	Especificando os Valores Iniciais	42

3.1.4	Métricas de Desempenho	44
3.1.4.1	Métrica de Desempenho: RMSE	44
3.1.4.2	Métrica de Desempenho: MAD	45
3.1.4.3	Métrica de Desempenho: MAPE	45
3.1.4.4	Métrica de Desempenho: BIC	46
4	APLICAÇÕES	47
4.1	Área de estudo e fontes de dados	47
4.1.1	Caracterização das Estações Meteorológicas DTCEA-MN e DTCEA-EG em Manaus	49
4.2	Dados reais	50
4.3	Séries Componentes para o Modelo.	51
4.3.0.1	Descritiva das séries	51
4.4	Correlação entre as séries, Tendência e Sazonalidade	54
4.5	Modelo Proposto e Resultados	58
4.5.1	Modelo Fréchet- Γ ($\alpha, \delta_{trend}, \delta_{season}$)	60
4.5.2	Previsão com o Modelo Fréchet- Γ escolhido	63
4.5.2.1	Validação do Modelo Fréchet- Γ através das previsões para o ano de 2025	66
4.5.3	Uma síntese de sistemas de meteorológicos (climático/temporal) que influenciam na dinâmica das trovoadas	69
4.5.3.1	Da variabilidade mensal climatológicas de horas de trovoadas	69
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	73
5.1	Conclusões	73
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	75

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações gerais

Entender padrões e tendências climáticas com base em análise estatística de séries temporais de dados meteorológicos é essencial para subsidiar a tomada de decisões estratégicas, como ações de mitigação de impactos em situações de desastres naturais. Entre estes fenômenos climáticos bem relevantes está a ocorrência e o tempo de duração de trovoadas que são eventos comuns e podem ocorrer globalmente. Esses eventos são caracterizados por um conjunto de relâmpagos e trovões frequentemente causados pela interação entre massas de ar quente e frio, resultando em chuvas intensas e ventos fortes com impacto para navegação e no Controle de Tráfego Aéreo e ocorrendo com maior frequência nas regiões próximas ao Equador (Felício, 2005). Na Figura 1, são apresentadas imagens ilustrativas de trovoadas, com relâmpagos destacados como característica marcante desses fenômenos.

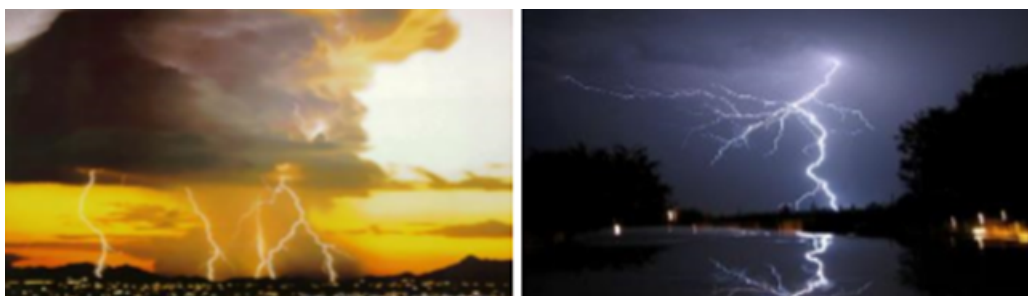


Figura 1: Imagens de trovoadas. Fonte: <http://www.bing.com/2020>.

Geralmente, em uma Estação Meteorológica de Superfície (EMS), a contagem das horas de trovoadas é feita principalmente por meio da observação visual e auditiva por um observador meteorológico bem treinado, que é preconizado em publicação do Comando da Aeronáutica para observadores meteorológicos (MCA 105-10/2010). Nessas estações não há um equipamento específico que meça a duração da trovoadas em ho-

ras, e a detecção de baseia na percepção humana. Quando os relâmpagos se dão a mais de 20 ou 30 quilômetros do observador, já não se ouve o trovão. Contudo, em algumas situações, ainda pode-se ver o clarão dos relâmpagos. Em uma região com múltiplos observadores distribuídos dentro de um mesmo raio visual ou audível, é possível termos medições do mesmo fenômeno com horas e intensidades diferentes. Na Figura 2, apresenta-se a localização das estações meteorológicas de superfície e a área monitorada pelo radar meteorológico.

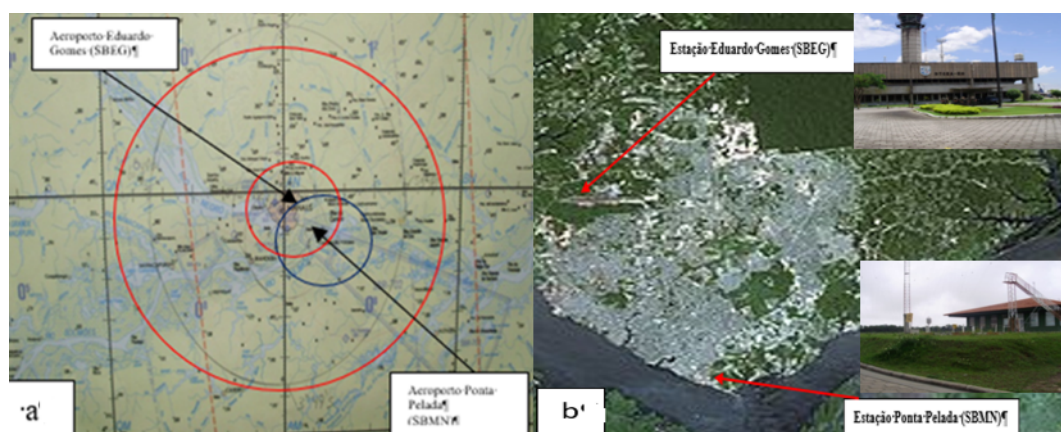


Figura 2: (a) Área da região monitorada pelo radar meteorológico, representado pelo círculo maior e áreas de observações das estações, representadas pelos círculos menores e (b) Localização das estações meteorológicas de superfície de Ponta Pelada (SBMN) na zona sul e Eduardo Gomes (SBEG) zona oeste de Manaus. Fonte: (Manaus-Wikipédia, a enciclopédia livre, 2010), adaptadas pelo autor.

Neste caso, é recomendável considerar a maior duração devido a gravidade e consequências de modo que durante um certo período de tempo, estes observadores podem gerar cópias correlacionadas das horas de trovoadas onde o máximo valor é o nosso interesse. Assim, modelos *max stable* como a distribuição *Fréchet*, onde o máximo da distribuição conjunta tem a mesma distribuição das marginais, são úteis para a modelagem deste tipo de sistema com múltiplos observadores. No mais, é conhecido a nível mundial que o comportamento destas séries tem se alterado significativamente ao longo dos anos com a intensificação dos extremos climáticos de modo que na análise detalhada desses fenômenos de trovoadas, deve-se considerar também a sua dinâmica e variabilidade temporal. Nesse contexto, os Modelos Lineares Dinâmicos Generalizados (**MLDG**) podem funcionar como ferramentas robustas, permitindo a decomposição de séries temporais em componentes como tendência, sazonalidade e efeitos regressivos. Esses modelos oferecem uma estrutura probabilística evolutiva, permitindo que os parâmetros variem ao longo do tempo o que garante a flexibilidade

e ampla aplicabilidade. Os **MLDG** têm sido amplamente adotados para o tratamento de séries temporais onde a distribuição da série resposta não é gaussiana como, por exemplo, as distribuições de Poisson, Binomial, Gama, Normal Inversa, Weibull conforme explorado em trabalhos fundamentais como os de West et al.(1985), Gaman e West(1987), Fruhwirth-Schnatter (1994), Lindsey e Lambert(1995), Gaman (1991, 1998), Chiogna e Gaetan (2002), Hemming e Shaw (2002), Godolphin, GAMERMAN et al., (2017). Uma revisão geral destes modelos foi apresentada em Triantafyllopoulos (2009) e uma extensão para o caso multivariado pode ser vista em TEVFIK e al.,(2020). Neste trabalho, devido as características do mecanismo gerador das séries, nós propomos um modelo dinâmico *Fréchet-gama* para modelar a distribuição da máxima duração mensal das horas de trovoadas observadas em duas Estações Meteorológicas de Superfície(EMS) pertencentes ao Comando da Aeronáutica (COMAER) na cidade de Manaus (Amazonas-Brasil).Utilizamos o modelo *Fréchet* multivariado reparametrizado para representar a distribuição conjunta das séries dos múltiplos observadores e tomamos o Máximo desta distribuição que é *Fréchet*. A vantagem desta abordagem é que a distribuição obtida para o Máximo conjunta a distribuição a priori Gama de modo que o algoritmo de atualização e evolução dos parâmetros descritos em West et al (1985) é facilmente implementado para ajuste e previsão no modelo.

1.2 Justificativa e importância do trabalho

A ausência de estudos recentes que investiguem o comportamento de tempestades e trovoadas na cidade de Manaus e nos municípios vizinhos, bem como a análise das variabilidades mensais desses fenômenos, evidencia a necessidade do desenvolvimento de pesquisas voltadas para essa região. Além disso, compreender a relação entre esses fenômenos meteorológicos e os sistemas de mesoescala, escala sinótica e sistemas transientes é crucial para a climatologia regional, especialmente no contexto de mudanças climáticas e aumento da frequência de eventos extremos. O impacto das tempestades sobre a Região Metropolitana de Manaus (RMMN) é evidente em episódios adversos, como os registrados em março de 2019. As Figuras 3 e 4 ilustram as consequências negativas de tempestades de verão em Manaus e no município vizinho de Manacapuru, respectivamente. Em Manaus, tempestades causaram transtornos significativos, enquanto em Manacapuru, localizado a aproximadamente 100 km da capital, fortes tempestades resultaram no afundamento de embarcações, destacando a vulnerabilidade das comunidades ribeirinhas a esses eventos extremos.



Figura 3: Região da cidade de Manaus. Fonte: Jornal em tempo, 2019.

A análise detalhada desses fenômenos, considerando sua variabilidade temporal e espacial, é de fundamental importância para o planejamento urbano, segurança da população e preservação das atividades econômicas da região. Ao propor a modelagem de tempestades e trovoadas utilizando modelos estatísticos avançados, este trabalho busca preencher lacunas existentes no conhecimento sobre a climatologia regional e oferecer subsídios para políticas públicas e estratégias de mitigação de riscos associados a fenômenos meteorológicos extremos.

Embarcações e flutuantes afundam durante tempestade em Manacapuru

Moradores tiveram suas casas destruídas pela forte chuva.

24/03/2020 14h29 • Por: Jéssyca Seixas • Fonte: Em Tempo • 78



Um forte temporal causou prejuízos no município de Manacapuru (distante 70,66 km de Manaus). O vendaval atingiu pelo menos cinco embarcações, que afundaram, e destruiu flutuantes.

Moradores revelam os estragos deixados pela tempestade. Um deles, Josimar, teve seu flutuante arruinado. Em oito anos no porto, ele afirma nunca ter presenciado um temporal tão forte.

Figura 4: Cidade de Manacapuru, município que faz parte da região metropolitana de Manaus. Fonte: Jornal em tempo, 2019.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Desenvolver um modelo dinâmico capaz de modelar a série temporal dos totais mensais de horas de um fenômeno meteorológico, utilizando duas fontes de observação que operam continuamente em uma região monitorada e controlada.

1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

1. Apresentar os fundamentos teóricos e conceituais dos modelos dinâmicos: Realizar uma revisão bibliográfica abrangente sobre a definição e estrutura dos Modelos Lineares Dinâmicos Generalizados (MLDG), bem como suas aplicações em séries temporais e as superposições de componentes desses modelos.
2. Avaliar o desempenho do modelo por meio de dados simulados: Realizar estudos utilizando dados simulados, com o objetivo de verificar a capacidade do modelo proposto de ajustar-se às séries temporais e validar sua robustez e precisão.
3. Construir um modelo dinâmico para a série temporal de totais mensais de horas de trovoadas na Região Metropolitana de Manaus: Utilizar os dados das estações meteorológicas de superfície de Ponta Pelada (SBMN) e Eduardo Gomes

(SBEG) para modelar o comportamento do fenômeno, considerando a interação entre as observações provenientes dessas duas fontes.

4. Realizar inferências meteorológicas e climáticas com base nas previsões do modelo: Explorar as previsões geradas pelo modelo, identificando tendências e padrões relevantes, como a projeção da ocorrência de trovoadas para os próximos 5 anos (jan/2025 a dez/2029), e analisar possíveis implicações meteorológicas e climáticas para a região estudada.

1.4 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está estruturada em cinco capítulos principais, conforme descrito a seguir:

- *Capítulo 1 — Introdução:* Apresenta a contextualização do problema, a relevância científica e climatológica do estudo, bem como os objetivos gerais e específicos. Também são descritos o escopo da pesquisa e a organização geral do trabalho.
- *Capítulo 2 — Fundamentação Teórica:* Revisa os principais conceitos relacionados aos Modelos Lineares Dinâmicos Generalizados (MLDG), à inferência bayesiana sequencial e às distribuições da família exponencial, com ênfase na distribuição de Fréchet.
- *Capítulo 3 — Formulação do Modelo Fréchet–Gama Dinâmico:* Apresenta a modelagem proposta, descrevendo a dedução teórica, a determinação dos momentos a priori e a posteriori, a escolha do fator de desconto e o processo de estimação dos parâmetros de forma e escala. Inclui ainda a aplicação a dados simulados para validação do método.
- *Capítulo 4 — Aplicações e Resultados:* Descreve a aplicação do modelo Fréchet–Gama aos dados reais de máximos mensais de horas de trovoadas observados em Manaus, entre 1982 e 2024. São apresentados os resultados preditivos, a comparação com o modelo SARIMA e a análise climatológica das previsões.
- *Capítulo 5 — Conclusões e Trabalhos Futuros:* Sintetiza os principais achados, destaca as contribuições metodológicas e aplicadas do estudo e propõe direções para pesquisas futuras, com base nas limitações e perspectivas identificadas.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Modelos Dinâmicos

Os modelos dinâmicos, também conhecidos como modelos de espaço de estados, são formulados para permitir alterações nos valores dos parâmetros com o passar do tempo. Tal característica torna esta classe de modelos uma classe de grande versatilidade e utilização. Os modelos dinâmicos são constituídos por dois processos: o processo dos estados não observáveis, θ_t , e o processo observacional, Y_t , em que t é um índice que indica tempo. Com a evolução do tempo, toda a informação relevante para prever o futuro é recebida e pode ser usada na revisão do modelo. Suponha que o tempo inicial seja $t = 0$ e que, D_0 , represente a informação relevante e disponível sobre o modelo até o tempo $t = 0$. Esta informação será usada pelo modelador para fazer as previsões iniciais do futuro. De forma similar, suponha que para qualquer tempo $t > 0$, a informação disponível e relevante seja denotada por, D_t . Qualquer afirmação sobre o futuro será condicionada nesta informação. Uma vez que, Y_t , foi observado no tempo t , define-se, $D_t = [Y_t, D_{t-1}]$. Cabe aqui salientar que a notação, D_t representa toda a informação disponível no tempo, t . Em sistemas fechados, ou seja, a cada tempo, t , a única informação nova que "entra" no sistema é a observação Y_t . Observa-se também que há uma evolução da informação, uma vez que conhecendo, D_t, D_{t-1} , é desnecessário, haja vista que essa quantidade já está presente em, D_t .

2.1.1 Modelos de Espaço de Estado

Uma classe bastante geral de modelos, denominados modelos de espaço de estado (MEE), foi introduzido por Kalman (1960) e Kalman e Bucy (1961). Ele consiste de uma série temporal p -dimensional $(\theta_t, t = 0, 1, 2, \dots)$, ou seja, $\theta_{0:t} = (\theta_0, \dots, \theta_t)$

e uma série temporal $\mathbf{Y}_t$, cuja observação é denotada por $\mathbf{y}_t$, para $t = 1, 2, 3, \dots$, ou melhor, $\mathbf{Y}_{0:t} = (\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_t)$. Em geral, esse modelo é caracterizado por dois princípios. O primeiro, há um processo oculto ou latente θ_t , chamado processo de estado é assumido como sendo um processo de Markov, significa que os futuros efeitos $\theta_s : s > t$ e os efeitos passados $\theta_s : s \leq t$ são condicionalmente independentes no presente, θ_t . A segunda condição é que as observações $\mathbf{Y}_t$ sejam independentes, dados os estados θ_t , isso significa que a dependência entre as observações é gerada pelos estados. Os princípios são exibidos na Figura 5. Essas condições são satisfeitas:

- (I) $(\theta_t, t = 0, 1, 2, \dots)$ é um processo de Markov, de modo que para qualquer $t \geq 1$,

$$f(\theta_t | \theta_{0:t-1}) = f(\theta_t | \theta_{t-1})$$

Isto significa que a informação sobre θ_t vinda de $(\theta_0, \dots, \theta_{t-1}) = \theta_{0:t-1}$ é exatamente a mesma informação vinda apenas de θ_{t-1} . Assim, a lei de probabilidade do processo $(\theta_t, t = 0, 1, 2, \dots)$ é especificada atribuindo a densidade inicial de θ_0 , $f(\theta_0)$, e as densidades de transição de θ_t condicionado a θ_{t-1} , $f(\theta_t | \theta_{t-1})$.

- (II) Condicional a θ_t , os $\mathbf{Y}_t$'s são independentes entre si e $\mathbf{Y}_t$ depende apenas de θ_t . Portanto, segue que para qualquer $n \geq 1$, $(\mathbf{y}_{1:t}, \dots, \mathbf{y}_{n:t}) | (\theta_{1:t}, \dots, \theta_{n:t})$ possui densidade condicional conjunta $\prod_{t=1}^n f(\mathbf{y}_t | \theta_t)$.

Como consequência das condições listadas acima, o MEE é completamente especificada pela:

- (1) distribuição inicial a priori dos estados $f(\theta_0)$;
- (2) densidade condicional da evolução dos estados $f(\theta_t | \theta_{t-1})$;
- (3) densidade condicional $f(\mathbf{y}_t | \theta_t)$, de forma que a distribuição conjunta das observações e dos estados, para qualquer $t \geq 1$, seja dada por,

$$f(\theta_{0:t}, \mathbf{y}_{1:t}) = f(\theta_0) \prod_{j=1}^t f(\theta_j | \theta_{j-1}) f(\mathbf{y}_j | \theta_j) \quad (2.1)$$

Em geral, assume-se que θ especifica completamente $\mathbf{y}_i$ fazendo com que $\mathbf{y}_i$ e $\mathbf{y}_j$ sejam independentes para $i \neq j$ quando condicionados ao vetor θ . A vantagem dos MEE's é que qualquer modelo linear de séries temporais pode ser expresso na forma

de estados, relacionando as observações $\mathbf{Y}_t$ a erros $\mathbf{v}_t$ através do processo de Markov θ_t denominado vetor de estados latentes do sistema. Assim, a estimação e predição dos estados latentes no tempo t podem ser feitas recursivamente, baseado no conjunto de informações disponíveis no instante t . Em geral, quando trabalhamos com séries temporais ($\mathbf{Y}_t, t = 1, 2, \dots$), o MEE pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{Y}_t = h_t(\theta_t, \mathbf{v}_t) \quad (2.2)$$

$$\theta_t = g_t(\theta_{t-1}, \mathbf{w}_t) \quad (2.3)$$

onde h_t e g_t são funções reais, $\mathbf{v}_t$ e $\mathbf{w}_t$ são erros dos processos que assumimos independentes entre e dentre si.

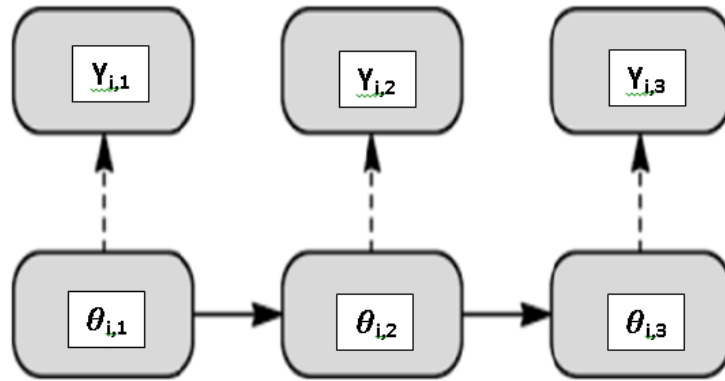


Figura 5: Diagrama de um modelo de espaço de estado.

2.1.2 Modelos Lineares Dinâmicos Generalizado (MLDG)

Esse tipo de modelagem preserva as mesmas características dos Modelos Lineares Dinâmicos (MLD). Entretanto, os dados são supostamente provenientes de uma distribuição pertencente a família exponencial. Portanto, pode-se afirmar que os MLD formam um caso particular dos MLDG, tendo em vista que a normal também faz parte da família exponencial. Ainda que a distribuição dos dados não siga o modelo normal, em alguns casos faz-se a opção pela transformação dos dados para chegar a essa condição. Um exemplo para esse caso seria o modelo Gama, no qual a transformação para

a normal pode ser bem útil, observando os ajustes necessários para a interpretação dos parâmetros fora de sua escala original. Optando-se pela transformação dos dados para a distribuição normal. Deve-se ter o cuidado ao trabalhar com transformações, pois nem sempre encontramos valores consistentes quando os parâmetros retornam as suas escalas originais. Quando se dispõe de observações discretas, transformações geralmente não são apropriadas e também nesses casos a teoria dos MLDG é bem-vinda. Vale ressaltar que é sempre recomendável trabalhar com a escala original dos dados, pois torna a apresentação do modelo mais clara e a interpretação dos resultados fica facilitada. A grande maioria das distribuições conhecidas, tanto discretas quanto contínuas, atendem a uma série de propriedades que as tornam membros de uma grande família de distribuições, conhecida como família exponencial. Essa característica faz com que o uso dessas distribuições seja permitido no conceito de Modelos Dinâmicos.

2.2 Modelo e Definições

Suponha que a série temporal Y_t seja gerada a partir de uma distribuição de probabilidade que pertence a família exponencial de distribuição, ou seja:

$$p(y_t|\gamma_t) = \exp \left\{ \frac{1}{a\phi_t} [z(y_t)\gamma_t - b(\gamma_t)] \right\} c(y_t, \phi_t) \quad (2.4)$$

onde γ_t conhecido como parâmetro natural, é o parâmetro de interesse. Outros parâmetros relacionados a ϕ_t , $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot, \cdot)$ são geralmente chamados de parâmetros de distúrbios ou hiperparâmetros. As funções $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot, \cdot)$ são assumidas como conhecidas com $a\phi_t > 0$, $c(y_t, \phi_t) > 0$. Além disso, $b(\gamma_t)$ é duas vezes diferenciável. Segundo Dobson (2002).

$$E[z(y_t|\gamma_t)] = \frac{db(\gamma_t)}{d\gamma_t} \quad (2.5)$$

$$Var[z(y_t|\gamma_t)] = a(\phi_t) \cdot \frac{d^2b(\gamma_t)}{d\gamma_t^2} \quad (2.6)$$

A função $z(\cdot)$ geralmente é uma função simples de y_t , sendo frequentemente a

função identidade. Uma exceção é a distribuição binomial. Se $z(y_t) = y_t$, a distribuição (2.4) está na forma canônica ou padrão. Dobson (2002) fornece expressões para as estatísticas de escore e a matriz de informação, embora isso não seja essencial para a inferência Bayesiana. A ideia dos modelos lineares generalizados (DGLM's) é usar uma função não linear $g(\cdot)$ para mapear $u_t = E(y_t|\gamma_t)$ no preditor linear η_t , essa função é conhecida de função de ligação. Se $g(u_t) = \gamma_t$, isso é denominado ligação canônica, mas outras funções de ligação podem ser úteis em aplicações. Na teoria de GLM's, η_t é modelado como um modelo linear, enquanto na teoria dos DGLM's, o preditor linear é substituído por um modelo de espaço de estados, ou seja:

(I) equação de observação

$$g(u_t) = \eta_t = F_t' \theta_t \quad (2.7)$$

(II) Equação de estado

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t. \quad w_t \sim (0, W_t) \quad (2.8)$$

(III) Informação inicial

$$\theta_0 | D_0 \sim (m_0, C_0) \quad (2.9)$$

onde,

- F_t é um vetor de regressão ($d \times 1$);
- G_t é uma matriz de evolução ($d \times d$);
- θ_t é um vetor aleatório de estado ($d \times 1$);
- w_t é um vetor n – dimensional de erros de evolução, onde $w_t \sim (0, W_t)$ e
- $\eta_t = F_t' \theta_t$ é uma função linear dos parâmetros.

Assume-se que W_t é não correlacionado com W_s para $t \neq s$ e com θ_0 , para todo t . Se definirmos $G_t = I_d$ a matriz identidade ($d \times d$) e $w_t = 0$ (ou seja, a matriz de covariância de w_t é a matriz nula, então o modelo descrito acima é reduzido a um GLM usual.

2.2.1 Inferência Bayesiana

Suponha que temos os dados $y_1, \dots, y_T$ e formamos o conjunto de informações $y_t = y_1, \dots, y_T$, para $t = 1, \dots, T$. No tempo $t-1$, assumimos que o vetor de médias a posteriori e a matriz de covariância de θ_{t-1} são m_{t-1} e P_{t-1} , respectivamente, e escrevemos:

$$\theta_{t-1}|y_{t-1} \sim (m_{t-1}, P_{t-1}) \quad (2.10)$$

Então, a partir de $\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t$, segue que:

$$\theta_t|y_{t-1} \sim (h_t, R_t) \quad (2.11)$$

onde: $h_t = G_t m_{t-1}$ e $R_t = G_t P_{t-1} G_t' + w_t$.

O próximo passo é formar a média e a variância a priori de η_t e θ_t , ou seja.

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \theta_t \end{pmatrix} | y_{t-1} \sim \left(\begin{bmatrix} f_t \\ h_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_t & F_t' R_t \\ R_t F_t & R_t \end{bmatrix} \right)$$

onde $f_t = F_t' h_t$ e $q_t = F_t' R_t F_t$

As quantidades f_t e q_t são a média e a variância de previsão de η_t .

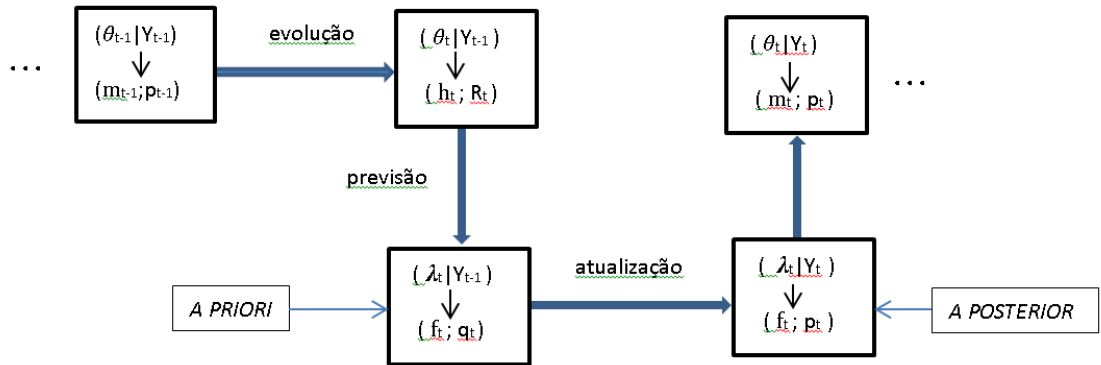


Figura 6: Análise sequencial do processo de estimação do modelo dinâmico linear generalizado.

Para proceder com a inferência bayesiana (Figura 6), assumimos a priori conjugado de γ_t , de forma que:

$$p(\gamma_t|y_{t-1}) = k(r_t, s_t) \exp(r_t \cdot \gamma_t - s_t \cdot b(\gamma_t)) \quad (2.12)$$

para alguns r_t e s_t conhecidos. Esses parâmetros podem ser encontrados a partir de :

$$g(u_t) = \gamma_t$$

$$f_t = E(\eta_t|y_{t-1})$$

e

$$q_t = \text{Var}(\eta_t|y_{t-1})$$

que já são conhecidos. A constante $k(., .)$ pode ser obtido por :

$$k(r_t, s_t) = \left\{ \int \exp(r_t \cdot \gamma_t - s_t \cdot b(\gamma_t)) d\gamma_t \right\}^{-1} \quad (2.13)$$

onde a integral é uma integral de Lesbesgue, que inclui a soma/integração de variáveis discretas/contínuas. Observamos que, na maioria dos casos, a distribuição acima será reconhecível (por exemplo, gama, beta, normal), de modo que há necessidade de avaliar explicitamente a integral. Um exemplo onde isso não ocorre é a distribuição inversa gaussiana. Após observar y_t , a distribuição a posteriori de γ_t é:

$$p(\gamma_t|y_t) = \frac{p(y_t|\gamma_t)p(\gamma_t|y_{t-1})}{\int p(y_t|\gamma_t)p(\gamma_t|y_{t-1})d\gamma_t} \quad (2.14)$$

então,

$$p(\gamma_t|y_t) = k\left(r_t + \frac{z(y_t)}{a(\phi_t)}, s_t + \frac{1}{a(\phi_t)}\right) \exp\left[\left(r_t + \frac{z(y_t)}{a(\phi_t)}\right)\gamma_t - \left(s_t + \frac{1}{a(\phi_t)}\right)b(\gamma_t)\right] \quad (2.15)$$

Em muitas situações, estamos interessados em parâmetros que são funções de γ_t . Nesses casos, derivamos as distribuições a priori e a posteriori de γ_t como acima e, em

seguida, aplicamos uma transformação para obter a distribuição a priori/posteriori do parâmetro de interesse. Por fim, o vetor de médias e a matriz de covariância a posteriori de θ_t são aproximadamente dados por:

$$\theta_t|y_t \sim (m_t, P_t) \quad (2.16)$$

com,

$$m_t = h_t + R_t F_t (f_t^* - f_t) / q_t$$

$$P_t = R_t - R_t F_t F_t' R_t \frac{(1 - q_t^* / q_t)}{q_t}$$

onde: $f_t^* = E(\eta_t|y_t)$ e $q_t^* = Var(\eta_t|y_t)$ podem ser encontrados a partir de $g(u_t) = \eta_t$ e da posteriori (2.16). Então as prioris respectivas fornecem um algoritmo de estimação para qualquer $t = 1, \dots, T$. Para uma demonstração deste algoritmo, consulte West e al (1985).

2.2.2 Previsão Bayesiana e avaliação de Modelo

Suponha que a série temporal y_t seja gerada pela densidade (2.4) e que y_t seja o conjunto de informações até o tempo t . Então, a distribuição de previsão l-pasos à frente de y_{t+l} é dada por:

$$p(y_{t+l}|y_t) = \int p(y_{t+l}|\gamma_{t+l})p(\gamma_{t+l}|y_t)d\gamma_{t+l}$$

onde,

$$p(y_{t+l}|y_t) = \frac{r_t(l, s_t(l))c(y_{t+l}, \phi_{t+l})}{k \left\{ (r_t(l) + \frac{z(y_{t+l})}{a(\phi_{t+1})}, s_t(l) + \frac{1}{a(\phi_{t+1})}) \right\}} \quad (2.17)$$

onde $r_t(l)$ e $s_t(l)$ são avaliados a partir de $f_t(l)$ e $q_t(l)$, que representam a média e a variância de $\eta_{t+l}|y_t$ e a distribuição de $\gamma_{t+l}|y_t$, que tem uma forma semelhante à distribuição de $\gamma_t|y_{t-1}$. A avaliação de modelo pode ser feita via a função de verossimi-

lhança, análise de resíduos e comparação Bayesiana de modelos, como, por exemplo, com base em fatores de Bayes. A função de verossimilhança de $\gamma_1, \dots, \gamma_T$, baseada nas informações y_T é:

$$L(\gamma_1, \dots, \gamma_T; y_T) = \prod_{t=1}^T p(y_t | \gamma_t) p(\gamma_t | \gamma_{t-1}) \quad (2.18)$$

onde a primeira probabilidade no produto é a densidade (2.1) e a segunda indica a evolução de γ_t dado γ_{t-1} . A função log-verossimilhança é então:

$$l(\gamma_1, \dots, \gamma_T; y_T) = \sum_{t=1}^T \left\{ \frac{1}{a\phi_t} [z(y_t)\gamma_t - b(\gamma_t)] + \log c(y_t, \phi_t) \right\} + \sum_{t=1}^T \log c(\gamma_t | \gamma_{t-1}) \quad (2.19)$$

A função de verossimilhança pode ser usada como critério de comparação de modelos (por exemplo, ao comparar duas especificações de modelos que diferem em alguns aspectos quantitativos, escolhe-se o modelo que apresenta maior verossimilhança). Para a avaliação de modelo, a função de verossimilhança pode ser usada para escolher alguns hiper-parâmetros (fatores de desconto ou parâmetros de ruídos), de modo que a função de verossimilhança seja maximizado em relação a esses hiper-parâmetros. A avaliação de (2.17) exige a distribuição $p(\gamma_t | \gamma_{t-1})$, que depende do modelo de espaço de estados usado para η_t . Observe que considerar W_t como uma variável com distribuição Gaussiana não implica que $\theta_t | y_t$ siga uma distribuição Gaussiana, já que a distribuição de θ_0 pode não ser Gaussiana. Para o cálculo sequencial dos fatores de Bayes (discutidos para respostas Gaussianas em Salvador e Gargallo, 2005), uma configuração típica sugere a formação de dois modelos $M1$ e $M2$, que diferem em alguns aspectos quantitativos, como hiperparâmetros. O fator de Bayes acumulado de $M1$ contra $M2$ é definido por:

$$H_t(k) = \frac{p(y_t, \dots, y_{t-k+1} | y_{t-k}, M1)}{p(y_t, \dots, y_{t-k+1} | y_{t-k}, M2)} = H_{t-1}(k_1) H_t(1) = \prod_{i=t-k+1}^t H_i(1) \quad (2.20)$$

onde $H_1(1) = H_t(0) = 1$, para todo t , e $p(y_t, \dots, Y_{t-k+1} | y_{t-k}, M_j)$ denota a distribuição conjunta de $y_t, \dots, y_{t-k+1}$, dado y_{t-k} , para algum inteiro $0 < k < t$ e $j = 1, 2$. A preferência pelo modelo $M1$ implica uma maior distribuição de previsão deste modelo(ou

$H_i(k) > 1$); da mesma forma, a preferência pelo modelo $M2$ implica $H_i(k) < 1$; e $H_i(k) = 1$. Indica que os dois modelos são probabilisticamente equivalentes, no sentido de fornecerem as mesmas distribuições de previsão.

2.2.3 A distribuição Fréchet

Dizemos que uma variável Y tem distribuição Fréchet se sua função de distribuição é dada:

$$F(y; \alpha, \lambda) = \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{y}\right)^\alpha\right], \quad y > 0,$$

e denotamos por $Y \sim F_r(\alpha, \lambda)$ com $y > 0$ em que α e $\lambda > 0$ são, respectivamente, parâmetros de forma e escala. A partir da expressão acima, obtém-se a função densidade de probabilidade da distribuição Fréchet dada por:

$$f(y; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda^\alpha y^{-(\alpha+1)} \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{y}\right)^\alpha\right], \quad y > 0.$$

Essa distribuição tem sido utilizada com grande frequência em estudos de fenômenos ambientais principalmente para modelagem de máximos de um conjunto de variáveis (máxima precipitação, máxima temperatura, etc...). Kotz e Nadarajah (2000) demonstram a aplicabilidade da distribuição Fréchet em várias áreas. O valor esperado $E(Y)$ e a variância $Var(Y)$ e outros valores descritivos da distribuição estão descritos na Tabela 1. Uma propriedade muito útil da distribuição Fréchet que será explorada nesse trabalho é a seguinte: suponha que $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes distribuídas $F(\alpha, \lambda)$. Então, $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim F_r(\alpha, \lambda^{1/\alpha})$. Isto é, o máximo pertence a mesma classe das distribuições individuais mudando apenas a escala do parâmetro.

A Figura 7, ilustra o comportamento da densidade de probabilidade da distribuição Fréchet para diferentes valores de forma (α) e escala (λ), com parâmetro de localização igual a zero. E a Tabela 1 descreve as principais medidas descritivas da distribuição.

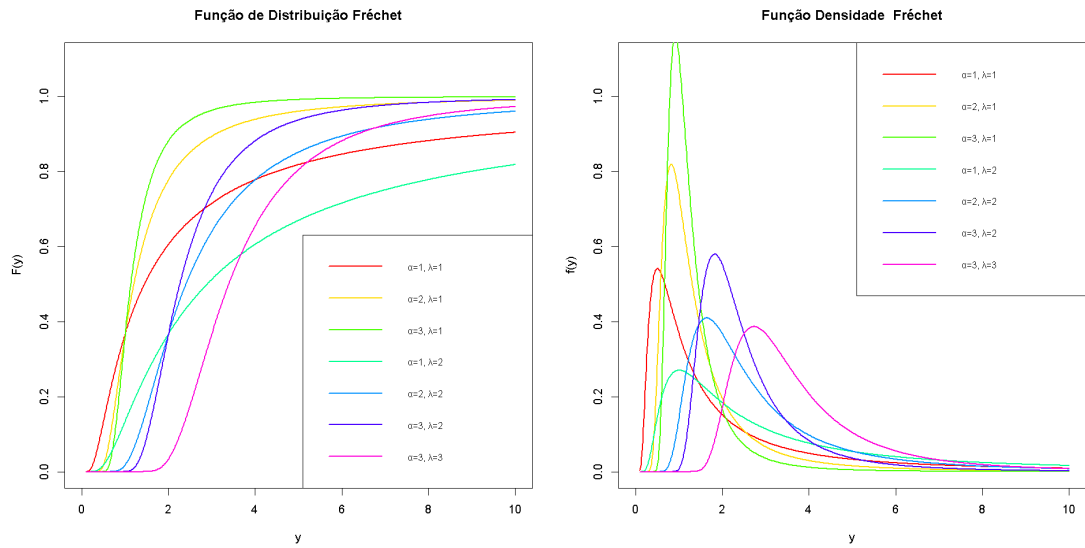


Figura 7: (à esquerda) Função de Distribuição e (à direita) Função Densidade: para densidade Fréchet para valores distintos de forma (α) e escala (λ), com localização igual a zero.

Tabela 1: Medidas da distribuição Fréchet (α, λ), com α = forma e λ = escala.

Medida	Expressão
Média (μ)	$\mu = \lambda \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha > 1$
Mediana (Med)	$\text{Med} = \frac{\lambda}{(\ln 2)^{1/\alpha}}$
Variância (Var)	$\text{Var}(X) = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right], \quad \alpha > 2$
Desvio padrão (σ_X)	$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$
Assimetria (γ_1)	$\gamma_1 = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{3}{\alpha}\right) - 3 \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + 2 \Gamma^3\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right]^{3/2}}, \quad \alpha > 3$
Curtose (γ_2)	$\gamma_2 = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{4}{\alpha}\right) - 4 \Gamma\left(1 - \frac{3}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + 6 \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) - 3 \Gamma^4\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right]^2}, \quad \alpha > 4$
Moda	$\text{Mo} = \frac{\lambda}{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{1/\alpha}}$

Observações:

- $\Gamma(\cdot)$ é a função gama.
- Se $\alpha \leq 1$, a média é infinita; se $\alpha \leq 2$, a variância é infinita.
- A assimetria requer $\alpha > 3$ e a curtose requer $\alpha > 4$.
- A função gama pode ser escrita explicitamente como:

$$\Gamma\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) = \int_0^\infty t^{-r/\alpha} e^{-t} dt.$$

3 MODELO DINÂMICO *FRÉCHET*-Γ PARA MÚLTIPLOS OBSERVADORES CORRELACIONADOS

Esta seção tem como objetivo desenvolver um modelo dinâmico para valores dinâmicos para valores extremos capaz de representar os fenômenos simultâneos registrados por duas ou mais fontes que registram dados meteorológicos de superfícies em uma mesma região. Primeiramente, nós apresentamos o desenvolvimento conceitual do modelo e depois aplicamos sobre ele a estrutura dinâmica descrita em West et al (1985). Também consideramos que a qualquer tempo $t > 0$, a informação disponível é $\mathbf{D}_t = [\mathbf{Y}_t, \mathbf{D}_{t-1}]$ com informação inicial $\mathbf{D}_0$.

3.1 Construção do Modelo

Definição 1. *Suponha que $O_1, O_2, \dots, O_J$ sejam J observadores de um mesmo processo produzindo, para $t \geq 1$, as séries temporais:*

$$\{(O_{1,1}, O_{2,1}, \dots, O_{n,1}), \dots, (O_{1,j}, O_{2,j}, \dots, O_{n,j})\}.$$

Considere que os observadores são bem treinados e, por isso, forneçam observações suavemente homogêneas tais que a distribuição conjunta de $O_t = (O_{t,1}, O_{t,2}, \dots, O_{t,j})$ é dada por:

$$P(\mathbf{O}_t \leq \mathbf{o}_t \mid \lambda_t, \alpha) = \exp\left(-\sum_{j=1}^J \lambda_t^{1/\alpha} o_{t,j}^{-1}\right)^\alpha, \quad o_{t,j} > 0.$$

representado uma distribuição Fréchet multivariada de modo que cada distribuição marginal é :

$$O_{t,j} \sim \text{Fréchet}(\alpha, \lambda_t^{1/\alpha}).$$

com função de distribuição condicional:

$$\begin{aligned} F_{O_{t,j}}(o_{t,j} \mid \lambda_t, \alpha) &= P(O_{t,j} \leq o_{t,j} \mid \lambda_t, \alpha) \\ &= \exp(-\lambda_t o_{t,j}^{-\alpha}), \quad o_{t,j} > 0. \end{aligned}$$

onde:

- $\alpha > 0$: parâmetro de forma e assumido ser conhecido no tempo t ; e
- $\lambda_t > 0$: é o parâmetro de escala.

Especificamente, em nosso trabalho, o processo em observação são trovoadas que ocorrem mensalmente na cidade de Manaus (Amazonas/Brasil), $O_{t,j}$, $j = 1, 2, \dots, J$, $t \geq 1$ representam a duração em horas destas trovoadas no mês t anotadas pelo j -ésimo Observador.

Considere que o interesse é modelar estatisticamente o valor máximo da série conjunta no mês t . Então, $Y_t = \text{Max}_j O_{t,j}$, $j = 1, 2, \dots, J$ com α conhecido, possui função de distribuição acumulada:

$$F_{(y_t \mid \lambda_t)} = \exp[-J^\alpha \lambda_t y_t^{-\alpha}] = e^{-J^\alpha \lambda_t y_t^{-\alpha}}.$$

com densidade:

$$\begin{aligned} p(y_t \mid \lambda_t) &= J^\alpha \alpha \lambda_t y_t^{-(\alpha+1)} e^{-J^\alpha \lambda_t y_t^{-\alpha}} \\ &= J^\alpha \alpha y_t^{-(\alpha+1)} \exp\{-J^\alpha \lambda_t y_t^{-\alpha} + \log \lambda_t\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{a\phi_t} [z(y_t)\vartheta_t - b(\vartheta_t)]\right\} c(y_t, \phi_t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

que pertence a família exponencial com os seguintes parâmetros (resumidos na

Tabela 2):

Tabela 2: Parâmetros da distribuição Fréchet- Γ na família exponencial.

n^o	Parâmetro	Quantificação
1	Forma	$\alpha > 0$
2	Escala	$\lambda_t > 0$
3	Localização	$m = 0$
4	ϕ_t	1
5	$a(\phi_t)$	1
6	(ϑ_t)	$-\lambda_t$
7	$b(\vartheta_t)$	$\log(-\vartheta)$
8	$c(y_t, \phi_t)$	$J^\alpha \alpha y_t^{-(\alpha+1)}$
9	$\mu_t = E[z(y_t) \lambda_t]$	λ_t^{-1}
10	$Var[z(y_t) \lambda_t, \alpha]$	λ_t^{-2}
11	$E[y_t \lambda_t]$	$J\lambda_t^{1/\alpha}\gamma_1$
12	$C_v[y_t \alpha]$	$\sqrt{(\gamma_2 - \gamma_1^2)/\gamma_1^2}$
13	γ_k	$\Gamma(1 - k/\alpha)$

Observe que também, pode-se verificar que das expressões 11, 12 e 13 que

$$E[y_t|\lambda_t] = J\lambda_t^{1/\alpha}\gamma_1$$

com coeficiente de variação que depende apenas de α dado por

$$C_v[y_t|\alpha] = \sqrt{(\gamma_2 - \gamma_1^2)/\gamma_1^2}$$

, onde

$$\gamma_k = \Gamma(1 - k/\alpha)$$

onde $k = 1, 2, \dots, t - 1$.

De modo que o Modelo Dinâmico Fréchet- Γ para o valor máximo mensal Y_t das horas de trovoadas O_t é definida pelos seguintes componentes:

- **C1:** Equação do máximo das observações: $p(y_t|\lambda_t)$ com

$$\eta_t = -\log(\mu_t) = \log(\lambda_t) = F_t'\theta_t$$

onde F_t é um vetor $dx1$ de regressores e θ_t é um vetor aleatório $dx1$.

- **C2:** Equação de evolução:

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t$$

em que G_t é uma matriz de evolução dxd , e w_t vetor de erros de evolução com média zero e matriz de covariância conhecida Ω_t .

- **C3:** Distribuição condicional especificada para θ_t através dos seus momentos no tempo $t - 1$ é $(\theta_{t-1}|D_{t-1}) \sim [m_{t-1}, P_{t-1}]$. Assim, teremos a distribuição conjunta de (η_t, θ_t) .

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \theta_t \end{pmatrix} | D_{t-1} \sim \left(\begin{bmatrix} f_t \\ h_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_t & F'_t R_t \\ R_t F_t & R_t \end{bmatrix} \right) \quad (3.2)$$

onde,

1. $E(\theta_t|D_{t-1}) = h_t = G_t m_{t-1}$
2. $Var(\theta_t|D_{t-1}) = R_t$
3. $R_t = G_t P_{t-1} G'_t + \Omega_t$
4. $E(\eta_t|D_{t-1}) = f_t = F'_t h_t$
5. $Var(\eta_t|D_{t-1}) = q_t = F'_t R_t F_t$

A Figura 8 ilustra as fontes de observações meteorológicas de superfície independentes em uma área sob vigilância de radar meteorológico, operando continuamente.

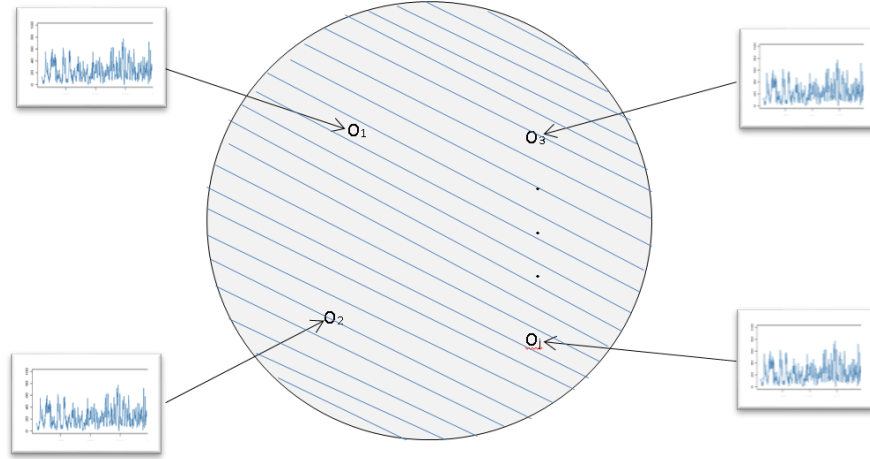


Figura 8: Fontes de observação meteorológica ($O_1, O_2, O_3, \dots, O_j$), localizadas em diferentes pontos de uma região sob vigilância contínua de radar, registram o mesmo processo estocástico $\{Y_t\}_{t \geq 1}$.

3.1.1 Inferência Bayesiana Conjugada no Modelo

Considerando o esquema de análise conjugada e o método linear Bayes (Triantafyllopoulos, 2009). Pela expressão (3.1), a distribuição a priori conjugada de $\lambda_t|D_{t-1}$ é $Gama(s_t, r_t)$, isto é,

$$p(\lambda_t|D_{t-1}) = \frac{r_t^{s_t}}{\Gamma(s_t)} \lambda_t^{s_t-1} e^{-r_t \lambda_t}, \quad r_t > 0, \quad s_t > 0. \quad (3.3)$$

e combinando com a expressão (3.1), após observar y_t , obtemos que a posteriori de $\lambda_t|D_t$ é $Gama(s_t + 1, r_t + J^\alpha y_t^{-\alpha})$. Observe que $\eta_t = \log(\lambda_t)$. Então, $\eta_t|D_{t-1} \sim \text{Log-Gama}(s_t, r_t)$. Assim, seja $\psi(u) \approx \log u$ a função digama aproximada e $\psi_1(u) \approx u^{-1}$ a função trigama aproximadamente, teremos em função do par (s_t, r_t) que a esperança de distribuição a priori para $\eta_t|D_{t-1}$ é $f_t = E(\eta_t|D_{t-1}) = \psi(s_t) - \log r_t \approx \log[s_t/r_t]$. Concluimos então que podemos escrever, $s_t = 1/q_t$ e $r_t = e^{-f_t}/q_t$. Por analogia, temos que $\eta_t|D_t \sim \text{Log-Gama}(s_t^*, r_t^*)$ onde $s_t^* = s_t + 1$ e $r_t^* = r_t + J^\alpha y_t^{-\alpha}$, de modo que a esperança e variância da distribuição a posteriori de η_t são respectivamente, $f_t^* = E(\eta_t|D_t) = \psi(s_t^*) - \log(r_t^*)$ e $q_t^* = \text{Var}(\eta_t|D_t) = \psi_1(s_t^*)$. Com estes valores para (r_t, s_t) e (f_t^*, q_t^*) , a distribuição conjunta da priori no tempo $(t-1)$ em (3.2) é atualizada e, usando o método linear Bayes, teremos no tempo t a distribuição a posteriori aproximada de $\theta_t|D_t \sim (m_t, P_t)$ onde $m_t = h_t + R_t F_t (f_t^* - f_t)/q_t$ e $P_t = R_t - R_t F_t F_t' R_t (1 - q_t^*/q_t)/q_t$. Esta distribuição a posteriori aproximada atinge a otimalidade linear de Bayes (Golds-

tein and Wooff, 2007) no sentido que P_t é o risco mínimo a posteriori sobre todos os estimadores $E(\theta_t|D_t)$ que funções lineares em y_t , com média posterior ótima sendo igual a m_t . Observando que as distribuições $\lambda_t|D_{t-1}$ e $\lambda_t|D_t$ tem a mesma forma funcional que conjuga com equação observacional do máximo em (3.1) temos que a distribuição de previsão um passo a frente é,

$$p(y_t | D_{t-1}) = \int p(y_t | \lambda_t) p(\lambda_t | D_{t-1}) d\lambda_t = \frac{\alpha s_t}{y_t} \left(\frac{J^\alpha y_t^{-\alpha}}{r_t + J^\alpha y_t^{-\alpha}} \right) \left(\frac{r_t}{r_t + J^\alpha y_t^{-\alpha}} \right)^{s_t}. \quad (3.4)$$

De modo que $(Y_t|D_{t-1} \sim \text{Dagum}(\alpha, Jr_t^{-1/\alpha}, s_t)$ veja (Kleiber, 2008), Seja $D_t = D_t(0)$ e para um valor l inteiro não negativo, defina $D_t(l) = \{D_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+l}\}$. Então, a distribuição da previsão l-passos a frente é:

$$p(y_{t+l} | D_t) = \int p(y_{t+l} | \lambda_{t+l}, \alpha) p(\lambda_{t+l} | D_t) d\lambda_{t+l}$$

,

ou seja,

$$p(y_{t+l} | D_t) = \frac{\alpha s_t(l)}{y_{t+l}} \left(\frac{J^\alpha y_{t+l}^{-\alpha}}{r_t(l) + J^\alpha y_{t+l}^{-\alpha}} \right) \left(\frac{r_t(l)}{r_t(l) + J^\alpha y_{t+l}^{-\alpha}} \right)^{s_t(l)}. \quad (3.5)$$

Que possui distribuição $\text{Dagum}(\alpha, Jr_t(l)^{-1/\alpha}, s_t(l))$ onde $r_t(l)$ e $s_t(l)$ são obtidos a partir de $f_t(l)$ e $q_t(l)$, que representam a média e a variância de $\eta_{t+l}|D_t$ e a distribuição de $\lambda_{t+l}|D_t$, que tem uma forma semelhante à distribuição de $\lambda_t|D_{t-1}$ (veja West et al, 1985). Assim, para $\alpha > 2$, o valor esperado e variância da previsão podem ser especificados diretamente através da distribuição de $y_{t+l}|D_t$ dada em (3.5), onde pode-se mostrar que:

$$E[y_t(l)] = J\gamma_1 \frac{[r_t(l)]^{-1/\alpha} \Gamma(s_t(l) + 1/\alpha)}{\Gamma(s_t(l))} \quad (3.6)$$

e

$$\text{Var}[y_t(l)] = J^2[r_t(l)]^{-2/\alpha} \left\{ \left(\frac{\gamma_2 \Gamma(s_t(l) + 2/\alpha)}{\Gamma(s_t(l))} \right) - \left(\frac{\gamma_1 \Gamma(s_t(l) + 1/\alpha)}{\Gamma(s_t(l))} \right)^2 \right\} \quad (3.7)$$

As distribuições a priori nas expressões (3.2) e (3.3) e as posteriores $(\theta_t|D_t)$ e $(\lambda_t|D_t)$ juntamente com (3.5), fornecem um algoritmo de estimação e previsão no modelo proposto para qualquer tempo $t = 1, 2, \dots, T$ dado as condições iniciais $p(\lambda_1|D_0), (m_0, P_0), \alpha$ e Ω_t .

3.1.2 Resumindo o processo de Estimação, seleção de modelos e Previsão Modelo Fréchet- Γ

Para fins de melhor entendimento da estimação, seleção de modelos e previsão no *Fréchet- Γ* , o início do sistema completo de funcionamento do modelo proposto é resumido nos seguintes passos:

1. Observe o processo $O_t = O_{t,j} : j = 1, 2, \dots, J$ e $t = 1, 2, \dots, T$, especifique o valor de α e determine o modelo observacional $p(y_t|\lambda_t)$ como descrito em **C1**.
2. Em **C2**, com $t = 1$, especifique a matriz de covariância da evolução Ω_1 .
3. Em **C3** determine a distribuição inicial $(\theta_0|D_0)$ através de (m_0, P_0) , atualize a distribuição conjunta na equação (3.2) e no tempo $t = 1$, compute $f_1 = F_1' G_1 m_0$ e $q_1 = F_1' R_1 F_1$ onde $R_1 = G_1 P_0 G_1' + \Omega_1$.
4. Compute $r_1 = q_1^{-1} e^{-f_1}$ e $s_1 = q_1^{-1}$ e com estes valores obtenha a distribuição de $(\lambda_1|D_{t-1})$ na expressão (3.3).
5. Com o modelo observacional em **C1** e a distribuição $(\lambda_1|D_0)$ compute a distribuição da previsão ou (predição em D_t) na expressão (3.4) e após observar y_1 compare com a previsão $\hat{y}_1 = y_1(0) = E(y_1(0))$ dada em (3.6) e obtenha o erro de previsão $e_1 = (y_1 - \hat{y}_1)$.
6. Após os passos de 1-5, atualizamos as distribuições a posteriori da seguinte forma: $(\eta_1|D_1) \sim (f_1^*, q_1^*)$, onde $f_1^* = \psi(s_1 + 1) - \log(r_1)$ e $q_1^* = \psi(s_1 + 1)$. Em seguida, $(\theta_1|D_1) \sim (m_1, P_1)$ onde $m_1 = G_1 m_0 + R_1 F_1 (f_1^* - f_1)/q_1$ e $P_1 = R_1 - R_1 F_1 F_1' R_1 (1 - q_1^*/q_1)/q_1$.
7. Agora, usamos a distribuição de $(\theta_1|D_1)$ como priori inicial para o tempo $t = 2$ e repetimos os passos de 1-6. Esses processo é repetido novamente para todo $t = 2, 3, \dots, T$ e o ajuste do modelo é avaliado através da raiz quadrada do Erro

Quadrático Médio(*Root Mean Square Error*)**RMSE**, do Desvio Absoluto Médio(*Mean Absolute Deviation*)**MAD** e Erro Percentual Médio(*Mean Absolute Percentage Error*)**MAPE**.

3.1.3 Especificando os Valores Iniciais

No modelo proposto, usando o esquema de distribuição a priori conjugada, precisamos inicializar o processo com a distribuição de $(\lambda_1|D_0)$ através da especificação para (r_1, s_1) que pode ser obtida através dos valores para m_0 e P_0 , veja passos 3 e 4 na subseção (3.1.2).

Em muitas situações, teremos informações prévias expressas como crenças ou conhecimentos prévios de um "especialista" em termos de média, variâncias ou probabilidades. Mas, pode ser difícil obter toda a distribuição a priori a partir do conhecimento prévio acumulado, principalmente no caso multivariado. Desta forma, parece natural iniciarmos o processo com uma distribuição a priori não *informativa*. Desta forma, parece natural iniciarmos o processo com uma distribuição a priori não informativa. Por exemplo, se definirmos $r_1 = s_1 \approx 0$. Isto implica que $q_1 \rightarrow \infty$ para $f_1 < \infty$. Na prática, podemos adotar um valor muito grande para q_1 e $f_1 = 0$ que pode ser obtido com $m_0 = (0, 0, \dots, 0)_d$ e $P_0 = 10^6 I_d$, onde $d = \dim(\theta_t)$ e I é matriz identidade. Nós usamos estes valores iniciais para a distribuição de $(\theta_0|D_0)$. Para justificar esta escolha, suponha que a distribuição $p(\lambda_t|D_0)$ seja especificado de acordo com a distribuição a priori não informativa de *Jeffreys*. Então, $p(\lambda_1|D_0) \propto I_F^{1/2}(\lambda_1)$, onde $I_F(\lambda_1)$ é a informação de Fisher baseada na distribuição $p(y_1|\lambda_1)$. Nota-se por (3.1) que $I_F(\lambda_1) = \lambda_1^{-2}$. Assim, $p(\lambda_1|D_0) \propto \lambda_1^{-1}$ que é equivalente em (3.3) a uma distribuição *Gama* (s_1, r_1) com $r_1 \rightarrow 0$ e $s_1 \rightarrow 0$, por exemplo, $r_1 = s_1 = 10^{-3}$. Ou seja, uma grande variância P_0 e m_0 nula, impõe inicialmente uma priori não informativa para $(\lambda_1|D_0)$.

Para a escolha de Ω_1 , consideramos a proposta de *West and Harrison (1999)* baseada um fator de desconto $\delta \in (0, 1)$. Especificamente, defina :

$$\Omega_1 = \frac{(1 - \delta)}{\delta} G_1 P_0 G_1'$$

isso implica que,

$$R_1 = G_1 P_0 G_1' + \Omega_1 = \frac{G_1 P_0 G_1'}{\delta}$$

Suponha que $G_1 = 1$. Então,

$$R_1 = \text{Var}(\theta_1|D_0) = P_0/\delta = \text{Var}(\theta_0|D_0)/\delta$$

Ou seja, o fator δ controla a perda de informação quando passamos da distribuição de $(\theta_0|D_0)$ para $(\theta_1|D_0)$. Para Generalizar este resultado, no tempo t , defina,

$$\Omega_t = \frac{(1 - \delta)}{\delta} G_1 P_{t-1} G_1'$$

e supondo que G_t é bloco diagonal. Então, teremos:

$$R_t = B_t G_t P_{t-1} G_t' B_t$$

onde B_t é uma matriz diagonal $d \times d$ com elementos $1/\delta_i, i = 1, 2, \dots, d$. Por fim, em algumas análises prévia para testar este modelo, observamos que os resultados são sensíveis à escolha dos valores para α . Assim, a especificação de α é realizada da seguinte forma:

- Considere uma sequência de valores $\{\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_{t-1}\}$ onde cada valor é o resultado de um funcional estatístico empírico de D_{t-1} . Por exemplo, este funcional pode ser o coeficiente de variação, de assimetria ou curtose da distribuição empírica $y_1, y_2, \dots, y_{t-1}$.
- Seja $C(\alpha)$ o funcional teórico correspondente na distribuição de $p(y_t|\lambda_t)$ e $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t-1}\}$ onde α_k é solução da equação $C(\alpha) - \hat{C}_k = 0, k = 1, 2, t - 1$.
- Então nós especificamos α no intervalo $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$, onde $\alpha_{min} = \min(\alpha)$ e $\alpha_{max} = \max(\alpha)$. Em nossa aplicação do modelo, nós usamos como $C(\alpha)$ o Coeficiente de Variação da distribuição em (3.1).

3.1.4 Métricas de Desempenho

As métricas de desempenho são essenciais para avaliar a qualidade preditiva dos modelos dinâmicos aplicados às séries temporais de horas de trovoadas. Nesta subseção, são apresentadas três medidas amplamente utilizadas:

- **RMSE** — Raiz do Erro Quadrático Médio;
- **MAD** — Desvio Absoluto Médio;
- **MAPE** — Erro Percentual Absoluto Médio.

3.1.4.1 Métrica de Desempenho: RMSE

A **Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE)** é uma das métricas mais utilizadas para avaliar o desempenho de modelos de previsão, quantificando a discrepância média entre os valores observados e aqueles estimados pelo modelo. Sua formulação é dada por:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2} = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^n e_t^2 \right)^{1/2}$$

em que y_t representa o valor observado e $\hat{y}_t$ o valor previsto no instante t . Onde $(y_t - \hat{y}_t) = e_t$ e o erro de previsão descrito (na subseção anterior (3.1.2)) no passo 5.

A RMSE mede a magnitude média dos erros de previsão na mesma unidade da variável analisada (horas de trovoadas), o que facilita sua interpretação prática. Valores menores de RMSE indicam melhor desempenho preditivo e maior precisão do modelo ajustado.

No contexto da modelagem dinâmica baseada na distribuição Fréchet, a RMSE foi utilizada para comparar o desempenho entre diferentes configurações do fator de desconto e estimativas dos parâmetros (α, λ) . Essa métrica permitiu identificar o modelo com maior capacidade de representar a variabilidade temporal dos máximos mensais observados, fornecendo um critério quantitativo para a seleção do melhor ajuste.

3.1.4.2 Métrica de Desempenho: MAD

O **Desvio Absoluto Médio (MAD)** é uma métrica amplamente utilizada para avaliar a acurácia de modelos preditivos, mensurando a média das diferenças absolutas entre os valores observados e os estimados pelo modelo. Sua formulação é expressa por:

$$\text{MAD} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t| = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^n |e_t|$$

em que y_t representa o valor observado, $\hat{y}_t$ o valor previsto no instante t , e $e_t = (y_t - \hat{y}_t)$ o erro de previsão (definido na subseção 3.1.2, passo 5).

O MAD mede a magnitude média dos erros de previsão de forma direta e intuitiva, permanecendo na mesma unidade da variável de interesse (horas de trovoadas). Por não elevar os erros ao quadrado, essa métrica é menos sensível a valores extremos, fornecendo uma medida robusta do erro médio.

No contexto da modelagem dinâmica baseada na distribuição Fréchet, o MAD foi empregado para comparar a estabilidade e a consistência das previsões obtidas sob diferentes fatores de desconto e estimativas dos parâmetros (α, λ) , auxiliando na escolha do modelo mais parcimonioso e representativo da variabilidade temporal observada.

3.1.4.3 Métrica de Desempenho: MAPE

O **Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE)** é uma métrica de avaliação que expressa o erro de previsão em termos percentuais, permitindo a comparação entre séries com diferentes escalas. Sua formulação é dada por:

$$\text{MAPE} = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| = \frac{100}{T} \sum_{t=1}^n \left| \frac{e_t}{y_t} \right|$$

em que y_t representa o valor observado, $\hat{y}_t$ o valor previsto no instante t , e $e_t = (y_t - \hat{y}_t)$ o erro de previsão (conforme definido na subseção 3.1.2).

O MAPE indica, em termos percentuais, o quão distante em média estão as previsões dos valores reais. Assim, valores menores de MAPE sugerem maior precisão preditiva e melhor desempenho do modelo.

No âmbito da modelagem dinâmica com distribuição Fréchet, o MAPE foi utilizado como métrica complementar às medidas RMSE e MAD, permitindo avaliar a

qualidade relativa das previsões e identificar a configuração de fator de desconto e parâmetros (α, λ) que melhor capturam a estrutura de variação das trovoadas mensais na região estudada.

3.1.4.4 Métrica de Desempenho: BIC

O BIC (Bayesian Information Criterion) é uma métrica de seleção de modelos utilizada para comparar alternativas de forma objetiva, considerando simultaneamente a qualidade do ajuste e a complexidade do modelo. Ele deriva da aproximação bayesiana da verossimilhança e é dado por:

$$BIC = -2\ln(L) + k\ln(n)$$

onde:

- **L** é a verossimilhança máxima do modelo,
- **k** o número de parâmetros estimados, e
- **n** o tamanho da amostra.

Valores menores de BIC indicam modelos mais parcimoniosos, ou seja, com melhor equilíbrio entre capacidade explicativa e número de parâmetros, evitando sobreajuste (overfitting).

4 APLICAÇÕES

Esta seção tem como objetivo principal aplicar o modelo proposto em dados de horas de trovoadas simultaneamente observados e resgistrados por duas ou mais fontes de observação de dados meteorológicos de superfície em uma mesma região. No caso proposto, o objetivo será modelar e analisar a série temporal dos máximos mensais, capturados pela distribuição *Fréchet*. A abordagem adotada mantém a estrutura do modelo multivariado anteriormente estudado, com foco em duas séries base provenientes de estações meteorológicas localizadas nos aeroportos de Ponta Pelada (SBMN) e Eduardo Gomes (SBEG), ambas situadas em Manaus, AM. O período de estudo compreende mais de quatro décadas de dados, abrangendo de 1º de janeiro de 1982 a 31 de dezembro de 2024.

4.1 Área de estudo e fontes de dados

As informações utilizadas neste estudo foram obtidas a partir de dados registrados pelas Estações Meteorológicas de Superfície de Eduardo Gomes (SBEG) e Ponta Pelada (SBMN), localizadas, respectivamente, nas zonas oeste e sul de Manaus, AM. Essas estações operam diuturnamente, gerando automaticamente sumários diários e mensais de variáveis meteorológicas essenciais para a análise e monitoramento climático da região. A qualidade e o refinamento dos dados registrados devem-se, em grande parte, ao elevado preparo técnico das equipes de observadores que operam nessas estações. Esses profissionais são submetidos a rigorosos processos de captação e avaliações periódicas de desempenho operacional, de acordo com normas estabelecidas pelo Comando da Aeronáutica (COMAER). Entre as principais regulamentações aplicáveis, destacam-se: ICA-2 (Classificação dos Órgãos Operacionais de Meteorologia Aeronáutica), ICA 105-15 (Estações Meteorológicas de Superfície) e ICA 105-16 (Códigos Meteorológicos). Tais publicações asseguram a padronização e confiabilidade dos dados produ-

zidos por essas estações. A Figura 9 e a Tabela 3 ilustram a região operacional de influência e vigilância do Radar Meteorológico de Manaus, que desempenha papel estratégico no monitoramento das condições de tempo e clima na área metropolitana. Os dados mensais analisados compreendem o período de janeiro de 1982 a dezembro de 2024.

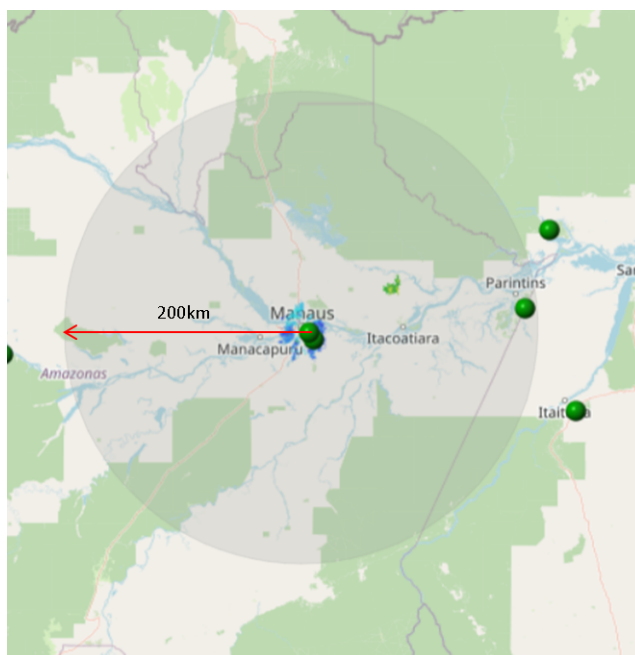


Figura 9: Área de influência e vigilância do Radar Meteorológico de Manaus. Fonte: Redemet, 2024.

Tabela 3: Distâncias médias em linha reta do Radar localizado em SBMN (Manaus) a localidades do município de Manaus. Fonte: br.distanciaskm.com/Manaus, 2024.

nº de municípios	local ou Município	distâncias em linha reta (Km)
1	SBMN	0
2	SBEG	10
3	Irاندوبا	20
4	Careiro da Várzea	22
5	Rio Preta da Eva	58
6	Manacapuru	71
7	Altazes	111
8	Novo Airão	115
9	Presidente Figueredo	120
10	Itacoatiara	175

4.1.1 Caracterização das Estações Meteorológicas DTCEA-MN e DTCEA-EG em Manaus

A estação DTCEA-MN (EMS-2), situada no Aeroporto Ponta Pelada (zona sul), opera com instrumentos convencionais e automáticos, em área densamente urbanizada (população em torno de 338 mil). Já a estação DTCEA-EG (EMS-1), localizada no Aeroporto Eduardo Gomes (zona oeste), é totalmente automatizada e instalada próxima a área de reserva florestal (população em torno 300 mil). Ambas seguem normas técnicas (MCA 105-2-2008), assegurando medições contínuas e de alta qualidade. A Figura 10 mostra a localização dessas estações.

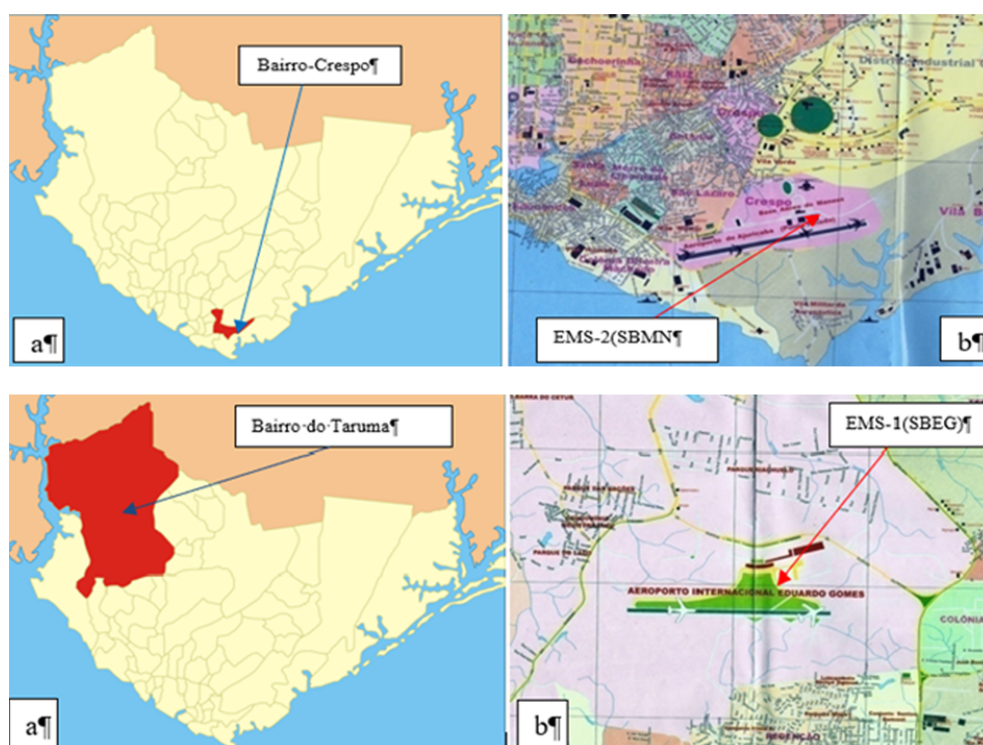


Figura 10: (acima)(a) Localização do Bairro Crespo na Zona Sul de Manaus e (b) Localização da estação meteorológica de superfície do aeroporto Ponta Pelada (EMS-2), Lat.: $03^{\circ}09'S$, long.: $059^{\circ}59'W$ e altitude: 85m. e (abaixo) (a) Localização do Bairro do Tarumã de Manaus e (b) Localização da estação meteorológica de superfície do aeroporto Eduardo Gomes (EMS-1), Lat.: $03^{\circ}02'S$, long.: $060^{\circ}02'W$ e altitude: 82.1m. Fonte: Cart-Mapas, 2005, adaptadas pelo autor.

Assim, a caracterização das estações e do radar reforça a robustez e representatividade da base de dados, elemento fundamental para a modelagem estatística e a análise de extremos climáticos na região amazônica.

- Os valores de assimetria indicam que todas as séries possuem distribuição positivamente assimétrica, com caudas mais longas à direita, refletindo a ocorrência ocasional de valores elevados. As séries SBMN (0,589) e SBEG (0,585) apresentam assimetrias muito próximas, sugerindo comportamento semelhante na dispersão dos dados. Já a série dos máximos [SBMN/SBEG] (0,247) mostra assimetria menos acentuada, indicando distribuição mais equilibrada e menor influência de valores extremos, o que sugere certa estabilização ao considerar os máximos conjuntos.
- Os valores de curtose observados indicam que todas as séries apresentam distribuição platicúrtica (curtose < 3), ou seja, com caudas mais leves e menor concentração em torno da média do que a distribuição normal. Entre elas, a série SBEG (2,412) possui a maior curtose, sugerindo maior presença de valores extremos e leve concentração mais acentuada dos dados em torno da média. Já a série dos máximos combinados (2,074) apresenta a menor curtose, indicando distribuição mais dispersa e menor incidência de picos, o que é compatível com o comportamento esperado de séries que agregam valores máximos de diferentes fontes.
- Os resultados mostram que as três séries apresentam níveis de dispersão semelhantes, com valores próximos de variância e desvio padrão, o que indica consistência na variabilidade entre as estações SBMN e SBEG e na série dos máximos. A amplitude elevada em todas as séries — especialmente em SBMN (57,82) e nos máximos (57,77) — evidencia a ocorrência de valores extremos ocasionais, típicos de fenômenos atmosféricos como as horas de trovoadas. No geral, a série dos máximos [SBMN/SBEG] apresenta ligeiramente maior dispersão, refletindo o efeito combinado dos extremos das duas estações.

A Figura 13 observamos a visualização da série ao longo do tempo permite identificar a presença de flutuações mensais marcadas por sazonalidade e episódios extremos. Os boxplots refoçam os dados da Tabela 4: a série de máximos possui maior mediana e amplitude interquartilica, além de mais valores extremos.

Os histogramas (Figura 14) evidenciam distribuições assimétricas à direita, com maior concentração de valores entre 10h e 30h em todas as séries. A densidade de probabilidade é mais "espalhada" na série de máximos, refletindo sua maior variabilidade. Em síntese, as análises revelam que a série dos máximos retém maior centrali-

Tabela 4: Sumário descritivo da série : fonte 1=SBMN, fonte 2=SBEG e máximos (SBMN/SBEG), (n=516) .

Descritiva	fonte 1=SBMN	fonte 2=SBEG	máximo(SBMN/SBEG)
mínimo	3.95	4.00	4.00
1ºquartil	11.30	11.33	15.41
mediana	20.09	19.71	25.41
média	22.48	21.96	26.63
3ºquartil	32.15	31.30	36.87
máximo	61.77	56.08	61.77
variância	184.10	168.36	185.05
desvio padrão	13.57	12.98	13.60
amplitude	57.82	52.08	57.77
curtose	2.376	2.412	2.074
assimetria	0.589	0.585	0.247
CV(%)	60.37	59.11	51.07

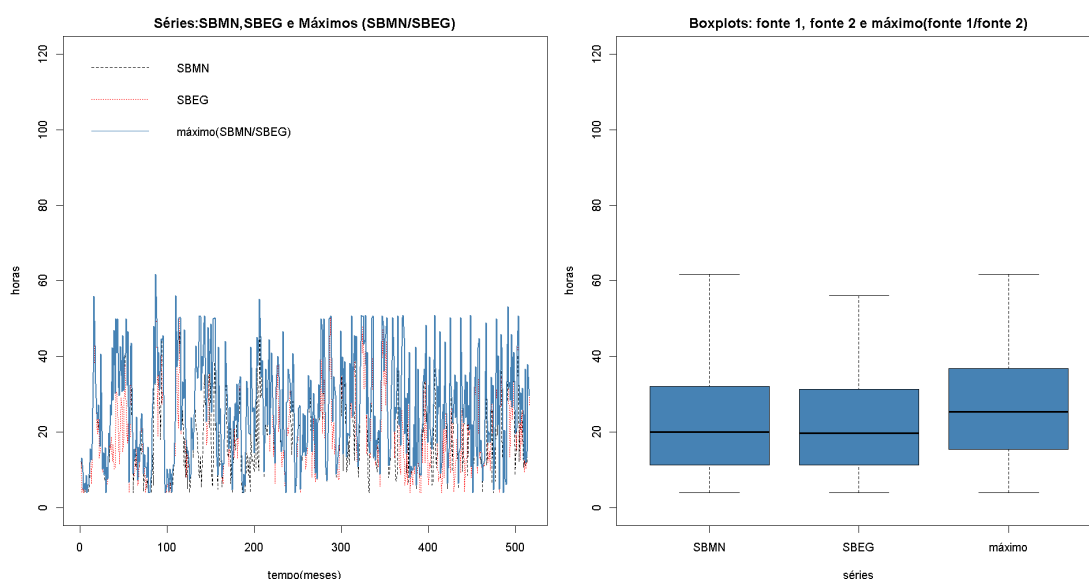


Figura 13: plotagem das séries e boxplots: fonte 1=SBMN, fonte 2=SBEG e máximo(SBMN/SBEG) no espaço de tempo de 516 meses.

dade e dispersão, sendo mais apropriada para capturar eventos extremos. As três séries mostram assimetria positiva e curtose e curtose elevada, sugerindo que a distribuição Fréchet pode ser adequada para modelagem.

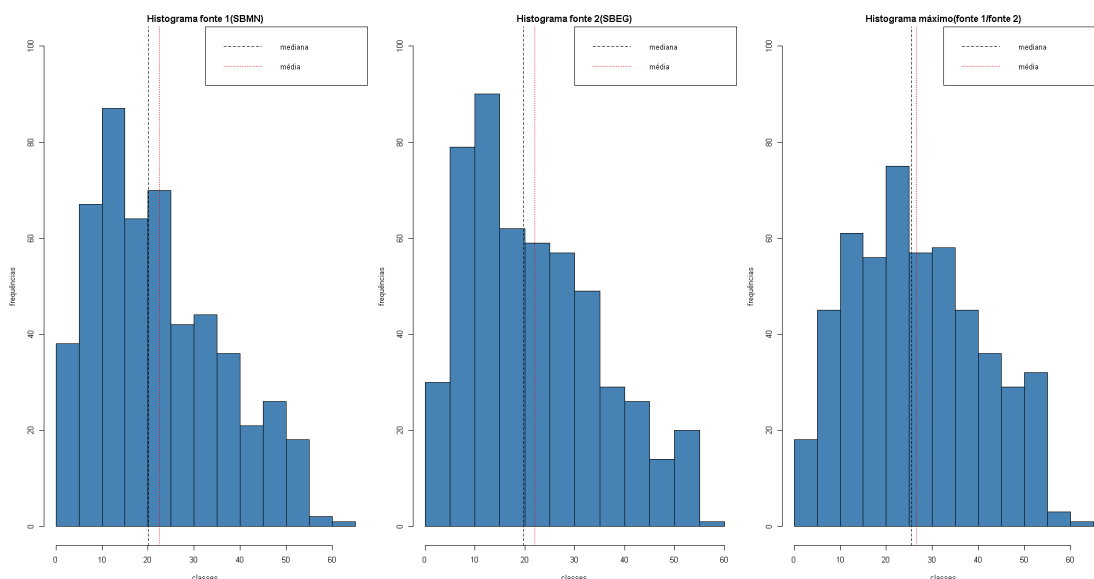


Figura 14: Histogramas das séries: fonte 1(SBMN), fonte 2(SBEG) e máximo(SBMN/SBEG) no espaço de tempo de 516 meses.

4.4 Correlação entre as séries, Tendência e Sazonalidade

A Figura 15, apresentada, explora o nível de dependência temporal entre as três séries de interesse, SBMN (fonte 1), SBEG (fonte 2) e o máximo entre ambas ao longo de 516 meses. A análise é conduzida por meio de correlção lineares e funções de autocorrelação (FACs).

As correlações lineares indicam uma moderada (0.58) associação linear positiva entre as séries SBMN e SBEG, sugerindo que ambas capturam padrões similares de variação mensal. A correlação da série dos máximos com cada fonte é forte (SBMN e máximo=0.86 e SBEG e máximo=0.84), o que é esperado, dado que a série de máximos pode romper a linearidade em situações onde os extremos ocorrem isoladamente em apenas uma das fontes. A presença de autocorrelação significativa em defasagens baixas e médias sugere que valores passados influenciam os presentes, o que justifica o uso de modelos com memória, como os DGLMs (Modelos Lineares Dinâmicos Generalizados) ou modelos ARIMA. As funções de autocorrelação, ainda, evidenciam estrutura temporal significativa nas três séries, com valores positivos decrescendo lentamente, o que indica persistência e possível componente sazonal.

Esse componente sazonal é visível na Figura 16 que também mostra a variação no componente de tendência. Para uma melhor visualização do comportamento sazonal

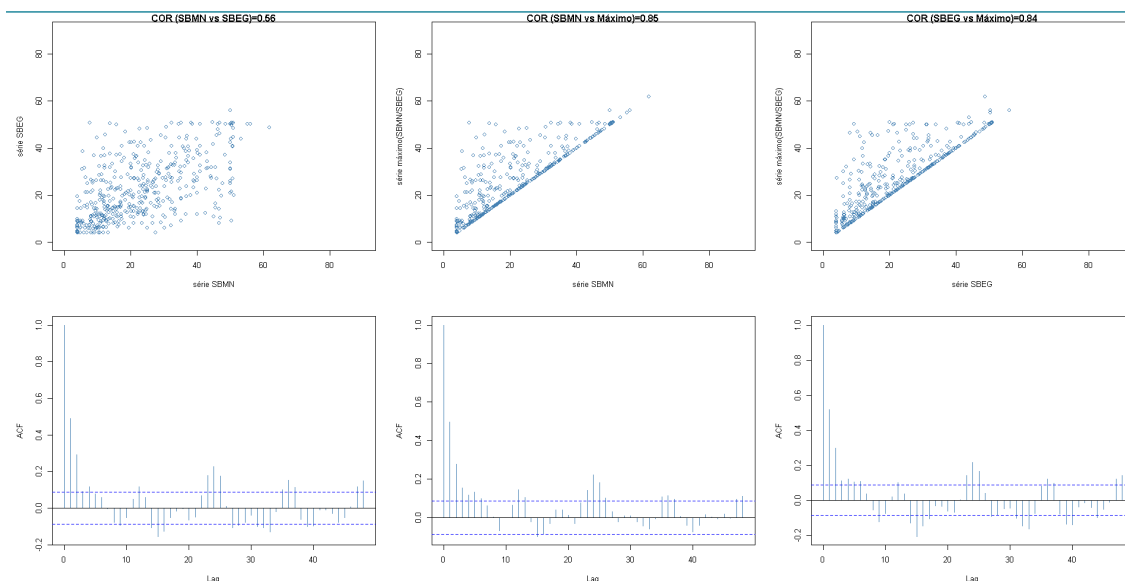


Figura 15: Correlações e autocorrelações entre as séries: fonte 1(SBMN), fonte 2(SBEG) e máximo(SBMN/SBEG) no espaço de tempo de 516 meses.

mensal, apresentamos também a Figura 17(chamada de season plot) que mostra a distribuição mensal da sazonalidade para cada década dos primeiros 40 anos. Observa-se uma sazonalidade não constante que se altera com o tempo.

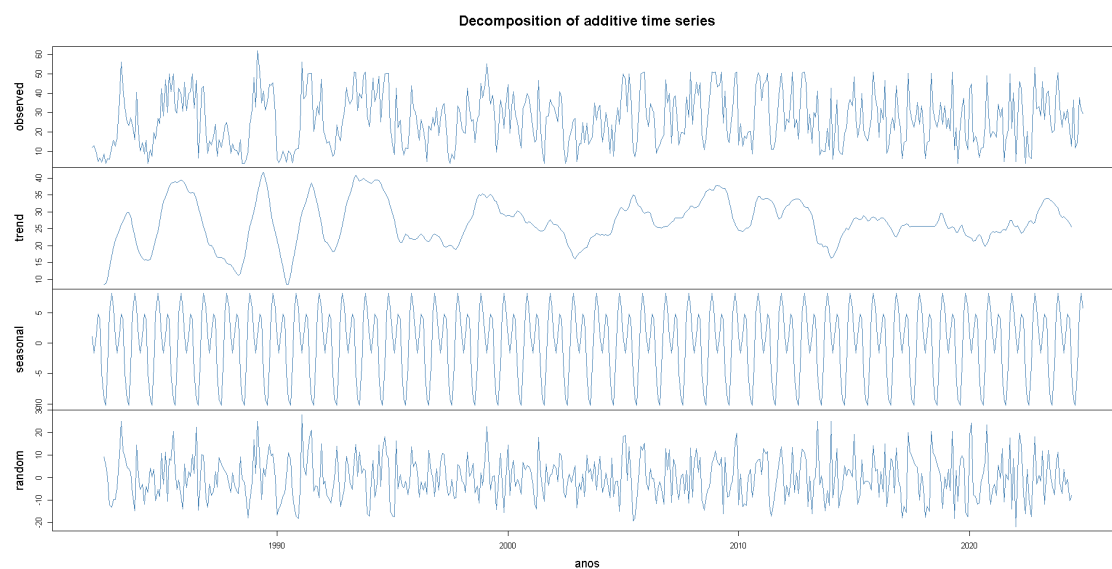


Figura 16: Decomposição aditiva da Série de Máxima duração de horas de trovoadas.

No que tange a tendência , a Tabela 5 apresenta o sumário descritivo das inclinações médias das séries observadas nas duas fontes distintas, SBMN (fonte 1) e SBEG (fonte 2), bem como da série composta pelos valores máximos entre ambas, considerando um total de $n=516$ observações. A análise revela os seguintes pontos principais:

- A série da **fonte 1 (SBMN)** apresenta uma inclinação média positiva de 0.00662 h/mês, sugerindo uma leve tendência de aumento ao longo do tempo. No entanto, a baixa variabilidade (± 0.00400 h/mês) indica flutuações baixa ao redor dessa tendência.
- A série da **fonte 2 (SBEG)** exibe uma inclinação média próxima de zero 0.00151 h/mês, com menor variabilidade (± 0.00384 h/mês), caracterizando uma série mais estável e praticamente estacionária em termos de tendência.
- A série de **máximos (SBMN/SBEG)** apresenta uma inclinação intermediária 0.00707 h/mês, também positiva, e com variabilidade relativamente baixa (± 0.00402 h/mês). Esse comportamento sugere que a tendência de crescimento dos máximos está mais próxima da fonte SBMN, embora suavizada.

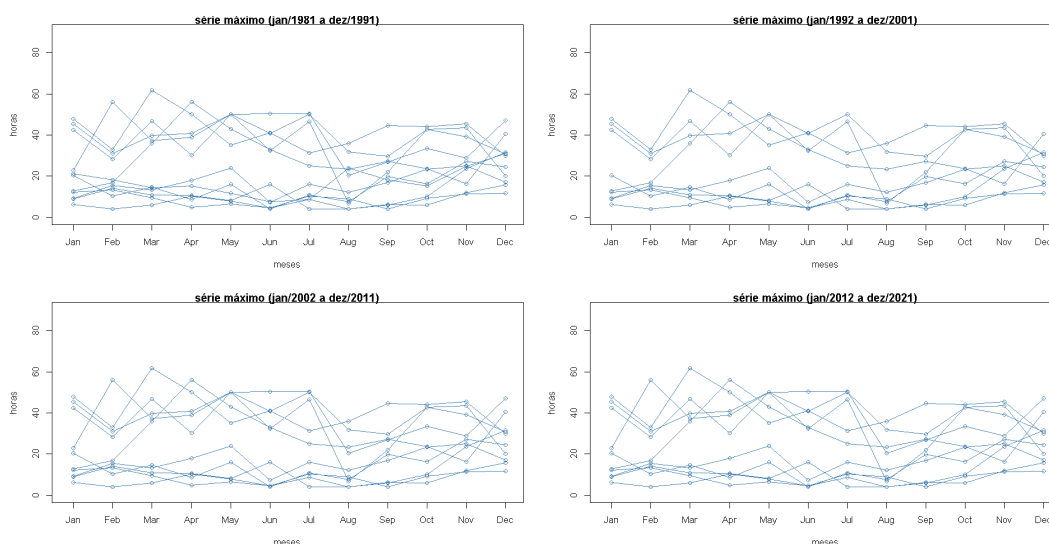


Figura 17: Season plot para a Série de Manaus duração de horas de trovoadas.

A Figura 18 complementa esses resultados ao apresentar, graficamente, as séries temporais com suas respectivas retas de regressão. Visualmente, observam-se oscilações mais acentuadas nas séries da fonte SBMN e dos máximos, ambas com indícios claros de tendência crescente. Em contraste, a série da fonte SBEG permanece praticamente constante ao longo do tempo. Esses componentes distintos podem refletir características estruturais específicas de cada localidade de origem dos dados. Aparentemente, a inspeção visual da série do máximo valor de trovoadas mensais, pode deixar dúvidas sobre a existência de uma leve tendência, visto que o correlograma (veja Figura 15) não apresenta indícios da presença desta. No entanto, realizamos 3 teste para detectar tendências (Wald-Wolfwitz, Cox-Stuart e Mann-Kendall). Todos os

testes evidenciaram a presença de tendência com valor p , respectivamente, iguais a $(2.2 \times 10^{-16}, 0.03075, 0.03842)$.

Tabela 5: Sumário descritivo das inclinações das série simulada: fonte 1=SBMN, fonte 2=SBEG e máximo= (SBMN/SBEG) para $n = 516$.

<i>Fontes</i>	<i>incl. média (h/mês)</i>	<i>variabilidade média(h/mês)(n.c[95%])</i>
fonte 1[SBMN]	0.00662	± 0.00400
fonte 2[SBEG]	0.00151	± 0.00384
máximo(SBMN/SBEG)	0.00579	± 0.00402

Sendo assim, essas informações confirmam que as séries possuem alta correlação entre si e dependência temporal interna, sazonalidade e uma suave tendência dinâmica, característica que devem ser consideradas na modelagem estatística e na previsão. Esses resultados reforçam a validade da abordagem conjunta das séries e justificam o uso de técnicas que incorporam tanto a autocorrelação quanto a estrutura conjunta entre fontes.

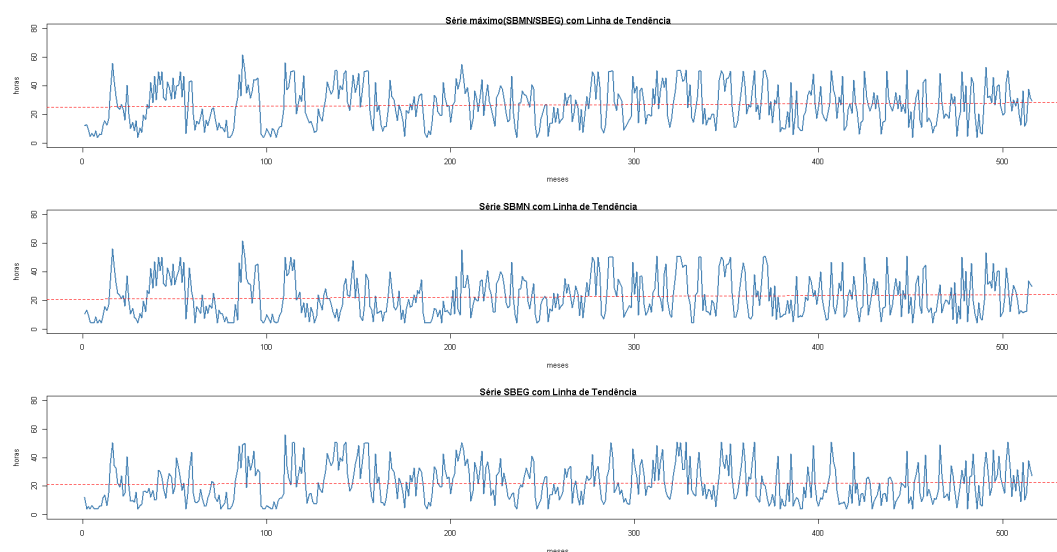


Figura 18: Gráficos das séries e retas de regressão: fonte 1[SBMN], fonte 2[SBEG] e máximo(SBMN/SBEG) no espaço de tempo de 516 dados.

4.5 Modelo Proposto e Resultados

Considerando os dados de máximas horas mensais de trovoadas medidas entre as duas estações de superfície descritas nas seções 4.1 e 4.2 e suas características discutidas nas seções 4.3 e 4.4. Observamos que os dados apresentam uma suave tendência linear e uma sazonalidade anual com período $p=12$. Esses são dados de máximos de um modelo conjunto com observações conjunta correlacionadas e, portanto, a distribuição Fréchet é o modelo adequado a ser considerado. O modelo proposto tem as seguintes especificações: para um valor α fixado assumimos a série $y_t, t = 1, 2, \dots$ do máximo de horas de trovoadas tem densidade dada em (3.1) com $p(y_t|\lambda_t) = p_\alpha(y_t|\lambda_t)$, o subscrito α é para denotar a dependência da densidade em um valor fixado escolhido do intervalo $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$ descrito na subseção 3.1.3 Consideramos o preditor linear $\eta_t = \log \lambda_t$ dado por:

$$\eta_t = F_t' \theta_t = [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0][\theta_{1,t}, \theta_{2,t}, \dots, \theta_{12,t}]'$$

e,

$$\theta_t = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\pi/6) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_2(5\pi/6) \end{pmatrix} \theta_{t-1} + \Omega_t$$

Onde, J_1 é um bloco de Jordan com alto valor unitário, responsável pela modelagem da variação na Tendência e $J(\psi)$ é o componente harmônico que modela a sazonalidade, isto é ,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$J_2(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

O modelo com a estrutura acima é conhecido como modelo de tendência-sazonal para a variação sazonal do qual se utiliza uma representação da expansão completa de Fourier. Para estes dados, o ciclo sazonal é $c=12$ com frequência $2\pi/c = i\pi/6 = \psi$ ($i = 1, 2, \dots, 5$). Modelo similar para série gaussiana são discutido em West and Harrison (1997, seção 8.6) e Harvey(2004), para série de contagens veja Triantafyllou (2009) e West et al.,(1985). Para completar(veja subseção 3.1.3) assumimos $m_0 = [0, 0, \dots, 0]$, $P_0 = 10^6 I_{12}$ que é equivalente a uma priori não informativa para a distribuição de $\lambda_1 | D_0$. Também consideramos, $\Omega_t = \frac{(1-\delta)}{\delta} G_t P_{t-1} G_t'$, e como G_t é bloco diagonal, teremos $R_t = B_t G_t P_{t-1} G_t' B_t$, onde B_t é uma matriz diagonal 12×12 com elementos $B_t = \text{diag}(\delta_{trend}^{-1} I_2, \delta_{season}^{-1} I_{10})$. Onde $\delta_{trend} \in (0, 1)$ é o fator de desconto para a variação sazonal enquanto que I_d é matriz identidade de ordem d . Para a escolha do valor de α , nós computamos a sequência $\hat{C}_4, \hat{C}_5, \dots, C_{t-1}$, $t = 4, 5, \dots$, onde $\hat{C}_t$ é o coeficiente de variação empírico com os dados acumulados até o tempo $t - 1$. Por exemplo $\hat{C}_4$ é o coeficiente de variação obtido com os dados da série y_1, y_2, y_3 . Em seguida, determinamos o conjunto $\alpha = [C(\alpha) - \hat{C}_{t-1} = 0, t = 4, 5, \dots]$ e escolhemos $\alpha \in (\alpha_{min}, \alpha_{max})$ onde $\alpha_{min} = \min(\alpha)$ e $\alpha_{max} = \max(\alpha)$.

O histograma na Figura 19 mostra a distribuição de α nos dados reais e por isso pesquisamos $\alpha \in (3, 8)$ tal que $\alpha = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Para a escolha dos fatores de desconto, nós construímos grades de valores $\delta_{trend} = \{0.25, 0.30, 0.35, \dots, 0.95\}$ e $\delta_{season} = \{0.25, 0.30, 0.35, \dots, 0.95\}$. Por fim, realizamos a busca sobre todos o conjunto de modelos $\mathcal{M} = \{M(\alpha_i, \delta_{trend,j}, \delta_{season,k}) : i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 15; k = 1, 2, \dots, 15\}$ e selecionamos como melhor modelo aquele para o qual os valores de $(\alpha, \delta_{trend}, \delta_{season})$ minimizam o **RMSE** dado no passo 7 da subseção 3.1.2. Isto é, o modelo estimado é,

$$\hat{M} = M(\hat{\alpha}, \hat{\delta}_{trend}, \hat{\delta}_{season}) = \min_{(\alpha, \delta_{trend}, \delta_{season})} \text{RMSE}(\alpha, \delta_{trend}, \delta_{season})$$

Note que a busca é realizada sobre 1350 modelos distintos usando os passos de 1-7 da subseção 3.1.2.

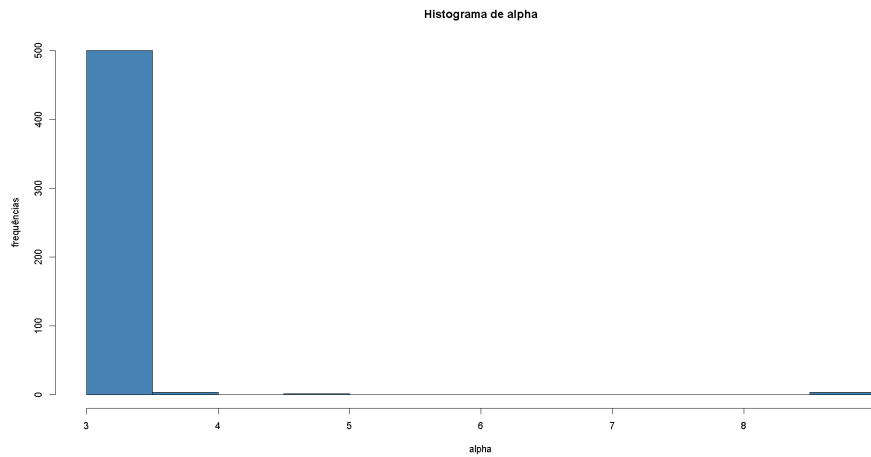


Figura 19: Distribuição do valor de alpha obtido através do coeficiente de variação empírico.

4.5.1 Modelo Fréchet- Γ ($\alpha, \delta_{trend}, \delta_{season}$)

As Figuras 20,21 e 22 apresentam três possíveis configurações do modelo proposto. Nota-se que o poder preditivo destes três modelos é muito pequeno. As Figuras 23 e 24 mostram o mapa de calor do **RMSE** de acordo com os fatores de descontos sazonais e de tendência para cada valor de $\alpha \in (3, 8)$. Nestas figuras quanto mais clara a região (mais fria) temos os menores valores de **RMSE** e quanto mais escura (mais quente) temos maiores valores. Observe um padrão similar nas figuras: os menores valores do **RMSE** estão associados ao canto superior esquerdo das figuras, indicando que melhores ajustes do modelo estão associados a um menor fator de desconto para a tendência e maior fator de desconto a sazonalidade. O melhor modelo foi obtido com $\alpha = 5$, $\delta_{trend} = 0.30$ e $\delta_{season} = 0.95$ e denotamos por Fréchet- Γ (5, 0.30, 0.95) seu **RMSE**=4.43. Observou-se um excelente ajuste em relação a série verdadeira. Para efeito de comparação, nós usamos a função `auto.arima` da biblioteca `forecast` do software R e obtivemos como melhor modelo ajustado o SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12]. Ou seja, na classe SARIMA, o melhor modelo é autorregressivo de ordem 2, possui 1 componente de média móvel e sazonalidade autorregressiva também de ordem 2. Esse modelo SARIMA apresentou um **RMSE**=11.31 que é um erro quase 3 vezes maior que o obtido pelo Fréchet- Γ (5, 0.30, 0.95). Nas Figuras 25 e 26 e a Tabela 6, apresentamos a performance destes dois modelos. Nota-se que o modelo proposto captura bem a característica de valores extremos da série, enquanto que o modelo SARIMA falha neste aspecto.

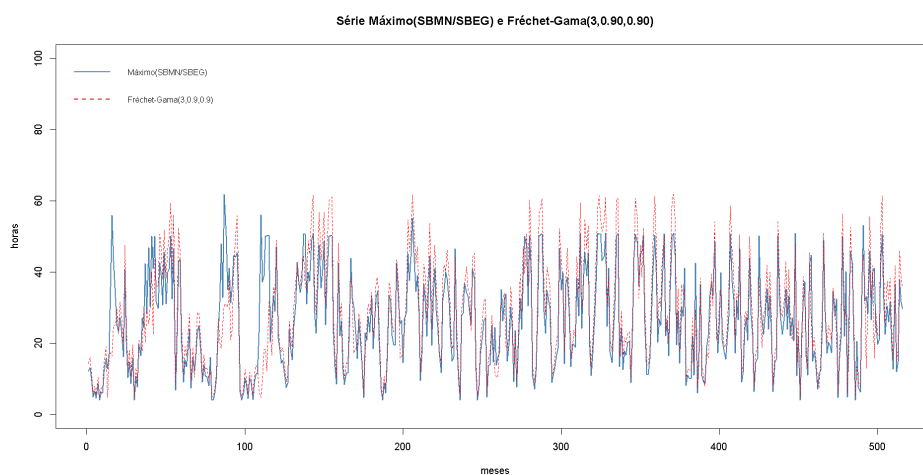


Figura 20: Modelo estimado, em linha vermelha, com parâmetros (3,0.90,0.90).

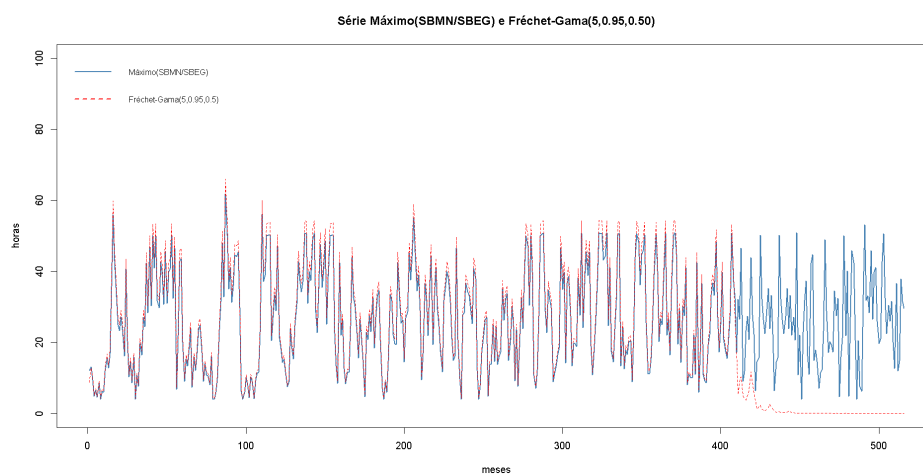


Figura 21: Modelo estimado, em linha vermelha, com parâmetros (5,0.95,0.50).

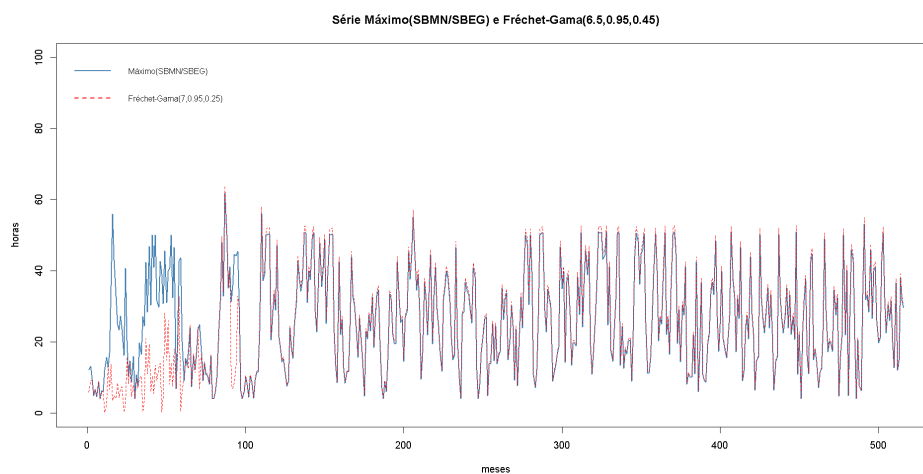


Figura 22: Modelo estimado, em linha vermelha, com parâmetros (7,0.95,0.25).

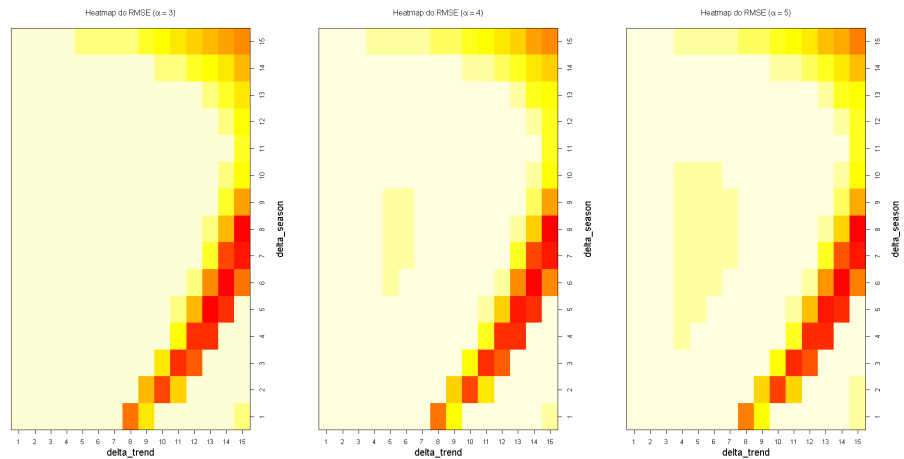


Figura 23: Mapa de calor do rmse para alfa de 3 à 5 segundo os fatores de desconto para tendência e sazonalidade.

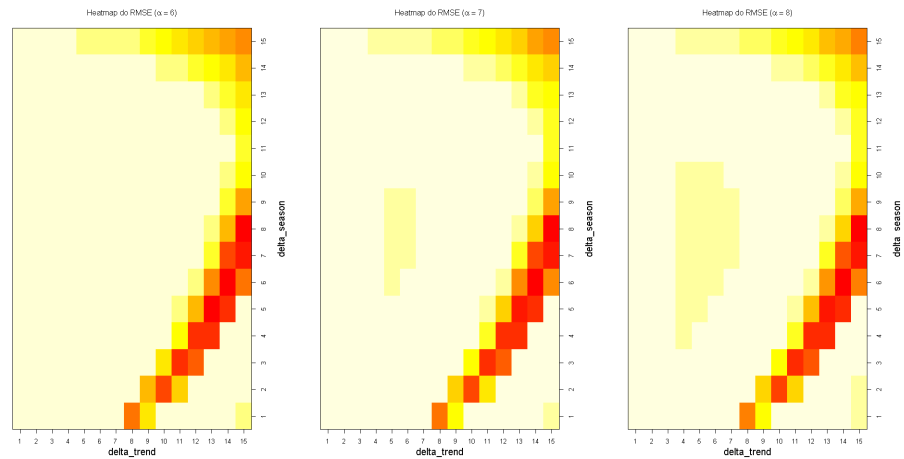


Figura 24: Mapa de calor do rmse para alfa de 6 à 8 segundo os fatores de desconto para tendência e sazonalidade.

Para efeito de comparação, nós usamos a função `auto.arima` da biblioteca `forecast` do software R e obtivemos como melhor modelo ajustado o SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12]. Ou seja, na classe SARIMA, o melhor modelo é autorregressivo de ordem 2, possui 1 componente de média móvel e sazonalidade autorregressiva também de ordem 2. Esse modelo SARIMA apresentou um RMSE=11.31 que é um erro quase 3 vezes maior que o obtido pelo Fréchet- Γ (5, 0.30, 0.95). Nas Figuras 23 e 24 e a Tabela 6, apresentamos a performance destes dois modelos. Nota-se que o modelo proposto captura bem a característica de valores extremos da série, enquanto que o modelo SARIMA falha neste aspecto.

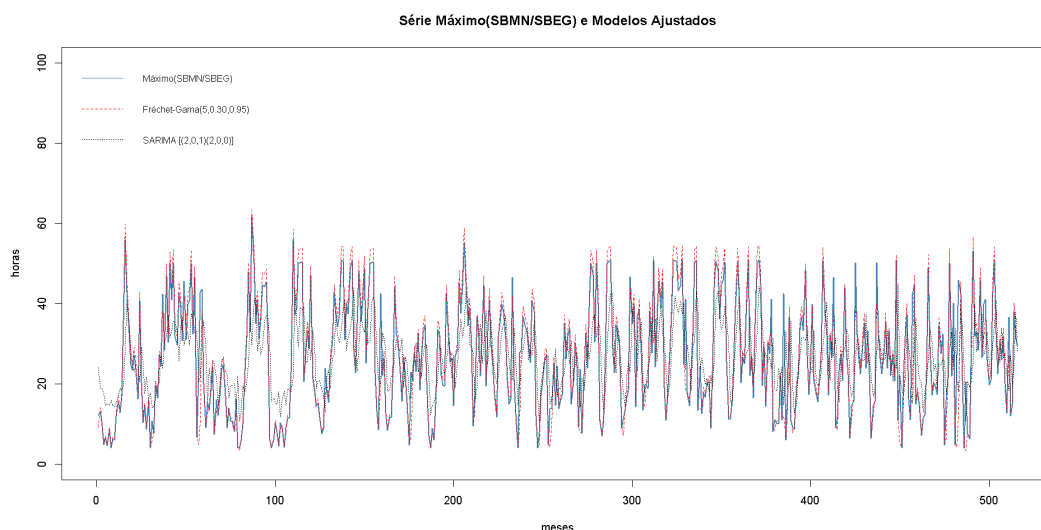


Figura 25: Série de máxima duração de trovoadas observada em azul, Modelo Fréchet- $\Gamma(5,0,30,0.95)$ em vermelho, SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] em preto.

Tabela 6: Sumário descritivo dos valores das métricas RMSE, MAD e MAPE para as séries simuladas por um Modelo Fréchet- $\Gamma(\alpha, \delta_{trend}, \delta_{season})$ comparado ao Modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12]

Modelos	RMSE	MAD	MAPE
SARIMA(2,0,1)(2,0,0)	11.31	9.14	55.04
Fréchet- $\Gamma(3,0.90,0.90)$	7.42	5.35	20.12
Fréchet- $\Gamma(5,0.95,0.50)$	12.83	6.64	25.15
Fréchet- $\Gamma(7,0.95,0.25)$	7.86	2.99	9.87
Fréchet-$\Gamma(5,0.30,0.95)$	4.43	2.50	9.40

4.5.2 Previsão com o Modelo Fréchet- Γ escolhido

Nesta subseção, apresenta-se a análise preditiva dos máximos mensais de horas de trovoadas para o horizonte de janeiro de 2025 a dezembro de 2029, obtida a partir do modelo Fréchet- $\Gamma(5, 0.30, 0.95)$. Esse modelo foi selecionado com base nas métricas de desempenho apresentadas na Tabela 6, demonstrando melhor adequação estatística e maior capacidade de representar a estrutura de variabilidade da série observada.

A Figura 27 ilustra as previsões do modelo Fréchet- Γ para o período de 2025–2029, destacando o comportamento projetado da série em 60 passos à frente. A Figura 26 complementa essa análise por meio de histogramas e boxplots, permitindo

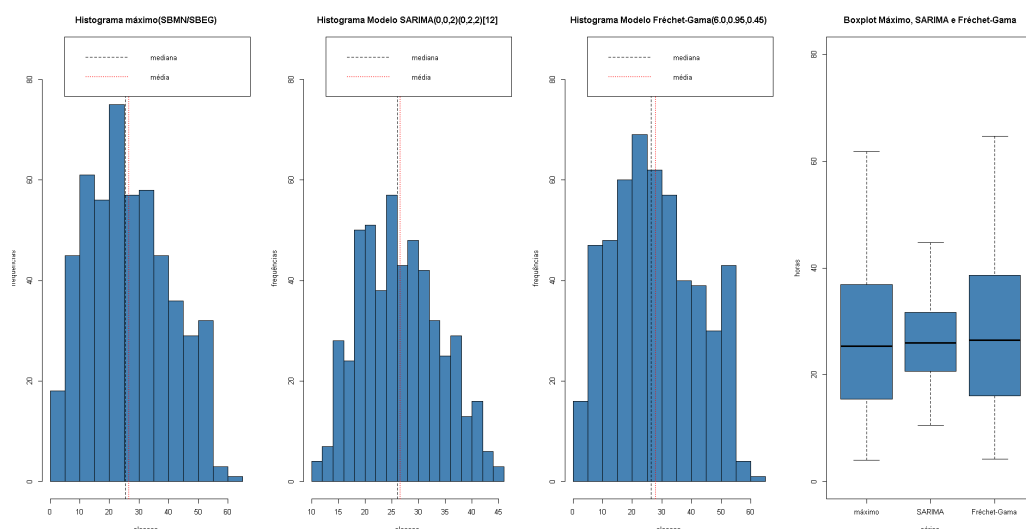


Figura 26: Histogramas das séries: Máximo(SBMN/SBEG), Modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] e fréchet-Gama(5.0,0.30,0.95) no espaço de tempo de 516 meses.

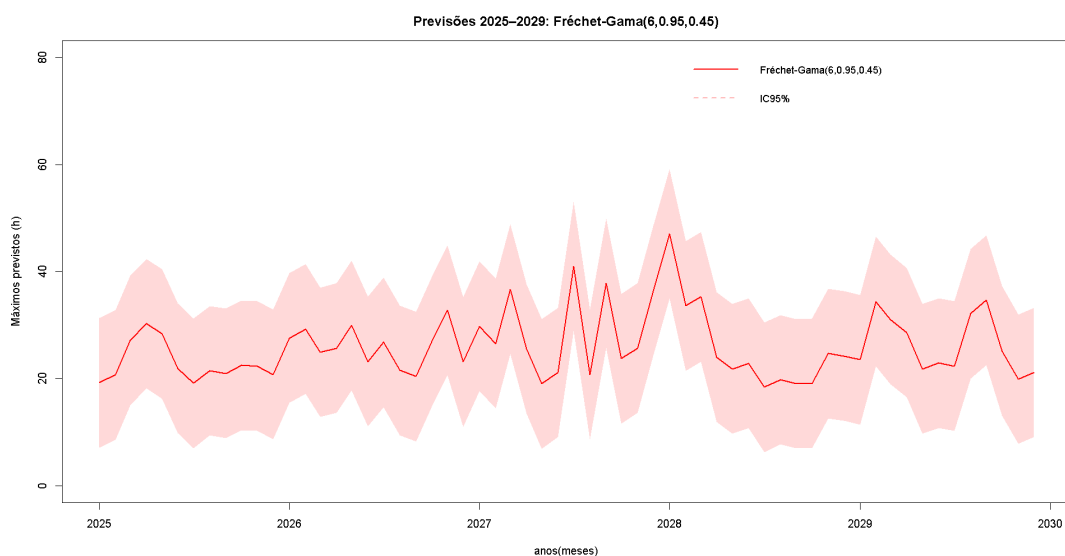


Figura 27: Séries temporais comparativas dos previsões Modelos Fréchet- Γ (5,0.30,0.95) para um espaço de tempo de jan/2025 a dez/2029(60 meses passos a frente).

uma comparação visual entre as distribuições das previsões dos modelos Fréchet- Γ .

A Tabela 7 apresenta o sumário descritivo das séries de máximos observados (SBMN/SBEG) e das previsões dos modelos Fréchet- Γ tanto para o período de ajuste (1982–2024) quanto para o horizonte futuro (2025–2029). Nota-se que o modelo Fréchet- Γ mantém média e mediana próximas a 26, ao mesmo tempo em que reduz substancialmente a variância e o coeficiente de variação no período futuro. Essa re-

Tabela 7: Sumário descritivo da série : máximos (SBMN/SBEG), Fréchet- Γ (jan/1982 a dez/2024),Fréchet- Γ (jan/2025 a dez/2029), respectivamente.

Descritiva	Máximo(SBMN/SBEG)	Fréchet- Γ (1982-2024)	Fréchet- Γ (2025-2030)
mínimo	4.00	8.41	18.44
1ºquartil	15.41	20.08	21.42
mediana	25.41	25.69	24.15
média	26.63	26.63	26.00
3ºquartil	36.87	32.44	29.41
máximo	61.77	90.97	47.08
variância	185.05	90.26	38.14
desvio padrão	13.60	9.50	6.18
amplitude	57.77	82.56	28.64
curtose	2.074	7.563	4.078
assimetria	0.247	1.244	1.166
CV(%)	51.07	35.67	23.77

dução indica menor dispersão das previsões e maior estabilidade no comportamento estimado.

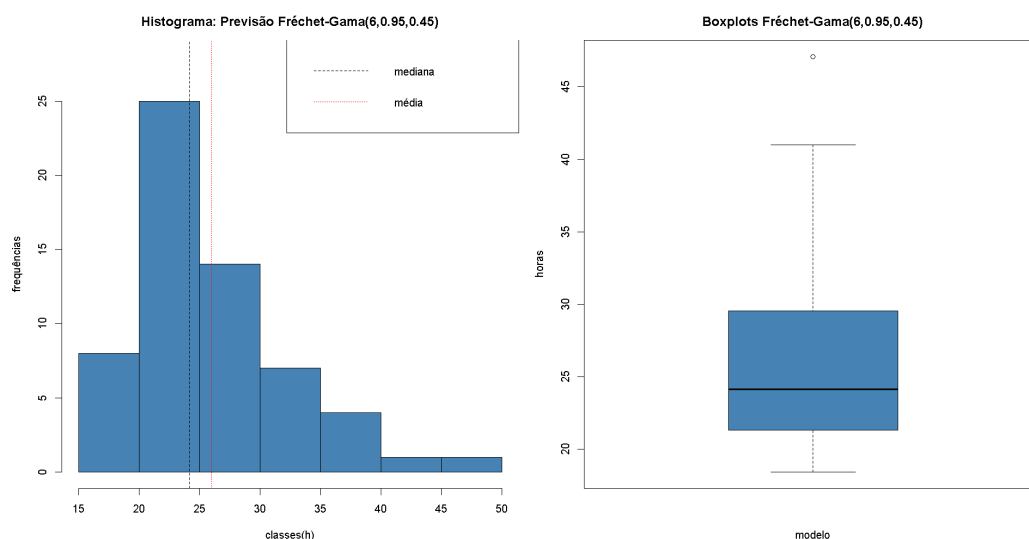


Figura 28: Histogramas e Boxplots das séries previsões:Modelo Fréchet-Gama(5.0,0.30,0.95) no espaço de tempo de jan/2025 a dez/2029 (60 meses a frente)

Da análise conjunta: Tabela 7 e Figura 28 (histograma e boxplot) se confirma a consistência do modelo Fréchet- Γ , evidenciando uma distribuição mais concentrada e simétrica em comparação ao período histórico. Essa característica sugere que o modelo captura adequadamente a dinâmica de longo prazo dos máximos mensais de trovoadas, produzindo previsões mais robustas e confiáveis para o horizonte de 2025 a 2029.

4.5.2.1 Validação do Modelo Fréchet- Γ através das previsões para o ano de 2025

A validação do modelo Fréchet-Gama foi realizada a partir da comparação de seu desempenho preditivo frente ao modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12], utilizando a série dos máximos mensais observados entre janeiro e outubro de 2025. A Tabela 8 apresenta os valores observados e as respectivas previsões de cada método. De modo geral, observa-se que o modelo Fréchet-Gama apresenta valores muito próximos aos máximos reais ao longo de todo o período analisado, enquanto o SARIMA demonstra maior variabilidade na discrepância entre o valor real e sua previsão.

O comportamento temporal dessas séries pode ser examinado na Figura 29. O gráfico conjunto destaca que o Fréchet-Gama acompanha de forma mais aderente as oscilações e pontos de inflexão da série real, especialmente nos meses de fevereiro, março, abril e setembro, onde o SARIMA apresenta diferenças substanciais em relação aos valores observados. O boxplot presente na mesma figura reforça essa conclusão: a distribuição do Fréchet-Gama é visualmente mais próxima da distribuição dos máximos reais, apresentando amplitude semelhante, mediana alinhada e ausência de discrepâncias marcantes. Em contraste, o SARIMA apresenta uma distribuição menos concentrada, indicando maior divergência entre previstos e observados.

Tabela 8: Previsões mensais para o ano de 2025(jan/out) através dos valores dos máximo(SBMN/SBEG), previsão SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] e Fréchet- Γ (5,0.30,0.95), respectivamente.

mês	máximo(SBMN/SBEG)	SARIMA(2,0,0)(2,0,0)[12]	F- Γ (5,0.30,0.95)
jan	26.10	27.54	25.01
fev	27.37	25.44	27.55
mar	30.46	33.79	29.71
abr	33.22	26.52	32.90
mai	32.39	27.69	33.71
jun	21.38	22.57	20.92
jul	16.67	18.34	16.90
ago	15.20	27.11	14.98
set	22.44	19.59	23.42
out	35.27	23.59	36.72
média	26.05	25.22	26.18
sd	6.98	4.46	7.27
mediana	26.74	25.98	26.28

A Figura 30 apresenta os histogramas das três séries. Nota-se que o histograma do Fréchet–Gama reproduz, com maior fidelidade, a forma da distribuição empírica dos máximos, tanto em termos de assimetria quanto de dispersão. Já o histograma do SARIMA apresenta maior distância da forma real, com distribuição mais concentrada e menor amplitude, sugerindo perda de informação sobre a variabilidade natural do processo.

A Tabela 9 sintetiza as métricas de validação, reforçando o superior desempenho do Fréchet–Gama em relação ao SARIMA. O RMSE (0.84) e o MAD (0.70) do modelo Fréchet–Gama são significativamente menores que os valores observados para o SARIMA (6.12 e 4.74, respectivamente), indicando erro médio substancialmente reduzido. O MAPE do Fréchet–Gama (2.58%) demonstra excelente precisão relativa, contra 19.79% do SARIMA. Além disso, o BIC do Fréchet–Gama (3.35) é muito inferior ao do SARIMA (43.14), sugerindo que o modelo apresenta melhor compromisso entre ajuste e complexidade. Embora o coeficiente de variação seja maior no Fréchet–Gama, indicando maior dispersão relativa de suas previsões, sua correlação com a série real (0.99) supera amplamente a obtida pelo SARIMA (0.45), evidenciando a forte aderência do modelo Fréchet–Gama ao comportamento dinâmico da série real.

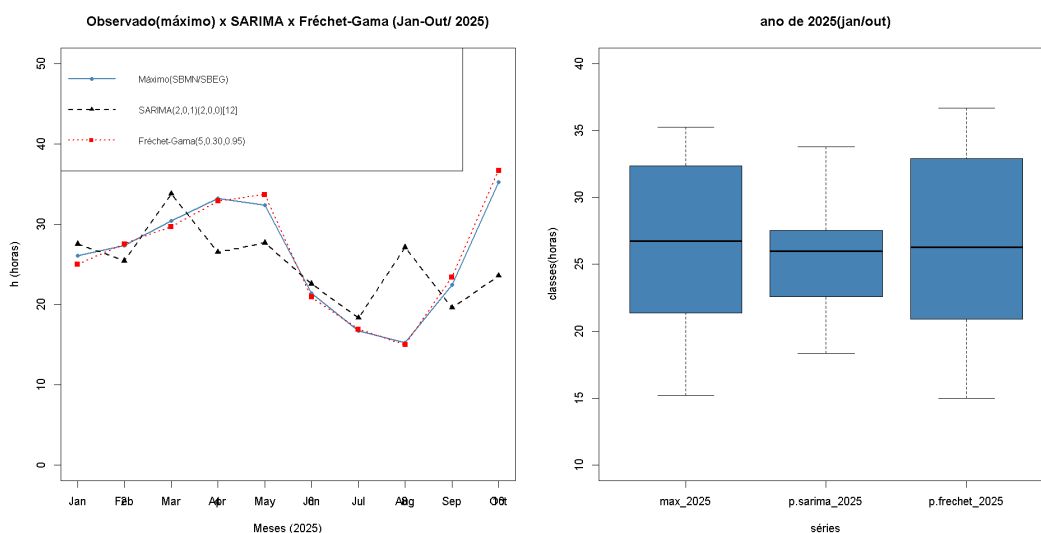


Figura 29: plotagem das séries e boxplots: máximo(SBMN/SBEG), previsões dos Modelos SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] e FRÉCHET- $\Gamma(5,0.30.0.95)$ no espaço de tempo de janeiro a outubro de 2025.

Em síntese, os resultados gráficos e numéricos demonstram que o modelo Fréchet–Gama apresenta desempenho superior ao modelo SARIMA na modelagem e previsão dos máximos mensais da série analisada para 2025, reproduzindo de forma mais

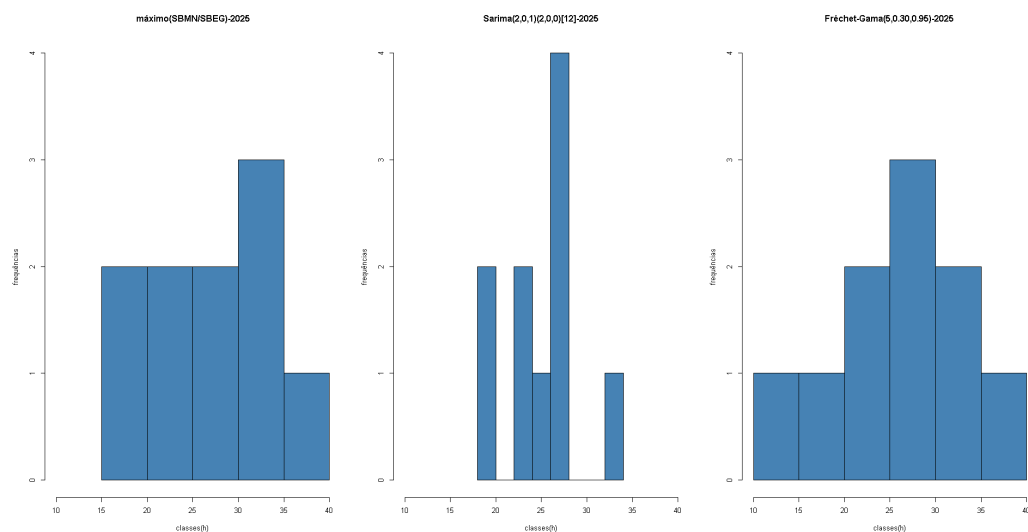


Figura 30: Histogramas das séries:Máximo(SBMN/SBEG), Modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] e fréchet-Gama(5,0,0.30,0.95) no espaço de tempo de janeiro a outubro de 2025.

Tabela 9: Sumário descritivo dos valores das métricas RMSE, MAD, MAPE, BIC, CV(%) e Correlação para as séries dos Máximos(SBMN/SBEG), previsões Modelo Fréchet- $\Gamma(5,0.30,0.95)$ comparado ao Modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] para o ano de 2025 de janeiro a outubro

Modelos	RMSE	MAD	MAPE	BIC	CV(%)	COR
SARIMA(2,0,1)(2,0,0)	6.12	4.74	19.79	43.14	17.68	0.45
Fréchet-Γ (5,0.30,0.95)	0.84	0.70	2.58	3.35	27.76	0.99

fiel a distribuição empírica, acompanhando com maior precisão a dinâmica temporal e apresentando melhores indicadores estatísticos de ajuste e previsão.

4.5.3 Uma síntese de sistemas de meteorológicos (climático/temporal) que influenciam na dinâmica das trovoadas

A região de Manaus apresenta clima equatorial úmido (Af), marcado por altas temperaturas, elevada umidade e forte convecção, condições propícias à ocorrência de trovoadas. A variabilidade desses eventos resulta da atuação conjunta de sistemas meteorológicos, como a Zona de Convergência Intertropical (ZCIT), brisas marítimas, ventos alísios e a Alta da Bolívia (AB), além da influência de fenômenos globais, como o El Niño-Oscilação Sul (ENOS), que em sua fase quente reduz a precipitação regional. Em Manaus, a maior frequência de trovoadas ocorre nos meses de setembro e outubro, quando o aquecimento superficial intensifica a instabilidade atmosférica. Esses episódios, frequentemente acompanhados de ventos fortes, descargas elétricas e chuvas intensas, acarretam impactos socioeconômicos relevantes, reforçando a importância de compreender os mecanismos atmosféricos locais e globais para subsidiar estratégias de monitoramento e mitigação.

4.5.3.1 Da variabilidade mensal climatológicas de horas de trovoadas

Das médias amostrais mensais de horas de trovoadas

A Tabela 10 apresenta a comparação entre os valores médios mensais, desvios amostrais e intervalos de confiança (95%) das séries de máximos observados (SBMN/SBEG) e das projeções do Modelo Fréchet- Γ (5, 0.30, 0.95), considerando os períodos de janeiro/1982 a dezembro/2024 e janeiro/2025 a dezembro/2029, respectivamente. Este último intervalo corresponde a uma projeção de 60 meses (5 anos) à frente.

Verifica-se que a série histórica apresenta média mensal de 26,62 h de trovoadas, com desvio-padrão de 5,90 h, enquanto o modelo Fréchet-Gama, ajustado ao mesmo período, reproduz valores ligeiramente superiores (média = 26,90 h; SD = 5,90 h). Para o horizonte futuro (2025–2029), o modelo indica média = 27,80 h e desvio-padrão = 6,10 h, sugerindo um leve incremento na variabilidade interanual, sem alteração expressiva na estrutura sazonal.

De modo geral, o comportamento das médias mensais e dos intervalos de confiança

revela boa coerência entre as séries observadas e simuladas, evidenciando a capacidade do modelo em reproduzir a distribuição climatológica das trovoadas em Manaus.

Síntese interpretativa:

- O modelo Fréchet- $\Gamma(5, 0.30, 0.95)$ reproduz adequadamente as médias mensais observadas, mantendo valores próximos de 26 a 28 horas, compatíveis com o regime climatológico regional.
- A variabilidade projetada para o período futuro ($SD \approx 6h$) indica discreto aumento em relação à série histórica, denotando leve ampliação da dispersão interanual.
- Os intervalos de confiança de 95% apresentam ampla sobreposição entre períodos, reforçando a consistência e estabilidade das previsões sazonais.

Tabela 10: Valores médios mensais, desvios amostrais e IC(95%) para as séries: máximos (SBMN/SBEG) e Modelo Fréchet- $\Gamma(5,0.30,0.95)$ para os períodos de jan/1982 a dez/2024 [n=516 (43 anos)] e jan/2025 a dez/2029 [h=60 (5 anos)], respectivamente.

mês	máximo	IC[95%]	F- $\Gamma(1982/2024)$	IC[95%]	F- $\Gamma(2025/2029)$	IC[95%]
jan	27.6	[23.5;31.8]	27.1	[24.9;29.2]	27.9	[25.0;30.8]
fev	24.9	[21.0;28.9]	25.3	[23.3;27.3]	26.4	[23.8;29.0]
mar	27.7	[23.4;32.1]	27.8	[25.4;30.2]	28.6	[25.5;31.8]
abr	31.1	[24.1;35.1]	30.5	[27.9;33.0]	31.2	[27.5;34.8]
mai	30.4	[26.0;34.7]	29.7	[27.0;32.3]	30.4	[27.2;33.5]
jun	21.7	[17.4;26.0]	22.3	[19.8;24.9]	23.2	[20.4;26.1]
jul	17.8	[14.1;21.6]	18.5	[16.2;20.8]	19.1	[16.3;21.9]
ago	16.3	[13.6;19.0]	17.3	[15.0;19.5]	18.0	[15.2;20.8]
set	22.8	[19.7;25.9]	23.6	[21.2;26.1]	24.2	[21.4;27.0]
out	31.8	[28.0;35.6]	32.1	[29.6;34.7]	32.8	[29.5;36.0]
nov	34.9	[30.9;38.8]	35.5	[32.8;38.2]	36.2	[32.7;39.8]
dez	32.5	[29.2;35.8]	33.0	[30.5;35.5]	33.7	[30.3;37.1]
média	26.62	[24.0;29.2]	26.90	[24.0;29.8]	27.80	[24.8;30.8]
sd	5.90	-	5.90	-	6.10	-
mediana	26.50	-	26.50	-	27.30	-

A Figura 31 ilustra os desvios padronizados das médias mensais de horas de trovoadas, destacando a semelhança entre os padrões históricos e projetados. Observa-se que o modelo Fréchet- Γ reproduz adequadamente a dinâmica sazonal dos máximos observados, mantendo coerência com a variabilidade climatológica, ainda que apresente leve subestimação nos extremos superiores. Esses resultados indicam que o Modelo

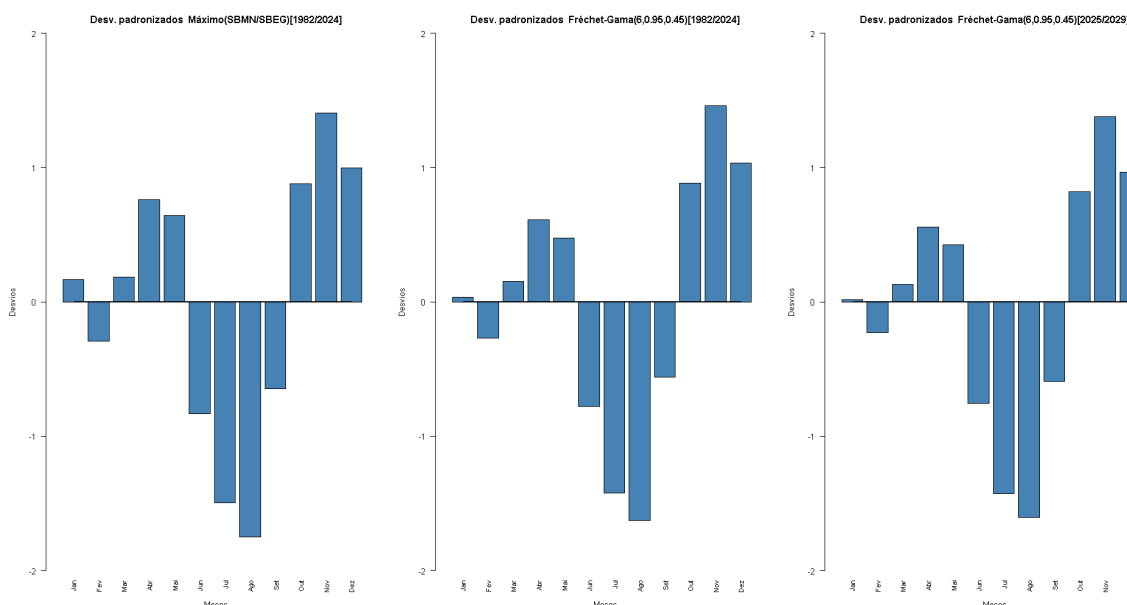


Figura 31: Desvios padronizados das médias mensais de horas de trovoadas: (à esquerda) série de máximos (SBMN/SBEG) no período de jan/1982 a dez/2024; (ao centro) série do modelo Fréchet- Γ (1982–2024); (à direita) série do modelo Fréchet- Γ para o horizonte futuro (2025–2029).

Fréchet- $\Gamma(5,0.30,0.95)$ consegue captar a sazonalidade e a magnitude média das trovoadas na região de Manaus, oferecendo uma representação consistente da variabilidade mensal.

Predição das Inclinações médias para o próximo quinquênio (jan/2025 a dez/2029)

A Tabela 11 apresenta o sumário descritivo das inclinações estimadas (em horas/mês) para as séries de máximos observados (SBMN/SBEG) e para as séries simuladas pelo modelo Fréchet- $\Gamma(5, 0.30, 0.95)$, considerando os períodos histórico (jan/1982–dez/2024) e futuro (jan/2025–dez/2029). Observa-se que a série de máximos históricos apresenta inclinação média de 0.0058 h/mês, com intervalo de confiança de [0.0018; 0.0098], indicando uma tendência positiva estatisticamente significativa ao longo do período analisado. Esse resultado sugere um leve crescimento nas horas de trovoadas observadas na Região Metropolitana de Manaus ao longo das últimas quatro décadas. Por outro lado, a inclinação estimada para o modelo Fréchet- Γ (1982–2024) é 0.0011 h/mês, com intervalo de confiança [-0.0093; 0.0030], indicando ausência de tendência significativa no período histórico, o que revela um comportamento essencialmente estacionário nas simulações.

Para o horizonte futuro (2025–2029), a inclinação média da série simulada é de

Tabela 11: Sumário descritivo das inclinações da série real máximo=(SBMN/SBEG)[jan/1982 a dez/2024] e séries simuladas: Fréchet- $\Gamma(5,0.30,0.95)$ para os períodos (jan/1982 a dez/2024) e (jan/2025 a dez/2029),respectivamente.

<i>Séries</i>	<i>inclinação (h/mês)</i>	<i>IC(95%) da inclinação(h/mês)</i>
máximo(SBMN/SBEG)	0.0058	[0.0018;0.0098]
Fréchet- Γ (1982-2024)	0.0011	[-0.0093;0.0030]
Fréchet- Γ (2025-2029)	0.0022	[-0.0091;0.0053]

0.0022 h/mês, com intervalo de [-0.0091; 0.0053]. Embora positiva, essa tendência permanece dentro de um intervalo que inclui zero, o que sugere crescimento suave, porém estatisticamente não significativo, mantendo estabilidade na estrutura temporal das projeções. De forma geral, o modelo Fréchet- Γ demonstra coerência com o padrão histórico, apresentando baixa variabilidade e estabilidade temporal das inclinações, além de conservar o comportamento médio das séries observadas.

Síntese interpretativa:

- A série observada (SBMN/SBEG) apresenta tendência crescente moderada (0.0058 h/mês), estatisticamente significativa.
- O modelo Fréchet- Γ reproduz adequadamente a estabilidade do período histórico (inclinação $\approx$ 0.0011 h/mês), sem tendência relevante.
- Para o período futuro (2025–2029), observa-se leve aumento da inclinação (0.0022 h/mês), coerente com a dinâmica simulada, mas ainda dentro da faixa de variação aleatória.
- Os intervalos de confiança das inclinações do modelo incluem zero, indicando que apenas a série observada apresenta tendência significativa ao longo do tempo.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

5.1 Conclusões

O presente estudo propôs e implementou um modelo dinâmico bayesiano estruturado na família Fréchet–Gama, direcionado à modelagem dos totais mensais de horas de trovoadas na Região Metropolitana de Manaus. A formulação teórica baseou-se em Modelos Lineares Dinâmicos Generalizados (MLDG) e em inferência bayesiana sequencial, considerando a distribuição de Fréchet como adequada para descrever fenômenos de natureza extrema.

Os resultados demonstraram que o modelo Fréchet– Γ dinâmico representa de forma satisfatória a dependência temporal e a variabilidade interanual dos máximos mensais, mostrando maior sensibilidade às flutuações sazonais e aos picos de intensidade. Em contraste, o modelo SARIMA, de estrutura essencialmente linear, embora capture adequadamente as componentes de tendência e sazonalidade, tende a suavizar os valores extremos, resultando em subestimação dos máximos observados.

A comparação dos ajustes revelou que o modelo Fréchet– $\Gamma(5,0.30,0.95)$ apresenta melhor aderência à distribuição empírica dos dados, reproduzindo de forma mais fidedigna os comportamentos não lineares característicos de eventos atmosféricos severos. Ainda que apresente ligeira elevação na variabilidade local, tal característica reflete sua capacidade de representar com maior realismo a incerteza inerente às trovoadas intensas.

A análise comparativa entre os modelos Fréchet– Γ , parametrizado por $(\alpha, \delta_{trend}, \delta_{seson})$, e SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_[12], permitiu identificar a abordagem de melhor desempenho para a previsão dos máximos mensais. As métricas de

erro (RMSE, MAD e MAPE) aplicados tanto a séries simuladas quanto observadas, indicaram que o modelo SARIMA(2,0,1)(2,0,0)[12] apresentou o melhor ajuste entre as configurações sazonais avaliadas, com RMSE = 11.31, MAD = 9.14 e MAPE=55.04 evidenciando boa capacidade de ajuste e parcimônia. Entretanto, o modelo Fréchet- Γ apresentou desempenho amplamente superior, sobretudo para o conjunto de parâmetros ($\alpha = 5.0, \delta_{trend} = 0.30, \delta_{season} = 0.95$), alcançando valores substancialmente menores de RMSE (4,43) e MAD (2,50) e MAPE=9.40, além de reproduzir com uma grande precisão a estrutura temporal e sazonal das séries observadas.

As análises gráficas e histogramas evidenciaram que o modelo Fréchet- Γ representa de forma mais adequada a distribuição de valores extremos, enquanto o SARIMA tende a atenuar as amplitudes máximas. A previsão para o horizonte 2025–2029 reforçou a consistência do modelo Fréchet- Γ , que manteve média e mediana próximas às observadas (≈ 26), com redução na variância e no coeficiente de variação, indicando maior estabilidade preditiva.

A avaliação climatológica final apontou que o modelo Fréchet- Γ reproduz fielmente o ciclo sazonal típico da região amazônica, com discreto aumento projetado nas horas médias de trovoadas ($\approx 27 - 28$ h/mês) e tendência positiva não significativa. Dessa forma, o modelo Fréchet- $\Gamma(5.0, 0.30, 0.95)$ destaca-se como a alternativa mais robusta para previsão de extremos convectivos em Manaus, conciliando consistência estatística, coerência física e aderência climatológica.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

A fim de dar continuidade a esta pesquisa, aprofundando aspectos não explorados no presente estudo ou aprimorando as formulações aqui desenvolvidas, sugere-se as seguintes direções para trabalhos futuros:

1. em Aplicação de Modelos Alternativos: Investigar a utilização de Modelos Lineares Generalizados (MLG) como alternativa ou complemento ao modelo dinâmico proposto, avaliando seu desempenho na modelagem das séries temporais.
2. Expansão para Outras Variáveis Meteorológicas: Aplicar o modelo desenvolvido a diferentes variáveis meteorológicas, permitindo uma análise mais abrangente dos fenômenos atmosféricos da região estudada.
3. Diversificação das Escalas Temporais: Explorar a aplicação do modelo em escalas temporais distintas, como diária e horária, a fim de verificar sua adaptabilidade e capacidade preditiva em diferentes resoluções temporais.
4. Ampliação do Número de Fontes de Observação: Expandir a formulação atual para considerar mais de duas fontes de observação, analisando o impacto dessa extensão na precisão e robustez das estimativas geradas pelo modelo.

Essas direções possibilitam aprimorar a aplicabilidade e a eficácia dos modelos dinâmicos, ampliando seu uso na previsão e análise de séries temporais meteorológicas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 AGUIRRE, L. A. Introdução à Identificação de Sistemas, Técnicas Lineares e Não lineares Aplicadas a Sistemas Reais. Belo Horizonte, Brasil, EDUFMG. 2004.
- 2 ALONSO, Marcelo Félix; SARAIVA, Jaci Maria Bilhalva. Revista Brasileira de Geofísica, Estudo numérico do papel dos esquemas de Convecção na simulação de um evento severo nos extratropicos do Brasil. São Paulo, v.25, n.3, jul-set, 2007.
- 3 ALVES, M.B. Funções de transferência em Modelos Dinâmicos Lineares Generalizados. Tese de Doutorado em Estatística. Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática-CCMN, jun, 2006.
- 4 ANDRADE, Lene da Silva; Variabilidade Decadal da Zona de Convergência Intertropical e sua influência na Pluviosidade da Região Norte do Brasil. Maceió, 2007. Dissertação (Mestrado em Meteorologia). Universidade Federal de Alagoas (UFAL), 2007.
- 5 ANNA CAROLINA.B ; PEDRO GUILHERME.C.F.; Análise de séries temporais em R: curso introdutório. 1. Ed. – Rio de Janeiro: Elsevier: FGV IBRE, 2018.
- 6 ALVES, M.B. (2006) Funções de Transferência em Modelos Dinâmicos Lineares Generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática CCMN.
- 7 AZEVEDO, A. F. Análise climatológica-probabilística dos casos de fechamentos operacionais para pouso e decolagem no aeroporto Zumbi dos Palmares (Maceió-Al) no período de 1959 a 2002. Maceió: UFAL, 2005. Dissertação

(Mestrado em Meteorologia), Faculdade de Meteorologia, Universidade Federal de Alagoas, 2005.

- 8 AZZALINI, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12, 171–178.
- 9 AZZALINI, A. e Dalla Vale, A. (1996). The Multivariate Skew-Normal distribution. *Biometrika*, 83, 715–726.
- 10 BAHARITH, L. A et al. The beta generalized inverse Weibull distribution. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, v.4, n.2, p.252-270, 2014.
- 11 BARRETO-SOUZA, W., CORDEIRO, G. M. and SIMAS, A. (2011). Some Results for Beta Frechet Distribution. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 40, 798-811.
- 12 BERGMAN, J. W.; SALBY, M. L. The role of cloud cover and their relationship to climatological conditions. *Journal of Climate*, v.9, n.11, p. 2802-2820, 1996.
- 13 BERRI, G.; INZUNZA, J. The effect of the low level jet on the poleward water vapour transport in the central region of South America. *Atmospheric Environment*, v. 27A, p.335-341, 1993.
- 14 BETTS, A. K. Non-precipitating cumulus convection and its parametrization. *airmass environment. Bulletin of the American Meteorological Society*, v. 33, p. 303.
- 15 BORNA, Laura de Simone.; NOBRE, carlos. Secas na Amazônia (causas e consequências). São Paulo: oficina de textos, 2013
- 16 BRASIL. Comando da Aeronáutica, Diretoria de Eletrônica e Proteção ao vôo, Manual de Códigos Meteorológicos- MCA 105-10. (Rio de Janeiro), 2010.
- 17 BRASIL. Comando da Aeronáutica, Diretoria de Eletrônica e Proteção ao vôo, Manual de Estações Meteorológicas de Superfície- MCA 105-2. (Rio de Janeiro), 2011.
- 18 BROWNING, K. A. The structure and mechanisms of hailstorms. Hail: A Review of Hail Science and Hail Suppression, *Meteor. Monogr.*, n. 38. *Bulletin of the American Meteorological Society*, p. 1-43, 1977. 61, 88.

- 19 BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. (1976) Times series analysis: forecasting and control. San Francisco: Holden- Day.
- 20 BYERS, H. R.; BRAHAM, R.R. The thunderstorm - report of the thunderstorm caused by the metropolitan area of Washington, D. C. Journal of Applied Meteorology, n. 14,p. 1050-1060, 1975. 64.
- 21 CARVALHO, M.A.V. Variabilidade da largura e intensidade da zona de convergência Intertropical Atlântica: aspectos Observacionais e de modelagem. Dissertação (Mestrado em Meteorologia)- Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São Jose dos Campos:INPE, 2011.
- 22 CARVALHO, João da Silva. Caracterização hidrogeológica da região a norte da cidade de Manaus, com base em informações geofísicas (resistividade elétrica), geológicas e geomorfológicas. Manaus: INPA, 2012. Tese (Doutorado em Clima e Ambiente), Instituto Nacional de Pesquisa da Amazônia, Manaus, 2012.
- 23 CASSELLA, G.; BERGER, B.L Inferência Estatística. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. p. 238. item 5.8.1.
- 24 CASSELLA, G.; BERGER, B.L Inferência Estatística. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. p. 481. item 11.3.
- 25 CAVALCANTI, I. A. Um estudo sobre as interações entre os sistemas de circulação de escala sinótica e circulações locais. Dissertação (Mestrado em Meteorologia), INPE-2494- TDL, 133p. São José dos Campos, São Paulo, 1982.
- 26 CHIOGNA, M. and GAETAN, C. (2002). Dynamic generalized linear models with application to environmental epidemiology. Applied Statistics, 51, 453-468.
- 27 Chiogna, M.; Gaetan, C. (2002). "Dynamic generalized linear models with application to environmental epidemiology." Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics), 51(4), 453-468.
- 28 COHEN, J.C.P. Um estudo observacional de Linhas de Instabilidade na Amazônia. Dissertação (Mestrado em Meteorologia). INPE-4865-TDL/376, 174p. São José dos Campos, São Paulo, 1989.
- 29 COHEN, J. C. P.; SILVA DIAS, M. A. F.; NOBRE, C. A. Aspectos climatológicos das linhas de instabilidade na Amazônia. Climanálise – Boletim de Monitoramento e Análise Climática, v. 4, n.11, p. 34-40, 1989.

- 30 COHEN, J. C. P.; SILVA DIAS, M. A. F.; NOBRE, C. A. Environmental conditions associated with Amazonian Squall Lines: A case study. *Monthly Weather Review*, v. 123, n. 11, p. 3163-3174, 1995.
- 31 COSTA FERREIRA, P.G et al. *Análise de Séries Temporais em R: curso introdutório*. organização Pedro Guilherme Costa Ferreira, 1.ed. Rio de Janeiro: Elsevier: FGV IBRE, 2018.
- 32 COSTA NETO, Pedro L. O. *Estatística*. São Paulo: Edgar Blucher, 2002.
- 33 COX, D.R. (1981). Statistical analysis of time-series: some recent developments. *Scandinavian Journal of Statistics*, 8, 93-115.
- 34 DANTAS, C.A.B. *Probabilidade: Um curso Introdutório*. 3.ed. São Paulo, Brasil, Editora da Universidade de São Paulo, 2013.
- 35 DE AMORIM, W.N. (2019). *Ciências de dados, poluição do ar e Saúde*. Dissertação de Mestrado em Estatística. Universidade de São Paulo.
- 36 DOBSON, A.J. (2002). *An Introduction to Generalized Linear Models*. 2nd edition, Chapman and Hall, New York.
- 37 DOS SANTOS, T.R.; GAMERMAN, D.; FRANCO, G.C. *Gamma Family of Dynamic Models*. UFOP, MG, Brazil. Disponível em :E-mail: thiagors@iceb.ufop.br.
- 38 DOBSON, A. J. (2002). *An Introduction to Generalized Linear Models* (2^a ed.). Chapman ; Hall/CRC. ISBN 978-1584881650.
- 39 FIGUEROA, S.N.; NOBRE, C.A. Precipitations distribution over Central and western Tropical South America. *Climanálise-Boletim de Monitoramento e Análise Climática*, v.5, n.6, p.36-45, 1990, *Forecasting*, v.7, p.588-612, 1992.63.
- 40 GAMERMAN, D. (1991). Dynamic Bayesian Models for Survival Data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, vol 40, n.º 1, pp. 63-79.
- 41 GAMERMAN, D. (1998). Markov chain Monte Carlo for dynamic generalised linear models. *Biometrika*, vol 85, n.º 1, pp. 215-227.
- 42 Hemming, K.; Shaw, J.E.H. (2002). A parametric dynamic survival model applied to breast cancer survival times. *Applied Statistics*, 51(4), 421-435.

- 43 FELÍCIO, R.A.; Trovoadas. 2005. (Desenvolvimento de material didático- climatologia). Disponível em <<http://www.geografia.fflch.usp.br>>.
- 44 GIVENS, GEOFF. Computational Statistics/Geof H. Givens, Jennifer A, Hoeting -2nd ed, Hoboken, New Jersey, USA, 2013.
- 45 Goldstein, M.; Wooff, D. (2007). Bayes Linear Statistics: Theory and Methods. Chichester: Wiley. ISBN 978-0-470-01562-9. Link para o livro na Wile.
- 46 HARRISON, P.J.; STEVENS, C.F. Bayesian Forecasting. Journal of the Royal Statistical Society: series B, v.38, n.3, p.81-135, 1976.
- 47 HARRISON, P. J. (1997). Bayesian Forecasting and Dynamic Models (2ª edição). New York: Springer. ISBN 978-0387946366.
- 48 HARVEY, D. (2004). The New Imperialism. Oxford University Press. ISBN 978-0199278084. Link para o livro na Oxford University Press.
- 49 INSTITUTO PORTUGUÊS DO MAR E DA ATMOSFERA (IPMA)- 2024. Disponível em <<http://www.ipma.pt/educativa/fenomenos.meteo.>> acesso em 19 abr 2024.
- 50 IPCC, 2023: Sumários para formuladores de políticas. Em: Mudança do clima 2023: Relatório síntese. Contribuição dos grupos de trabalho I, II e III para o Sexto Relatório de Avaliação do Painel Intergovernamental sobre Mudança do Clima [Equipe principal de redação, H Lee e J. Romero (eds.)]. IPCC, Genebra Suíça, pp.1-34, doi:10.59327/IPCC/AR6-9789-291647.001.
- 51 JAMES, B.R. Probabilidade: um curso em nível intermediário. Rio de Janeiro, Brasil, Instituto de matemática Pura e Aplicada, 1981.
- 52 KAGANO, M. T. Um estudo climatológico e sinótico utilizando dados de radiossondagem (1968-1976) de Manaus e Belém. Dissertação (Mestrado em Meteorologia). INPE-1559- TDL/013, 111p. São José dos Campos, São Paulo, 1979.
- 53 KALMAN, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. ASME Journal of Basic Engineering, 82(1), 35–45.
- 54 KALMAN, R. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. of Basic Engineering (Series D) 82:35-45.

- 55 KALMAN, R. (1961). On the general theory of control systems, Proc. IFAC CongrIst. 1:481-491.
- 56 KALMAN, R. (1968). Contributions to the theory of optimal control, Bol. Soc. Mat. Maxicana 5: 558-563.
- 57 KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Journal of Basic Engineering (Transactions of the ASME, Series D), Vol. 83, No. 1, pp. 95-108.
- 58 KAYANO, M. T.; MOURA, A. D. 1986. O El Niño de 1982- 83 e a Precipitação sobre a América do Sul. Revista Brasileira de Geofísica. 4(2): 201- 214.
- 59 KELLER,A.Z.;KAMATH,A.R.R.;PERERA,J.D.Reliability analysis of CNC machine tools.Reliability Engineering,V.3,n.6,p.449-473,1982.
- 60 KLEIBER, C.; ZEILEIS, A. (2008). Applied Econometrics with R. Springer. ISBN 978-0-387-77316-2. DOI: 10.1007/978-0-387-77318-6
- 61 KINAS, Paul G. .HUMBER, Paul G.H.Introdução à análise bayesiana (com R).Porto Alegre, Brasil:maisQnada,2010.
- 62 KOTZ,S.;NADARAJAH,S.(2000).Extreme value Distributions:Theory and Applications.Imperial College Press.
- 63 KOUSKY, V. E.; KAYANO, M. T. Principal modes of outgoing longwave radiation and250-mb circulation for the South American sector. Journal of Climate, v. 7, n. 7, p.1131-1138, 1994.
- 64 LEVINE, D. M.; BERENSON, M. L. Business Statistics for quality and productivity.Prentice Hall, 1995.
- 65 LIMA, Fabiano Guasti. Um método de análise e previsão de sucessões cronológicas unidimensionais lineares e não-lineares. São Paulo, 2004. Tese (Doutorado em Administração),Universidade de São Paulo, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Departamento de Administração, 2004.
- 66 LIMA, Maria Andréa. Iniciação de Tempestade Convectivas em um Ambiente Tropical Úmido. Botucatu, 2008. Tese (Doutorado em Agronomia- Energia na Agricultura),Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Faculdade de Ciências Agronômicas Campus de Botucatu, 2008.

- 67 MACHADO, E. C. A Distribuição Fréchet Generalizada. 2013. 100f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Campina Grande, 2013.
- 68 MAKRIDAKIS, S.; WHEELWRIGHT, S. C.; HYNDMAN, R. J. Forecasting, Methods and Applications. 3th. Ed. (S.I): John Wiley Sons, 1998.
- 69 MARENGO, J. A. Interdecadal variability and trends of rainfall across the Amazon basin. *Theoretical Applied Climatology*, v. 78, p. 79-96, 2004. doi:10.1007/s00704-004-0045-8.
- 70 MENDONÇA, Francisco; DANNI-OLIVEIRA, Inês Moresco. *Climatologia noções básicas e climas do Brasil*. São Paulo: Oficina de textos, 2007.
- 71 MIGON, H. S.; HARRISON, P. J. (1985). An application of dynamic generalized linear models to the analysis of Poisson data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 34(3), 275–282.
- 72 MIGON, H. S. (1984). Bayesian inference for dynamic generalized linear models. In *Bayesian Statistics 2*, eds. J. M. Bernardo, M. H. DeGroot, D. V. Lindley, and A. F. M. Smith, pp. 615–632. Amsterdam: North-Holland.
- 73 MILONE, Giuseppe. *Estatística Geral e Aplicada*. São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- 74 MOLION, L. C. B. Climatologia Dinâmica da região Amazônica: Mecanismos de precipitação. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 2, n. 1, p. 107-117, 1987.
- 75 MOLION, L. C. B. Informação sobre a contribuição dos VCAN nos elevados índices pluviométricos na costa Paraense. Comunicação feita a Mauro Silva, maio de 2002.
- 76 MOLION, L. C. B. On the dynamic climatology of the amazon basin and associated rain producing mechanisms. In *the Geophisiology of Amazonia vegetation and climate interactions*, ed. By R. E. Dickinson. *Wiley Series in Climate and Biosphere*, cap. 18, p. 391-407, 1987.
- 77 MOLION, L. C.; KOUSKY, V. E. Climatologia da dinâmica da troposfera sobre a Amazônia. Relatório Técnico, INPE-3560-PRE/480, 4p., São José do Campos, São Paulo, 1985.

- 78 MOLION, L. C. B. 2004. Aquecimento Global, Manchas Solares, El Niño e Oscilação Decadal do Pacífico ([http:// Geocities](http://Geocities).
- 79 yahoo.com.br/zuritageo/aquecimentoglobal.htm). Acesso: 07/2011. (Links).
- 80 MORETTIN, P. A.; TOLOI, C.M. de C. Análise de séries temporais. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.
- 81 MORETTIN, Pedro A.; CLÉLIA M. C Toloi. Análise de Séries temporais. 2a Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
- 82 MOTA, M. A. S. Convecção na Amazônia: variabilidade, efeitos e resposta na circulação de grande escala. São José dos Campos, 2007. Tese (Doutorado em Meteorologia), Ministério da ciência e tecnologia, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2007.
- 83 MEYER, Paul I. Probabilidade: Aplicações à estatística. Rio de Janeiro, Brasil: Livros Técnicos e científicos, 1980.
- 84 MORETTIN, P.A. Análise de séries temporais: Modelos lineares univariados. vol 1; 3.ed. São Paulo, Brasil: Blücher, 2018.
- 85 OLIVEIRA, A.S. Interações entre sistemas na América do Sul e convecção na Amazônia. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Meteorologia). INPE-4008-TDL/239, 246p. São José dos Campos, São Paulo, 1986.
- 86 OLIVEIRA, A. P.; FITZJARRALD, D. R. The Amazon river breeze and the local boundary layer: I – Observations. Boundary Layer Meteorology, v. 63, n. 1-2, p. 141-162, 1993.
- 87 OLIVEIRA, A. S. Interações entre sistemas na América do Sul e convecção na Amazônia. Dissertação (Mestrado em Meteorologia). INPE-4008-TDL/239, 246p. São José dos Campos, São Paulo, 1986.
- 88 PETRIS, G.; PETRONE, S.; CAMPAGNOLI, P. (2008). Dynamic Linear Models with R. Springer Series in Statistics. New York: Springer.
- 89 NETO, C.; DE OLIVEIRA, P.L. Estatística. 2.ed. São Paulo: Editora Blücher, 2002. p. 28. item. 2.3.3.

- 90 OLIVEIRA, Lucimar Luciano de; VIANELLO, Rubens Leite; FERREIRA, Nelson Jesus. *Meteorologia Fundamental*. Erechim/RS: EdIFAPES, 2001.
- 91 OLIVEIRA, Flávio Mendes; ARAÚJO, Rutenio Araújo; CARVALHO, João Silva; COSTA, Solange Santos. Determinação da variação no microclima de Manaus-AM por atividades antropogênicas e modulações climáticas naturais. *Acta Amaz.* Vol.38 Manaus Dec. 2008.
- 92 DA SILVA, A.R. *Métodos de Análise Multivariada em R*. Piracicaba-SP, Brasil: Fealq, 2016.
- 93 SILVA, A.L.; RODRIGUES, J.A.; SILVA, G.O. A Distribuição beta Fréchet transmutada propriedade e aplicação. DOI: <http://dx.doi.org/10.29069/forscience.2015v3n1.e103>.
- 94 SALVADÓ, A.; GARGALLO, P. (2005). Bayesian dynamic models for non-Gaussian time series: An application to insurance ratemaking. *Insurance: Mathematics and Economics*, 36(1), 65–83.
- 95 QUEIROZ, Antônio Paulo de. Monitoramento e previsão imediata de tempestades severas usando dados de radar. São José dos Campos: INPE, 2009. Dissertação (Mestrado em Meteorologia), Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2008.
- 96 SILVESTRE BEZERRA, M.I. Apostila de Séries Temporais. DMEC/FCT/UNESP. São Paulo, 2006. p.58-59.
- 97 VAREJÃO-Silva, M.A., *Meteorologia e Climatologia*. Ministério da Agricultura, Instituto Nacional de Meteorologia. Gráfica e editora Stilo, Brasília, 2000.
- 98 AKAN, M.; TEVFIK, A.T. (2020). *Fundamentals of Finance: Investments, Corporate Finance, and Financial Institutions*. Walter de Gruyter. ISBN 978-3-11-070534-8.
- 99 TRIANTAFYLLOPOULOS, K. (2009). Inference of dynamic generalized linear models: on-line computation and appraisal. *International Statistical Review*, 77(3), 430-450. White Rose Research Online.
- 100 TRIANTAFYLLOPOULOS, K.; HARRISON, P.J. (2009). Posterior mean and variance approximation for regression and time series problems. *International Statistical Review*, 42, 329-350. White Rose Research Online.

- 101 VOSS,JOCHEN.An Introduction to statistical computing: a simulation-based approach/Jochen Voss-fist edition, British library,New Delhi, India,2013.
- 102 VAREJAO-Silva, M.A. 2006. Meteorologia e Climatologia. Recife (PE). Versao Digital.
- 103 WEST, M., HARRISON, P. J.; Migon, H. S. (1985). Dynamic generalized linear models and Bayesian forecasting. Journal of the American Statistical Association (JASA), 80(389), 73–83.
- 104 WEST,M, and HARRISON, J.(1997,1999). Bayesian Forecasting and Dynamic Models, 2nd edn, Springer, New York.
- 105 WEST, M., HARRISON,J. and MIGON,H. (1985). Dynamic generalized linear models and Bayesian forecasting, Journal of the American Statistical Association 80:73-83.
- 106 WIKIPEDIA.Fréchet distribution.disponível em:(< [https](https://en.wikipedia.org/wiki/Frchet_distribution) :
//en.wikipedia.org/wiki/Frchet – distribution >)acesso em 01 mar 2025.