UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ROBERTA DOS SANTOS RODRIGUES

CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM CONTEXTO FORMATIVO NO ÂMBITO DE PROPORCIONALIDADE

MANAUS
2025

ROBERTA DOS SANTOS RODRIGUES

CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM CONTEXTO FORMATIVO NO ÂMBITO DE PROPORCIONALIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática/PPGECIM da Universidade Federal do Amazonas/UFAM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Eteval da Silva Feitosa

MANAUS

2026

Ficha Catalográfica

Elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

R696c Rodrigues, Roberta dos Santos
Conhecimento matemático especializado de futuros professores de matemática em um contexto formativo no âmbito de proporcionalidade / Roberta dos Santos Rodrigues. - 2026.
325 f. : il., color. ; 31 cm.

Orientador(a): Francisco Eteval da Silva Feitosa.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Manaus, 2026.

1. MTSK. 2. Pensamento Proporcional. 3. Teoria das Situações Didáticas. 4. Formação Inicial de Professores. 5. Tarefas Formativas. I. Feitosa, Francisco Eteval da Silva. II. Universidade Federal do Amazonas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título

---

Roberta dos Santos Rodrigues

CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM CONTEXTO FORMATIVO NO ÂMBITO DE PROPORCIONALIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática/PPGECIM da Universidade Federal do Amazonas/UFAM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Francisco Eteval da Silva Feitosa
Presidente da Banca

_____

Profa. Dra. Yachiko Nascimento Wakiyama
Membro Interno

_____

Profa. Dra. Darlane Cristina Maciel Saraiva
Membro Externo

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela dádiva da vida e por todas as oportunidades que me foram concedidas ao longo desta trajetória, tornando possível a realização desta conquista.

Aos meus pais, expresso minha profunda gratidão por todo o apoio, incentivo e confiança durante esta etapa da minha formação, fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu orientador, com quem tenho a alegria de trabalhar desde o segundo ano da graduação, em 2020, agradeço por ter sido um dos principais responsáveis pelo meu crescimento acadêmico ao longo desses seis anos de parceria. Sou grata pelas inúmeras oportunidades acadêmicas, profissionais e pessoais compartilhadas, bem como pela orientação cuidadosa e constante. Mais do que orientador, tornou-se um grande amigo.

Agradeço também a todos os membros da minha família, que desde cedo me incentivaram a valorizar os estudos, a persistir diante dos desafios e a buscar minhas conquistas com dedicação e esforço.

Aos meus “mateamigos”, companheiros desde o início da graduação, deixo meu carinho e gratidão pelo apoio constante, pela torcida sincera e por celebrarem comigo cada conquista ao longo desse caminho.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), que, por meio do Programa de Apoio à Pós-Graduação Stricto Sensu – POSGRAD/FAPEAM (2024–2025), possibilitou a realização das atividades de pesquisa e a participação em eventos científicos, contribuindo para a divulgação desta pesquisa desenvolvida em território amazônico.

RESUMO

A proporcionalidade é um conceito central da Matemática, dada sua ampla presença em diferentes campos da área, suas aplicações em outras ciências e sua recorrência em situações do cotidiano. Apesar de sua relevância, pesquisas evidenciam dificuldades persistentes no ensino e na aprendizagem desse tópico, que permeiam desde o Ensino Básico até a formação de professores de matemática, especialmente quanto à compreensão das diferentes classes de problemas que mobilizam o pensamento proporcional. Considerando o papel decisivo do professor nesse processo, esta pesquisa teve como objetivo investigar o conhecimento matemático especializado revelado e desenvolvido por futuros professores de matemática em um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade. A investigação foi orientada pelo modelo teórico-analítico Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK), criado por Carrillo e colaboradores, com ênfase no subdomínio KoT, e o contexto formativo foi estruturado por tarefas envolvendo distintas classes de problemas do pensamento proporcional, desenvolvidas segundo as etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau. A pesquisa adotou abordagem qualitativa, com delineamento de estudo de caso instrumental, e os dados foram analisados por meio da Análise de Conteúdo à luz das categorias do MTSK. Os resultados indicam que os futuros professores mobilizaram conhecimentos relevantes sobre proporcionalidade, porém de forma desigual e com distintos níveis de formalização, articulação e generalização. Observou-se predominância inicial de estratégias procedimentais, como a regra de três, que evoluíram, ao longo das tarefas, para abordagens que demandam maior domínio conceitual, como as estratégias escalar e funcional e a busca pelo valor unitário, bem como para justificativas mais fundamentadas acerca da existência de relações proporcionais. Persistiram, contudo, dificuldades na utilização da expressão algébrica como ferramenta de resolução e na apropriação das classes de problemas como categorias organizadoras do pensamento proporcional. Embora a institucionalização tenha favorecido o reconhecimento de características estruturais das situações, seus limites tornaram-se evidentes quanto à generalização conceitual e à produção autônoma de novos problemas. Conclui-se que o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado sobre proporcionalidade, na formação inicial, não se reduz à proposição de tarefas diversificadas, mas exige contextos formativos estruturados por uma intencionalidade explícita de revelar, problematizar e desenvolver esse conhecimento. Tal processo demanda institucionalização sistemática que explicite as estruturas matemáticas subjacentes e favoreça a tomada de consciência das categorias que organizam o pensamento proporcional.

Palavras-chave: MTSK. Pensamento Proporcional. Teoria das Situações Didáticas. Formação Inicial de Professores. Tarefas Formativas.

ABSTRACT

Proportionality is a central concept in Mathematics due to its wide presence across different fields of the discipline, its applications in other sciences, and its recurrence in everyday situations. Despite its relevance, research has identified persistent difficulties in the teaching and learning of this topic, spanning from Basic Education to initial teacher education, particularly regarding the understanding of the different classes of problems that mobilize proportional reasoning. Considering the decisive role of the teacher in this process, this study aimed to investigate the specialized mathematical knowledge revealed and developed by prospective mathematics teachers from a public university in Amazonas, Brazil, within a teacher education context focused on proportionality. The investigation was guided by the theoretical-analytical model Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK), created by Carrillo and collaborators, with emphasis on the KoT subdomain, and the educational context was structured around tasks involving distinct classes of proportional reasoning problems, developed according to the phases of action, formulation, validation, and institutionalization proposed by the Theory of Didactical Situations, by Brousseau. The study adopted a qualitative approach, designed as an instrumental case study, and the data were analyzed through Content Analysis in light of the MTSK categories. The results indicate that the prospective teachers mobilized relevant knowledge related to proportionality; however, this knowledge was uneven and exhibited varying levels of formalization, articulation, and generalization. An initial predominance of procedural strategies, such as the rule of three, was observed, which gradually evolved into approaches requiring greater conceptual understanding, including scalar and functional strategies and the search for the unit rate, as well as more substantiated justifications concerning the existence of proportional relationships. Nevertheless, difficulties persisted in using algebraic expressions as problem-solving tools and in appropriating classes of problems as organizing conceptual categories of proportional reasoning. Although the institutionalization phase supported the recognition of structural characteristics of the proposed situations, its limitations became evident with regard to conceptual generalization and the autonomous production of new problems. It is concluded that the development of specialized mathematical knowledge on proportionality in initial teacher education does not result merely from the use of diversified tasks, but requires educational contexts structured by an explicit intentionality to reveal, problematize, and develop such knowledge. This process demands systematic institutionalization that makes explicit the underlying mathematical structures and fosters awareness of the categories that organize proportional reasoning.

Keywords: MTSK. Proportional Thinking. Theory of Didactical Situations. Initial Teacher Instruction. Tasks for Teacher Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES E QUADROS

Quadro 1 – Habilidades propostas pela BNCC para os Anos Finais nas quais o pensamento proporcional é prevalente 26
Figura 1 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo 34
Quadro 2 – Categorias de problemas envolvendo pensamento proporcional propostas por Lesh, Post e Behr (1988) 34
Figura 2 – Domínios e subdomínios do modelo MTSK 38
Quadro 3 – Subdomínios do MK e suas respectivas categorias 46
Quadro 4 – Subdomínios do PCK e suas respectivas categorias 53
Figura 3 – Relação entre o MTSK dos professores e suas concepções sobre matemática, seu ensino e aprendizagem 54
Quadro 5 – Situações propostas na TpF 1 63
Figura 4 – Possível esquema de solução para o item a) da Situação 1. 65
Figura 5 – Possível esquema de solução para o item b) da Situação 1. 65
Figura 6 – Possível esquema de solução para o item c) da Situação 1. 65
Quadro 6 – Conhecimentos esperados dos participantes na resolução da TpF1. 67
Quadro 7 – Situações propostas nas TpF 2 68
Figura 7 – Possível esquema de solução para a Situação 1. 69
Figura 8 – Possível esquema de solução para a Situação 2. 70
Quadro 8 – Conhecimentos esperados dos participantes na resolução da TpF2. 70
Quadro 9 – Situações propostas nas TpF 3 71
Figura 9 – Representação figural e algébrica da Situação 1. 72
Figura 10 – Possível esquema de solução para a Situação 2. 73
Figura 11 – Gráfico das relações propostas na Situação 3. 74
Quadro B1 – Questões 3 a 9 do questionário diagnóstico. 126
Figura B1 – Justificativa dos participantes A e C, respectivamente, para caracterizar uma situação de proporcionalidade no problema 3. 128
Figura B2 – Justificativa dos participantes D e F, respectivamente, para caracterizar uma situação de proporcionalidade no problema 3. 129
Figura B3 – Resolução da participante B à questão 3. 130
Figura B5 – Resolução do participante A à questão 3. 132
Figura B6 – Justificativa dos participantes C e E, respectivamente. 133

Figura B7 – Justificativa dos participantes A, D e F para caracterizar uma situação de proporcionalidade no problema 4. 134
Figura B8 – Resolução dos participantes A e C à questão 4. 135
Figura B9 – Resolução da participante D à questão 4. 136
Figura B10 – Resposta da participante F à questão 4. 136
Figura B11 – Resposta da participante B à questão 4. 137
Figura B12 – Resposta do participante E à questão 4. 137
Figura B13 – Justificativa dos participantes A e C, respectivamente, para caracterizar uma situação de proporcionalidade no problema 5. 140
Figura B14 – Resposta das participantes B e C à questão 5. 141
..... 142
Figura B15 – Resposta dos participantes A e F à questão 5. 142
Figura B16 – Resposta do participante E à questão 5. 142
Figura B17 – Resposta da participante D à questão 5. 143
..... 145
Figura B18 – Resposta dos participantes A, C, D e E à questão 6. 145
Figura B19 – Resposta das participantes B e F à questão 6. 145
Figura B20 – Resposta do participante A à questão 7. 148
Figura B21 – Resposta do participante C à questão 7. 149
Figura B22 – Resposta do participante A à questão 8. 150
Figura B23 – Resposta do participante B à questão 8. 151
Figura B24 – Resposta do participante C à questão 8. 152
Figura B25 – Resposta do participante A à questão 9. 154
Figura B26 – Resposta do participante C à questão 9. 155
Figura B27 – Resposta do participante C à questão 9. 156
Quadro B2 – Conhecimento revelado pelos participantes em relação à problemas de transformação e de média no âmbito da proporcionalidade. 156
Figura D1 – Solução do participante A ao item a) da Situação 1. 163
Figura D2 – Solução do participante A ao item b) da Situação 1. 163
Figura D3 – Solução do participante A ao item c) da Situação 1. 164
Figura D4 – Solução da participante B ao item a) da Situação 1. 165
Figura D5 – Solução da participante B ao item b) da Situação 1. 166
Figura D6 – Tabela construída e solução do participante E ao item a) da Situação 1.
..... 167

Figura D7 – Solução do participante D aos itens b) e c) da Situação 1. 167
Figura D8 – Solução da participante C ao item a) da Situação 1. 168
Figura D9 – Solução da participante C ao item b) da Situação 1. 169
Figura D10 – Solução da participante C ao item c) da Situação 1. 169
Figura D11 – Solução do participante A à Situação 2. 171
Figura D12 – Solução da participante C à Situação 2. 172
Figura D13 – Solução da participante B à Situação 2. 172
Figura D14 – Problema criado pelo participante A para a Pergunta 3. 174
Quadro D1 – Conhecimento revelado pelos discentes em relação à problemas de valor omisso e de comparação no âmbito da proporcionalidade. 174
Figura F1 – Mobilização da estratégia busca pelo valor unitário na resolução da Situação 1. 180
Figura F2 – Tentativa de solução do participante A à Situação 2. 184
Figura F3 – Tentativa de solução do participante A à Situação 2. 184
Figura F4 – Solução da participante C à Situação 2. 185
Figura F5 – Solução da participante C à Questão 3. 189
Quadro F1 – Conhecimento revelado pelos participantes em relação à problemas de transformação e de média no âmbito da proporcionalidade. 189
Figura H1 – Solução dos participantes E e A à Situação 1, respectivamente. 195
Figura H2 – Solução da participante C à Situação 1. 196
Figura H3 – Solução da participante B à Situação 2. 198
Figura H4 – Solução da participante C à Situação 2. 199
Figura H5 – Solução dos participantes A e E à Situação 2, respectivamente. 200
Figura H6 – Solução das participantes B e C ao item a) Situação 3, respectivamente. 202
Figura H7 – Solução do participante A ao item a) Situação 3. 203
Figura H8 – Solução dos participantes A, C e E ao item b) da Situação 3, em sentido anti-horário. 204
Figura H9 – Solução dos participantes A e C ao item c) da Situação 3, respectivamente. 206
Figura H10 – Soluções do participante E ao item c) da Situação 3. 206
Figura H11 – Solução da participante B ao item c) da Situação 3. 207
Figura H12 – Solução da participante B ao item d) da Situação 3. 208
Figura H13 – Solução do participante A ao item e) da Situação 3. 210

Figura H14 – Solução do participante C ao item e) da Situação 3. 210
Figura H15 – Solução do participante A à Questão 3. 213
Quadro H1 – Conhecimento revelado pelos participantes em relação à problemas de conversão, de unidades de medida e números e de translação no âmbito da proporcionalidade. 214

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
KFLM	Knowledge of Features of the Learning of Mathematics
KMLS	Knowledge of Mathematics Learning Standards
KMT	Knowledge of Mathematics Teaching
KoT	Knowledge of Topics
KSM	Knowledge of the Structure of Mathematics
MK	Mathematics Knowledge
MKT	Mathematics Knowledge for Teaching
MTSK	Mathematics Teacher's Specialized Knowledge
PCK	Pedagogical Content Knowledge
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TF	Tarefa Formativa
TpF	Tarefa para Formação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UFAM	Universidade Federal do Amazonas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14
2 PENSAMENTO PROPORCIONAL E PROPORCIONALIDADE 24
2.1 O PENSAMENTO PROPORCIONAL 24
2.2 PROPORCIONALIDADE 30
3 REFERENCIAL TEÓRICO 37
3.1 MATHEMATICS TEACHER'S SPECIALIZED KNOWLEDGE – MTSK 37
3.1.1 Mathematics Knowledge – MK 39
3.1.1.1 Knowledge of Topics – KoT 39
3.1.1.2 Knowledge of the Structure of Mathematics – KSM 41
3.1.1.3 Knowledge of Practices in Mathematics – KPM 43
3.1.2 Pedagogical Content Knowledge – PCK 47
3.1.2.1 Knowledge of Mathematics Teaching – KMT 47
3.1.2.2 Knowledge of Features of Learning Mathematics – KFLM 49
3.1.2.3 Knowledge of Mathematics Learning Standards – KMLS 52
3.1.3 Beliefs 54
4 CONTEXTO E MÉTODO 56
4.1 ETAPA 1 – REVISÃO DE LITERATURA 57
4.2 ETAPAS 2 E 3 – EXPERIMENTAÇÃO 58
4.2.1 Etapa 2 – Parte Preliminar 59
4.2.2 Etapa 3 – Parte I 60
4.3 PROCESSO DE ANÁLISE 79
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES 82
6 METASSÍNTESE 84
6.1 SUBQUESTÃO 1 – OBSTÁCULOS E DIFICULDADES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROPORCIONALIDADE 85
6.2 SUBQUESTÃO 2 – CONHECIMENTOS REVELADOS SOBRE O TÓPICO PROPORCIONALIDADE 87
6.3 SUBQUESTÃO 3 – CONHECIMENTOS REVELADOS SOBRE O TÓPICO PROPORCIONALIDADE 96
REFERÊNCIAS 109
APÊNDICE A – Parte Preliminar da Tarefa para Formação 123

APÊNDICE B – Análise detalhada dos Problemas 3 a 9 da Atividade Diagnóstica (Parte Preliminar da Tarefa para Formação) 126
APÊNDICE C – Tarefa para Formação 1 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade 160
APÊNDICE D – Análise detalhada das resoluções da Tarefa para Formação 1 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade ... 161
APÊNDICE E – Tarefa para Formação 2 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade 178
APÊNDICE F – Análise detalhada das resoluções da Tarefa para Formação 2 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade ... 179
APÊNDICE G – Tarefa para Formação 3 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade 193
APÊNDICE H – Análise detalhada da Tarefa para Formação 3 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade 194
ANEXO 1 – Carta de Autorização da Revista Ensino da Matemática em Debate – EMD 220
ANEXO 2 – Carta de Autorização da Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC 221
ANEXO 3 – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP 222
ANEXO 4 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 223

1 INTRODUÇÃO

O interesse por investigar aspectos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade surgiu, principalmente, a partir do desafio que esta proposta se mostrou ser dada a complexidade dos fenômenos envolvidos, as dificuldades e obstáculos que permeiam o ensino e a aprendizagem desse conceito, além de sua vasta abrangência. Ademais, além de a proporcionalidade ser uma das mais antigas noções matemáticas presentes na atividade humana, desde os estudos de Euclides de Samos, um dos primeiros matemáticos a fazer um estudo sistemático deste conceito num contexto geométrico, o qual está presente nos livros V a X de *Os Elementos* (Euclides, 2009), noções inerentes a esse conceito permeiam o pensamento humano nas suas mais diversas dimensões.

O fato de a proporcionalidade estar massivamente presente em outras áreas, como Ciências Naturais – relação entre taxa metabólica e tamanho do corpo, gravitação universal, estequiometria, Lei das Proporções Definidas na química, Lei de Boyle na física dos gases –, Geografia – cartografia, densidade demográfica – e Arquitetura – escalas numa planta, razão áurea, dimensionamento proporcional para manter a harmonia estética e otimizar a utilidade, acústica arquitetônica.

Além disso, algumas com as quais tenho uma ligação muito forte, como Música – construção de escalas musicais, divisão proporcional de cordas (Lei de Pitágoras), razão fixa entre intervalos, fórmula de compasso, temperamento musical e proporção logarítmica, polirritmia, série harmônica – e História – a proporcionalidade permeia todo o desenvolvimento histórico da Matemática e da humanidade, sendo um dos pilares da atividade humana (Miranda, 2009) –, também foi um incentivo a mais para eu me aprofundar no tema, assim como sua presença em atividades puramente cotidianas, como fazer compras, explorar escalas, converter moedas entre outras (Lesh; Post; Behr, 1988), o que evidencia a relevância desse tópico.

Noções envolvendo a proporcionalidade transparecem em todo o currículo de matemática da Educação Básica, desde os Anos Iniciais, com fração, homotetias de figuras planas, entre outras, passando pelos Anos Finais com porcentagem, semelhança e funções e, finalmente, chegando no Ensino Médio, com o aprofundamento das noções vistas e aprendidas anteriormente no Ensino

Fundamental, além de suas aplicações em outras disciplinas, como na Física, por exemplo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental também traz suas considerações acerca do tema, afirmando a proporcionalidade como uma das ideias fundamentais que constituem os diferentes campos que compõem a Matemática, junto com equivalência, ordem, interdependência, representação, variação e aproximação, as quais “são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento” (Brasil, 2018, p. 268). Além disso, o documento também orienta que a componente curricular Matemática garanta aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas da área, das quais destaco:

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (Brasil, 2018, p. 267)

Essa competência evidencia a relevância do estudo de tópicos inerentes à proporcionalidade para a compreensão dessas relações, visto que aqueles permeiam o aprendizado de todos esses campos, o que também pode ser retirado do seguinte trecho:

> a proporcionalidade deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (Brasil, 2018, p. 268).

De acordo com esse documento referencial, o objeto de conhecimento proporcionalidade está localizado nas unidades temáticas Números, Álgebra e Geometria e a expectativa para o Ensino Fundamental é que os estudantes possam desenvolver o pensamento proporcional através da investigação de situações que possibilitem a representação da variação de grandezas em um sistema de coordenadas cartesianas, assim como da análise e identificação do tipo de variação apresentada (proporcional direta, proporcional inversa ou não proporcional) (Brasil, 2018).

Além disso, mais especificamente para os Anos Finais (11 a 14 anos de idade), foco desta pesquisa, o documento recomenda que as situações propostas aos estudantes precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos trabalhados, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência (Brasil, 2018). Dito isso, dentre as habilidades que a BNCC recomenda para essa etapa do desenvolvimento nas quais proporcionalidade é prevalente, tem-se:

> (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
> (EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
> (EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
> (EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
> (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
> (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
> (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. (Brasil, 2018, p. 301-319)

A partir disso, pode-se perceber que o estudo da proporcionalidade não se resume à aplicação da famosa "regra de três", mas exige dos estudantes também a observação e o estabelecimento de relações entre grandezas pensando de maneira qualitativa, visto que, na maioria das situações que enfrentarão na vida cotidiana e em atividades de outras disciplinas, precisarão não apenas calcular numericamente, mas interpretar e compreender a situação para, só então, pensar proporcionalmente. No entanto, apesar de sua relevância, Lamon (2012, 2016) aponta que as ideias de proporcionalidade são pouco assimiladas, principalmente porque são ensinadas de forma mecanizada na sala de aula, sem promover uma compreensão profunda do pensamento proporcional subjacente.

Não obstante a essência do estudo da proporcionalidade ser a compreensão das relações existentes entre grandezas proporcionais, os professores geralmente

focam o ensino em uma abordagem prática, fundamentada essencialmente na aplicação de regras e algoritmos, sem enfatizar tanto o desenvolvimento de uma compreensão mais conceitual que privilegie as relações entre as variáveis e o pensamento proporcional, o qual, dessa forma, não tem sido articulado aos objetivos de ensino no âmbito escolar (Lamon, 2012, 2016).

Este método algorítmico, além de ser mal compreendido pelos estudantes (Post; Behr; Lesh, 1995) também é geralmente utilizado mais para evitar o pensamento proporcional do que para favorecê-lo (Lesh; Post; Behr, 1988). Além disso, se o pensamento proporcional "não for entendido conceitual, mas algoritmicamente, torna-se mais difícil a transferência e o uso na 'vida real'" (Dooley, 2006, p. 3).

A partir de buscas preliminares sobre os obstáculos e dificuldades que permeiam o processo de ensino e aprendizagem de tópicos inerentes ao pensamento proporcional, com relação aos estudantes, encontrou-se que eles têm dificuldade em distinguir situações proporcionais das que não são proporcionais (Maranhão; Machado, 2011); diferenciar as situações de proporcionalidade direta daquelas não proporcionais (Silvestre; Ponte, 2012); não obstante percebam as relações numéricas, os estudantes têm dificuldade para explicar o raciocínio utilizado na resolução de situações propostas envolvendo proporcionalidade (Costa; Ponte, 2008).

Ademais, os estudantes costumam resolver "problemas de valor faltante" por meio de práticas automáticas, sem mobilizar atitude crítica (Tjoe; de la Torre, 2014), o que vai ao encontro de que a habilidade de resolver problemas de proporção não pressupõe necessariamente o uso do pensamento proporcional (Tjoe; de la Torre, 2014; Lesh; Post; Behr, 1988). Há ainda deficiências na interpretação dos problemas quando a situação muda (Mellar, 1991) e, por fim, os estudantes não compreendem a relação abstrata entre as quantidades comparadas, mas se orientam pelo tipo do problema, o qual geralmente contém três dados conhecidos e um a descobrir (Lesh; Doerr, 2003).

Do ponto de vista epistemológico, um aspecto a se levar em conta no tratamento da proporcionalidade é que em *Os Elementos* (Euclides, 2009), há o uso e o desenvolvimento de duas teorias aparentemente diferentes: um para números e um para grandezas. Essa característica torna necessário testar os resultados duas vezes, algo que pode ser considerado motivado pela maneira como as grandezas eram concebidas no mundo grego. Essa separação gerou obstáculos no processo de

aprendizagem da razão e da proporcionalidade, pois separou e desvinculou conceitos como semelhança de porcentagens ou regra de três, por estarem aparentemente em contextos diferentes.

Considera-se que essa dissociação e suas implicações devem ser levadas em consideração pelo professor ao ensinar proporcionalidade (Fuentes Leal, 2020). Outra característica que também está presente em *Os Elementos* é o uso da razão apenas entre grandezas homogêneas, o que deixa de lado o produto de grandezas, ou seja, sob essa perspectiva, o produto de dois comprimentos não será uma superfície, característica que poderia ser interpretada como um obstáculo no aprendizado da proporcionalidade (Fuentes Leal, 2020).

Além disso, a falta de conexão entre situações cotidianas envolvendo proporcionalidade e os problemas trabalhados na escola contribui para dificultar uma compreensão mais aprofundada da natureza multiplicativa das relações proporcionais, levando à dificuldade em diferenciar quando usar o raciocínio aditivo ou o multiplicativo. Dessa forma, Silvestre e Ponte (2012) relacionam a rigidez no pensamento proporcional dos alunos à limitada diversidade das tarefas matemáticas apresentadas em sala de aula.

Uma possível explicação para algumas dessas dificuldades, relatada por diversos estudos, está na formação de professores, visto que tanto os professores em exercício quanto os na formação inicial têm dificuldades em ensinar conceitos relacionados à proporcionalidade (Burgos *et al.*, 2018). Segundo os autores, uma das principais dificuldades apontadas em estudos é que os professores frequentemente utilizam o algoritmo de multiplicação cruzada (regra de três) para resolver problemas, sem avaliar se essa abordagem é adequada à situação em questão. Ou seja, no contexto escolar, o uso do conceito de proporcionalidade limita-se, em grande parte, à aplicação da regra de três, focando apenas nas propriedades de razões equivalentes, isto é, dadas duas razões equivalentes $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se as igualdades $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $a.x = b.c$ são verdadeiras, então, $x = b.\frac{c}{a}$ (Tinoco, 1996; Schliemann; Carraher, 1997).

Segundo Rapetti (2003), no ensino de matemática, os conceitos não devem ser introduzidos diretamente por meio de uma expressão formal. Antes disso, é essencial proporcionar um momento de modelagem baseado em objetos físicos para favorecer a compreensão do conceito. No caso da proporcionalidade, quando seu ensino é

abordado de forma predominantemente algorítmica e a razão é tratada apenas como um quociente, isso é consequência tanto da falta de ênfase na medição de grandezas quanto da priorização de cálculos e transformações no sistema métrico decimal, em detrimento dos aspectos conceituais.

Além disso, há uma crença de que a medição de quantidades não inteiras já está contemplada na interpretação da fração como relação parte-todo, além da suposição de que os alunos possuem um entendimento consolidado da fração como quociente. Assim, ressalta-se a importância de situar o conceito de razão no contexto da medição.

Todas essas dificuldades evidenciam o que Fuentes Leal (2020) chamou de *tensão* entre a importância e transversalidade da proporcionalidade e a persistência de dificuldades relacionadas à sua compreensão e utilização ao longo das diferentes etapas escolares. Visto que pesquisas apontam que o professor tem mais impacto do que qualquer outra variável na aprendizagem dos estudantes (Darling-Hammond, 2000; Boyd *et al.*, 2009; Hill; Chin, 2018), faz-se necessário o desenvolvimento de pesquisas com foco na formação de professores. A fim de que habilidades sejam desenvolvidas nos estudantes e essas dificuldades sejam superadas, é necessário que o professor tenha um conhecimento profundo acerca de qualquer tópico que se predisponha a ensinar.

Com esse propósito, nas últimas décadas, têm estado em evidência pesquisas que buscam compreender como se desenvolve e como desenvolver o conhecimento do professor de e que ensina matemática, porém com ênfase em sua natureza especializada. Dentre as conceitualizações existentes, destaca-se o Mathematics Teacher's Specialized Knowledge[1] - MTSK (Carrillo *et al.*, 2018), de acordo com o qual o "especializado" é compreendido como a integração entre os conhecimentos matemáticos e didáticos específicos do professor de matemática, influenciados pelas concepções e crenças que ele possui sobre a matemática, sua aprendizagem e seu processo de ensino (Escudero-Ávila *et al.*, 2015).

Muitos estudos têm investigado a relação entre o conhecimento matemático especializado do professor e a proporcionalidade, como as investigações de Buforn e Fernández (2014), Burgos *et al.* (2018), Camilo Fuentes (2020), Cristini, Torrezan e

[1] Conhecimento Especializado do Professor de Matemática.

Ribeiro (2022), del-Valle, Suazo e Torres (2018), Ezaki, Li e Copur-Gencturk (2024) e Torres (2015). Contudo, destaca-se o trabalho de Fuentes Leal (2020), cujo doutorado foi realizado na universidade onde originou-se o modelo MTSK[2], e que, em sua tese, intitulada *O conhecimento especializado do professor de matemática acerca da proporcionalidade: um estudo de caso*[3], busca mostrar a importância da compreensão do ensino da proporcionalidade como conceito-chave na construção do pensamento matemático. O público-alvo de seu trabalho foi a formação continuada, já que investigou o conhecimento matemático especializado de uma professora com mais de 18 anos de experiência que atuava no ensino secundário (alunos de 14 a 16 anos) de uma escola pública em Bogotá, Colômbia. Com sua pesquisa, Fuentes Leal objetiva caracterizar, por meio do modelo MTSK, o conhecimento matemático especializado dessa professora no ensino do tópico proporcionalidade através da observação de quatro episódios de aula, que abordaram, cronologicamente, razão e proporcionalidade de segmentos, proporcionalidade e introdução ao Teorema de tales, Teorema de Tales, e semelhança de triângulos.

Não obstante a relevância do modelo MTSK para a análise do conhecimento matemático especializado do professor de matemática, a fim de desenvolver esses conhecimentos, indo de encontro com abordagens generalistas que não consideram essa natureza especializada do conhecimento do professor de matemática, necessita-se a criação e implementação de contextos formativos e tarefas com esse objetivo específico (Almeida; Ribeiro, 2021).

A partir do exposto, o problema de pesquisa pode ser sintetizado por meio da seguinte questão: Que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de matemática no âmbito do tópico proporcionalidade quando participam de um contexto formativo com o intuito de desenvolver esse conhecimento? Uma vez que o conhecimento matemático especializado não se desenvolve na prática, sem que haja um contexto formativo intencionado para esse desenvolvimento (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013), partimos da hipótese de que a aplicação de Tarefas para Formação (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) realizadas segundo as tipologias da

[2] O modelo MTSK originou-se a partir das discussões realizadas no seio do Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) da Universidad de Huelva, España.
[3] El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la proporcionalidad: Un estudio de caso (Fuentes Leal, 2020).

Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2002) pode favorecer a mobilização e o desenvolvimento desse conhecimento.

A fim de aprofundar a temática e responder à questão de pesquisa, elencamos as seguintes subquestões, que buscaremos elucidar no decorrer do estudo:

- O que revelam as pesquisas sobre os obstáculos e dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do tópico proporcionalidade?
- Que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de matemática sobre o tópico proporcionalidade?
- Que conhecimentos matemáticos especializados são mobilizados e/ou desenvolvidos por futuros professores de matemática a partir da participação em um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade?

Dessa forma, com vistas a responder à questão de pesquisa, traçamos o seguinte objetivo geral: Investigar o conhecimento matemático especializado revelado e desenvolvido por futuros professores de matemática ao participarem de um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade. Para tanto, delineamos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar o que revelam as pesquisas sobre os obstáculos e dificuldades no processo ensino e aprendizagem da proporcionalidade;
- Descrever os conhecimentos revelados por futuros professores de matemática acerca do tópico proporcionalidade;
- Analisar que conhecimentos matemáticos especializados são mobilizados e/ou desenvolvidos por futuros professores de Matemática a partir da participação em um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade.

A presente pesquisa foi organizada no formato *multipaper*, adotando uma abordagem vertical, na qual cada artigo é orientado a responder a uma subquestão de pesquisa e a um objetivo específico, norteados nos resultados obtidos no estudo anterior. Assim, os achados parciais de cada artigo subsidiam o desenvolvimento do seguinte, conduzindo progressivamente à compreensão do fenômeno investigado e ao alcance do objetivo geral da pesquisa (Frank, 2013).

Nessa organização, o trabalho é constituído pela Introdução e por cinco capítulos: o quarto capítulo reúne os quatro artigos que, de forma articulada, contribuem para responder à questão central da investigação, enquanto o quinto

apresenta a metassíntese dos resultados produzidos nesses estudos e, a partir disso, a conclusão.

O Capítulo 1, Introdução, apresenta a motivação para a escolha do tema proporcionalidade, bem como o contexto em que se insere a investigação e os elementos que justificam a relevância da pesquisa, estabelecendo relações com a Base Nacional Comum Curricular. Nesse capítulo, são apresentados o problema de pesquisa e as subquestões que delimitam o estudo, permitindo uma compreensão do escopo investigativo proposto, além dos objetivos que orientam o desenvolvimento da pesquisa.

O Capítulo 2 apresenta uma discussão acerca do pensamento proporcional, cuja construção é fundamental para a resolução reflexiva e consciente de situações envolvendo proporcionalidade. O capítulo aborda diferentes perspectivas teóricas sobre o tema, discutindo elementos conceituais, dificuldades recorrentes associadas à sua aprendizagem e aspectos que caracterizam esse tipo de pensamento, os quais fundamentam as análises desenvolvidas ao longo da pesquisa.

O Capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica da pesquisa, centrada no modelo teórico-analítico Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK). Inicialmente, discute-se sua origem e seus pressupostos, com ênfase na caracterização dos domínios, subdomínios e categorias que compõem o modelo e que orientam as análises desenvolvidas neste estudo.

O Capítulo 4 descreve os procedimentos metodológicos adotados, explicitando os caminhos percorridos para o alcance dos objetivos propostos. Nesse capítulo, justifica-se a opção pelo formato *multipaper* da dissertação e pela abordagem qualitativa de pesquisa, bem como se caracteriza o estudo de caso instrumental. Apresentam-se ainda o contexto da investigação, os participantes, a proposta de intervenção formativa, os instrumentos de produção de dados e os procedimentos de análise adotados.

O Capítulo 5, Resultados e Discussões, reúne os estudos que compõem o formato *multipaper* da dissertação, organizados em quatro artigos científicos. Esses trabalhos contemplam as diferentes etapas da investigação, que visam responder a cada uma das subquestões de pesquisa, apresentando e discutindo os resultados obtidos em cada fase da pesquisa.

Por fim, o Capítulo 6, Metassíntese, apresenta uma integração interpretativa dos resultados produzidos ao longo das diferentes etapas do estudo, articulando os

achados dos artigos à pergunta de pesquisa e aos objetivos da investigação. Nesse capítulo, são discutidas as contribuições do contexto formativo para a mobilização e o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado dos participantes, bem como são apresentadas as considerações finais da dissertação.

2 PENSAMENTO PROPORCIONAL E PROPORCIONALIDADE

Além de ser um dos temas centrais na matemática, a proporcionalidade integra o que é conhecido como Pensamento Proporcional. Este é um dos tipos de pensamento que compõem o Pensamento Matemático (Bianchini; Lima, 2023) e que, segundo Lesh, Post e Behr (1988), pode ser considerado uma das pedras angulares da Matemática. Apesar de não se restringir apenas ao tópico de proporcionalidade, o pensamento proporcional engloba o estudo das proporções (Lamon, 2012), além de o desenvolvimento apropriado desse tipo de pensamento ser uma "condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade" (Falvo; Jucá, 2002, p. 139).

Isso posto, nesta seção trazemos uma visão geral a respeito do pensamento proporcional a fim de afirmar a sua complexidade, abrangência e importância dentro da matemática e do contexto escolar para, em seguida, determo-nos ao objeto matemático que será foco desta pesquisa, a noção de proporcionalidade.

2.1 O PENSAMENTO PROPORCIONAL

A construção do pensamento proporcional como conceito matemático tem sido objeto de estudo de renomados pesquisadores na área da Educação Matemática, como Freudenthal (1983), Hart (1988), Karplus (1983), Streefland (1993) entre outros, além de ter seu espaço no campo de estudo da psicologia cognitiva piagetiana, segundo a qual o pensamento proporcional é um dos requisitos que o indivíduo deve desenvolver para passar da etapa das operações concretas à das operações formais (Scheller; Bonotto, 2020).

Autores como English e Halford (1995), Post *et al.* (1998), Shield e Dole (2002) e Streefland (1985) evidenciam a complexidade que o pensamento proporcional apresenta, a qual é consequência seja do amplo conjunto de conhecimentos prévios necessários para compreender todo o seu significado, seja do fato de cada área do conhecimento usá-lo modificando-o sutilmente com vistas a responder às suas demandas específicas (Silvestre; Ponte, 2006).

Embora não haja um consenso sobre a definição de pensamento proporcional, havendo ainda autores que prefiram o termo *raciocínio* a *pensamento*[4], Norton (2005, p. 17), em sua obra intitulada *A construção do pensamento proporcional*[5], define-o como aquele empregado "para descrever os conceitos e os pensamentos necessários para compreender taxa, proporção e proporcionalidade, incluindo escala", sendo sua natureza, dessa forma, essencialmente multiplicativa. Já segundo Lesh, Post e Behr (1988), esse tipo de pensamento está relacionado a inferências e predições, além de enfatizarem a importância do envolvimento de pensamentos tanto quantitativos quanto qualitativos, ou seja, o desenvolvimento do pensamento proporcional envolve um raciocínio holístico acerca da relação entre duas expressões racionais, como as já citadas taxas, proporções, além de quocientes e frações.

Além disso, Scheller e Bonotto (2020, p. 201) enfatizam a ideia de que pensar proporcionalmente "implica na correta compreensão de uma relação constante entre duas grandezas (invariância) e na noção de que essas grandezas variam em conjunto (covariância)". Por seu lado, Lamon (2012) menciona que o pensamento proporcional abrange a capacidade de, além de aumentar ou diminuir escalas em situações cujas essas ações são requeridas, apresentar justificativas para conjecturas referentes às relações presentes em situações que envolvem proporcionalidade direta ou inversa.

Recorrendo a diferentes referenciais teóricos, Maranhão e Machado (2011) realizam uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional e sintetizam os descritores que encontraram para esse tipo de pensamento em cinco: (i) Distinguir situações proporcionais e não-proporcionais; (ii) Diferenciar variáveis diretamente proporcionais das inversamente proporcionais; (iii) Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade; (iv) Ao trabalhar com proporcionalidade, fazer comparações numéricas – envolvendo os números racionais – e não numéricas; (v) Usar ideia de covariação, o que vai na contramão da ideia reducionista de que a proporcionalidade envolve apenas algoritmos e métodos pouco significativos.

Todas essas definições e caracterizações do pensamento proporcional não são disjuntas, mas complementares, e demonstram a abrangência e complexidade que esse tipo de pensamento envolve, o qual, apesar do que o nome possa indicar, vai

[4] Para este trabalho, optamos pelo termo *pensamento* proporcional, em consonância com a definição de pensamento matemático presente na literatura que trata do tema (Bianchini; Lima, 2023).
[5] The construction of proportional reasoning.

muito além de resolver problemas de proporção. Jitendra *et al.* (2011, p. 731) destaca a importância do desenvolvimento do pensamento proporcional pelos estudantes pois ele constitui “uma ponte entre a Matemática numérica e concreta da Aritmética, a Álgebra simbólica e a Matemática superior”, o que reforça a perspectiva de Cordel e Mason (2000) de que esse desenvolvimento exige a vivência, durante um longo tempo, de experiências de diferentes naturezas envolvendo relações proporcionais para a sua consolidação.

Toda essa complexidade e transversalidade que envolve o pensamento proporcional pode ser observada nos documentos oficiais que norteiam a educação no Brasil, como a BNCC por exemplo, na qual o pensamento proporcional está previsto (mesmo que de forma implícita) para ser desenvolvido em todas as séries, desde os Anos Iniciais, passando pelos Anos Finais, até o Ensino Médio (Bianchini; Lima, 2023). O Quadro 1 traz as principais habilidades propostas nesse documento relacionadas ao pensamento proporcional nos Anos Finais, etapa na qual os professores licenciados em matemática atuam[6].

Quadro 1 – Habilidades propostas pela BNCC para os Anos Finais nas quais o pensamento proporcional é prevalente

Habilidade	**Unidade Temática**
6º ano do Ensino Fundamental	
(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. **(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.	Números
(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.	Geometria
(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados	Grandezas e Medidas

[6] Não será incluída na tabela informações referentes a etapa do Ensino Médio visto que “A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental” (Brasil, 2018).

por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. **(EF06MA29)** Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.	
(EF06MA31) Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico. **(EF06MA32)** Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões. **(EF06MA33)** Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.	Probabilidade e Estatística
7º ano do Ensino Fundamental	
(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. **(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.	Números
(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.	Álgebra
(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.	Geometria
(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).	Grandezas e Medidas
(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas. **(EF07MA37)** Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.	Probabilidade e Estatística
8º ano do Ensino Fundamental	
(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.	Álgebra

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.	
(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.	Grandezas e Medidas
(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.	Probabilidade e Estatística
9º ano do Ensino Fundamental	
(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.	Números
(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	Álgebra
(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	Geometria
(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.	Grandezas e Medidas
(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros. **(EF09MA22)** Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central. **(EF09MA23)** Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.	Probabilidade e Estatística

Fonte: adaptado de Bianchini e Lima (2023).

A partir do quadro pode-se observar que o pensamento proporcional ganha destaque principalmente nos 6º e 9º anos, além de evidenciar-se como uma ideia unificadora da matemática escolar, visto que é um “ponto de encontro” para as cinco unidades temáticas que compõem esse documento, abarcando todas elas no decorrer dessa etapa escolar. Além disso, retira-se que o pensamento proporcional e a resolução de problemas envolvendo relações proporcionais vai muito além de apenas saber aplicar regra de três (multiplicação cruzada), a qual esse documento orienta evitar (habilidade EF06MA13).

Deve-se dar ênfase a ações como identificação de grandezas, interpretação de relações, comparação de quantidades, análise e descrição de mudanças que ocorrem com as grandezas envolvidas a partir de determinadas ações, construção de figuras a partir de redução e ampliação entre outras. Entretanto, de modo a evitar o pensamento proporcional, os estudantes frequentemente utilizam o procedimento de regra de três sem compreender realmente o que estão fazendo (Lesh; Post; Behr, 1988), e que, embora seja um método eficiente, segundo Post, Behr e Lesh (1995, p. 93):

> [...] os métodos mais eficientes são, com frequência, aqueles menos significativos, que devem, portanto, ser evitados nas fases de ensino iniciais. Infelizmente, muitas vezes confundimos eficiência com significação e, por descuido, embora com a melhor das intenções, introduzimos um conceito da maneira mais eficiente, porém menos significativa.

Cramer, Post e Currier (1993, p. 79) consideram que “o fato de muitos aspectos do nosso mundo operarem de acordo com regras proporcionais, torna as habilidades de raciocínio proporcional extremamente úteis na interpretação de fenômenos do mundo real”. Caminhando nessa direção, a BNCC também enfatiza a importância de temas provindos de contextos sociais para o desenvolvimento do pensamento proporcional do estudante (habilidades EF06MA24, EF07MA36 e EF09MA08, por exemplo), orientando a resolução e elaboração de problemas (sem o uso de fórmulas) ou o planejamento e realização de pesquisas a partir de, sempre que possível, contextos oriundos de situações reais e da realidade social e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento, identificando conexões e aplicações da proporcionalidade em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Dessa forma, tendo em vista a abrangência do pensamento proporcional e a complexidade que permeia as relações que envolvem proporcionalidade, tanto em contextos intramatemáticos quanto extramatemáticos, as etapas essenciais para a

aquisição desse conceito não podem ser resumidas a um conjunto de regras, procedimentos ou definições. Para que a compreensão da proporcionalidade seja significativa e efetiva, cumpre-nos desenvolver o pensamento proporcional nos estudantes, o que vai muito além dos procedimentos de estratégias formais de resolução de problemas (Lamon, 2012).

2.2 PROPORCIONALIDADE

A proporcionalidade é uma das mais importantes noções da matemática, visto que, além da sua aplicabilidade em diversas situações do dia a dia, é um conceito articulador de diferentes áreas do pensamento matemático, como observado por Onuchic e Allevato (2015, p. 5), que consideram esse conceito como sendo um unificador em Matemática. Segundo as autoras:

> Relações proporcionais desempenham um papel chave em outros assuntos importantes como: razões, proporções, porcentagem, taxa, escala, semelhança de figuras geométricas, declividade, funções lineares, divisão em partes direta e inversamente proporcionais, regras de três, probabilidade e chance, sequências, distribuições de frequências e estatística, razões trigonométricas, movimento em velocidade constante, juros simples, entre outros.

A partir de uma revisão de literatura em trabalhos publicados em periódicos da área de Educação Matemática com o objetivo de construir uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade, Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017) identificam que há diferentes formas de comunicar esse conceito. Segundo os autores, esse conceito só se realiza quando existe uma relação entre partes, as quais podem ser interpretadas como quantidades ou conjuntos, e que foram identificadas realizando-se de três maneiras diferentes:

I. Como uma razão constante entre duas partes, denotada por $a/b = a{:}\,b$ (a está para b) (Ben-Chaim; Keret; Ilany, 2007);
II. Como uma igualdade entre razões (sustentada pelo teorema de Tales), denotadas por $a/b = c/d$ (a está para b, assim como c está para d);
III. Como relações cujos elementos de um conjunto pudessem corresponder respectivamente aos elementos de outro conjunto, multiplicados ou divididos por uma constante, denotadas por uma função do tipo linear.

Cada um dos três cenários supracitados traz implicações para o desenvolvimento de noções envolvendo proporcionalidade. Enxergar a proporção como razão permite identificá-la como uma *classe de razões equivalentes*, por exemplo, além de que, conforme Spinillo (2003, p. 39), "ao estabelecer a equivalência, é necessário entender que as quantidades que compõem uma razão *covariam* (isto é, alteram-se de forma conjunta) de tal forma que as relações entre elas permanecem *invariantes* [...]", compreensões inerentes ao pensamento proporcional (Scheller; Bonotto, 2020).

Esse cenário também permite observar a relação multiplicativa entre duas quantidades de naturezas distintas, denominada *taxa* (Oliveira; Cyrino, 2014), assim como entre grandezas de mesma natureza, denominada *escala* (Ben-Chaim; Keret; Ilany 2012). Ainda nos referindo a razão, ela também permite, por meio da proporcionalidade, a apresentação dos *números irracionais*, visto que nem toda razão pode ser expressa por números racionais (Silva; Pietropaolo; Campos, 2013), como, por exemplo, a razão entre o comprimento da diagonal de um quadrado e o comprimento do lado desse mesmo quadrado ($\sqrt{2}$).

Já quando temos o conceito de proporcionalidade realizado como *igualdade entre razões*, uma das formas de comunicá-lo é:

> A grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B se ambas variam na mesma razão, ou, mais detalhadamente, se dados os valores a_1, $a_2$de A e os valores correspondentes b_1, b_2 de B, os quatro valores formarem a proporção $a_1/a_2 = b_1/b_2$. Além disso, A é inversamente proporcional a B, se ambas variam em razões inversas, ou mais detalhadamente, se os valores a_1, a_2, b_1, b_2, formarem a proporção $a_1/a_2 = b_2/b_1$ (Imenes; Lellis, 2005, p. 14)

Essa maneira de enxergar a proporcionalidade permite que determinemos o valor de uma grandeza a partir de outra grandeza cuja medida é conhecida, estabelecendo relações de proporcionalidade entre quantidades de grandezas de natureza diferente, em outras palavras, permite escrevermos uma relação proporcional entre quantidades de grandezas de forma que se conheçam três informações e pretende-se descobrir a quarta, para a qual costuma-se empregar o procedimento *de regra de três*, embora pesquisadores tenham evidenciado e criticado o emprego de operações mecânicas em vez do estabelecimento de relações entre as grandezas (Lamon, 2012; Onuchic; Allevato, 2015; Oliveira; Cyrino, 2015; Costa; Allevato, 2012).

Por fim, especificamente com respeito à relação apresentada no item (III), o matemático e professor Elon Lages define proporcionalidade de forma mais rigorosa, a partir do conceito de função, da seguinte maneira:

> Suponhamos que duas grandezas x, y achem-se de tal modo relacionadas que a cada valor especificado de x corresponda um valor bem determinado de y. Neste caso, diz-se que y *é função de* x e escreve-se $y = f(x)$. Suponhamos que a grandeza y seja função da grandeza x, isto é, $y = f(x)$. Diremos que y é *diretamente proporcional a* x quando as seguintes condições forem satisfeitas:
> 1ª) y é uma função crescente de x;
> 2ª) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também fica multiplicado por n. Em termos matemáticos: $f(n.x) = n.f(x)$ para todo valor de x e todo $n \in N$.
> Analogamente, diz-se que y é *inversamente proporcional* a x quando $y = f(x)$ é uma função decrescente de x e, além disso, ao se multiplicar x por um número natural n, o valor correspondente de y fica dividido por n, isto é, $f(n.x) = \frac{1}{n}.f(x)$ para todo valor de x e toda $n \in N$. (Lima, 1988, p. 27).

Essa definição ocorre quando o conceito de proporcionalidade é visto como uma *relação multiplicativa*, vinculando a proporcionalidade a uma função do tipo linear. Deste modo, a relação chamada *covariação* ocorre entre os valores de forma conjunta, e a *invariância* pode ser identificada como o coeficiente angular da função, pois esta consiste na "taxa de variação de uma quantidade relativa à variação da outra quantidade [...]" (NCTM, 2010, p. 53). Algumas formas de vincular a proporcionalidade à função linear são através da taxa de variação (declividade), do fator-escala (associado à ampliação ou redução de figuras, por exemplo) e da porcentagem (quando considerada como um operador), por exemplo.

Dessa forma, Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017) mencionam que oferecer aos alunos da Educação Básica, bem como aos professores e futuros professores de Matemática, diversas formas de abordar o conceito de proporcionalidade em diferentes contextos amplia a compreensão e a comunicação desse conceito, permitindo reconhecê-lo como um elemento que integra tanto outros tópicos matemáticos quanto conhecimentos de outras áreas.

A despeito das diferentes maneiras de abordar esse conteúdo, Spinillo (1994) e Onuchic e Allevato (2015) estão de acordo quando afirmam que a proporcionalidade é tratada apenas como um conteúdo do programa de matemática e cujo ensino é feito de maneira superficial, enfatizando um tratamento "mecânico" e aplicação de exercícios de fixação, sem uma real compreensão do conceito de proporcionalidade

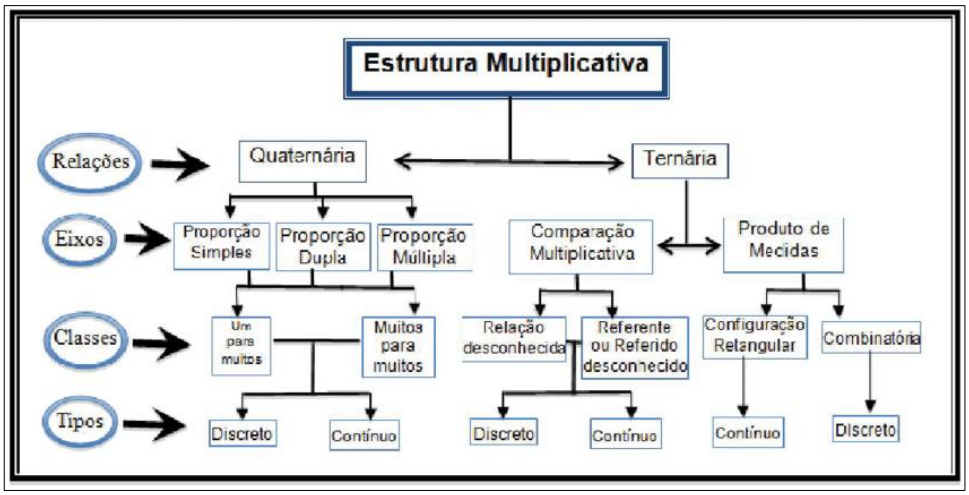
e das suas inúmeras conexões com outros tópicos matemáticos ou com temas fora da Matemática.

Alguns estudos (Costa Junior, 2010; Silva, 2008; Martins, 2007) apontam que, no contexto da Matemática Escolar bem como na formação inicial de professores (Silva; Alencar, 2012), os profissionais, ao ensinarem proporcionalidade, priorizam o ensino do algoritmo da regra de três, deixando de focalizar as relações existentes entre as grandezas. Como consequência, estudantes acabam por usar estratégias de multiplicação cruzada sem entender o propósito desse procedimento de solução, confiando somente em fórmulas e procedimentos, sem entender por que o fazem (Arican, 2024). Segundo o autor, os estudantes somente memorizam fórmulas, entendendo apenas problemas exemplificados pelo professor.

Portanto, os obstáculos e dificuldades identificados na literatura reforçam a necessidade de abordagens pedagógicas que promovam uma compreensão conceitual da proporcionalidade, em vez de apenas enfatizar métodos procedimentais, de modo a dar sentido ao tipo de relação entre as grandezas e significado aos resultados encontrados pelos estudantes ao resolver as situações propostas.

Vergnaud (2009) afirma que para adquirir um conceito é imprescindível que seja proposto, ao longo do tempo, um conjunto de situações cujo domínio progressivo (de estágios mais intuitivos aos mais sistematizados) solicita uma variedade de conceitos, procedimentos e representações em estreita conexão. No caso da proporcionalidade, a partir da investigação da natureza multiplicativa das situações proporcionais diretas, Vergnaud (1994) aloca esse conceito no Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, o qual envolve conceitos matemáticos que não são matematicamente independentes, como multiplicação, divisão, fração, razão, proporção, número racional, função linear, entre outros, e que aparecem simultaneamente nos problemas de proporcionalidade (Bernal, 2004).

Figura 1 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016).

O esquema apresentado na Figura 1 foi elaborado a partir das ideias teóricas de Vergnaud sobre o referido campo conceitual. O objetivo foi sintetizar suas ideias centrais, e agrupa as situações-problema das Estruturas Multiplicativas considerando dois tipos de relações: a quaternária, caracterizada por relações entre quatro quantidades de duas grandezas distintas, duas a duas, e que apresenta três eixos: proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla; e a ternária, cuja relação está entre três quantidades, sendo que uma delas é o produto das outras duas, contemplando dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medidas (Merlini; Santos; Magina, 2022).

Dessa forma, o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, com ênfase nas relações quaternárias, é composto por um conjunto de situações que envolvem os conceitos que permeiam o tópico de proporcionalidade, assegurando toda uma estrutura de relações entre essas situações e os conceitos a fim de que o professor tenha um aporte para traçar seus objetivos de aprendizagem.

Em consonância com as ideias de Vergnaud (1994) de que o conhecimento emerge a partir da resolução de problemas, isto é, a partir da ação do sujeito sobre a situação, Lesh, Post e Behr (1988) organizam e classificam as situações que requerem a mobilização do pensamento proporcional em sete categorias (Quadro 2), que, como pontuam Falvo e Jucá (2022, p. 139), “enfatizam diferentes aspectos de proporcionalidade e do pensamento proporcional”.

Quadro 2 – Categorias de problemas envolvendo pensamento proporcional propostas por Lesh, Post e Behr (1988)

Categoria	Descrição
Problema de valor omisso	Nessa categoria, relativamente às duas magnitudes envolvidas, são conhecidas três quantidades, digamos A, B e C e, recorrendo à relação $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, deve-se determinar a quantidade D.
Problema de comparação	Nessa categoria, considerando quatro quantidades A, B, C e D relativas a duas magnitudes, deve-se comparar as razões $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ e identificar se elas são iguais, maiores ou menores.
Problema de transformação	Nessa categoria, considerando quatro quantidades A, B, C e D relativas a duas magnitudes, os problemas podem ser de dois tipos: a) É dada a equivalência $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ e uma das quantidades é aumentada ou diminuída. Deve-se, então, determinar qual das seguintes relações é verdadeira após a transformação: $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$; $\frac{A}{B}<\frac{C}{D}$ ou $\frac{A}{B}>\frac{C}{D}$. b) É dada a relação $\frac{A}{B}<\frac{C}{D}$ e transforma-se uma das quantidades, digamos A, tornando verdadeira a seguinte relação: $\frac{A+x}{B}=\frac{C}{D}$.
Problema de média	Nesta categoria, o objetivo é determinar a média geométrica ou a média harmônica entre dois números. Dados números A e B, a média geométrica x é determinada utilizando-se a relação $\frac{A}{x}=\frac{x}{B}$ e a média harmônica y é obtida recorrendo-se à relação $\frac{A}{B}=\frac{A-y}{y-B}$.
Problema de conversão	Essa categoria contempla problemas envolvendo a conversão entre razões, taxas e frações.
Problemas envolvendo unidades de medida e números	Nessa categoria estão problemas sobre os quais o indivíduo precisa ter clareza, não somente da relação entre os números, mas também da relação entre as unidades.
Problema de translação	Nessa categoria, o indivíduo precisa considerar uma dada razão e representar a mesma relação usando outro sistema representacional.

Fonte: adaptado de Bianchini e Lima (2023)

Contudo, alguns destes problemas, como a conversão entre sistemas de representação, não surgem nos livros didáticos e são até pouco frequentes na investigação sobre esta temática por representarem ações dinâmicas difíceis de traduzir em linguagem escrita, muito embora estejam associados a fenômenos usuais do cotidiano e aos processos apresentados pelos estudantes na resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade (Lesh; Post; Behr, 1988). Como esses problemas não costumam surgir nos livros didáticos, é importante que o professor tenha o

conhecimento a respeito, o qual se caracteriza como inerente à prática do professor de matemática.

Nesse sentido, assumimos uma perspectiva que considera as especificidades do conhecimento do professor de matemática e que, portanto, prioriza a sua natureza e o conteúdo especializado, no caso o conhecimento acerca do tópico proporcionalidade, incorporando dimensões tanto do domínio do conhecimento do conteúdo como pedagógico do conteúdo. No âmbito deste trabalho, a conceitualização do Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo *et al*., 2018), que é abordado no próximo capítulo.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo discorremos acerca do modelo teórico-analítico Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK, o qual será usado na elaboração das tarefas, a fim de fundamentar a sua intencionalidade, e como ferramenta de análise para os conhecimentos manifestados pelos professores participantes desta pesquisa. Além disso, fazemos também uma articulação entre o objeto matemático que será foco deste estudo e o modelo, de forma a situar a proporcionalidade dentro da perspectiva do MTSK.

3.1 MATHEMATICS TEACHER'S SPECIALIZED KNOWLEDGE – MTSK

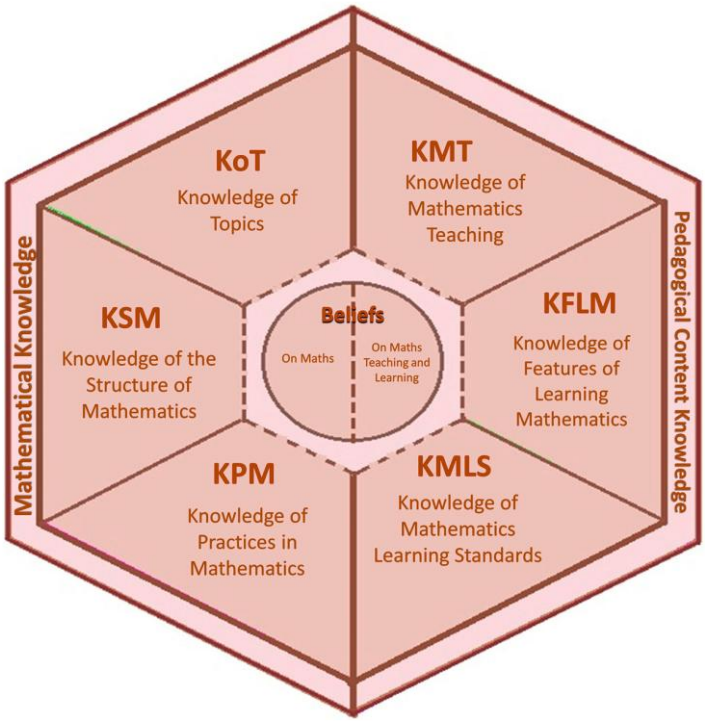
Devido a importância do conhecimento do professor, nas últimas décadas desenvolveu-se propostas de modelos teóricos que se aprofundam em aspectos específicos do conhecimento do professor. Dentre esses, o Mathematics Teachers' Specialized Knowledge - MTSK[7] (Carrillo *et al.*, 2018), que se fundamenta nas ideias propostas por Shulman (1896) que tratam de investigações a respeito do conhecimento do professor – em que propõe os domínios de conhecimento *Content Knowldge* e o *Pedagogical Content* Knowldge – e tem as suas origens na tentativa de refinamento do modelo Mathematics Knowledge for Teaching – MKT (Ball; Thames; Phelps, 2008), a fim de superar as limitações encontradas no uso deste para analisar o conhecimento matemático especializado do professor de e que ensina matemática. Em nossa pesquisa, tomaremos como base teórica o MTSK, por entendermos ser esse modelo o mais completo e refinado quanto às especificidades do conhecimento do professor.

O MTSK constitui-se de três domínios: *Mathematics Knowledge* – MK, que se refere ao conhecimento do professor a respeito da matemática como uma disciplina científica dentro de um contexto educacional, *Pedagogical Content Knowledge* – PCK, que abrange o conhecimento relacionado ao conteúdo matemático em termos do seu processo de ensino e aprendizagem, e o domínio das *Beliefs*, que são as crenças e

[7] Optamos por manter a nomenclatura em inglês pois esta é uma conceitualização do professor reconhecida em nível internacional, e a tradução desvirtua não apenas o sentido, mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

percepções do professor a respeito tanto da matemática quanto do seu processo de ensino e aprendizagem. O primeiro domínio subdivide-se em *Knowledge of Topics* – KoT, *Knowledge of the Structure of Mathematics* – KSM e *Knowledge of Practices in Mathematics* – KPM, enquanto o segundo é composto pelos subdomínios *Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT, *Knowledge of Features of Learning Mathematics* – KFLM e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* – KMLS (Figura 2).

Figura 2 – Domínios e subdomínios do modelo MTSK



Fonte: Carrillo *et al.* (2018)

Cada um desses subdomínios é composto por “categorias” que se referem a aspectos específicos deles. Não obstante a aparente compartimentalização, esta tem caráter meramente operatório, dada a impossibilidade de analisar com atenção a completude do conhecimento do professor, isto é, a categorização não implica que o conhecimento especializado se constitua por elementos independentes ou pela mera soma de diferentes tipos de conhecimento.

Pelo contrário, trata-se de um sistema integrado, no qual os conhecimentos dos domínios se articulam e interagem de forma dinâmica (Scheiner *et al.*, 2019). Nessa direção, Carrillo *et al.* (2014) reforçam o fato que o conhecimento do professor tem todos os subdomínios de forma integral e que o MTSK permite uma visão holística desse conhecimento, podendo, no mesmo episódio, encontrar vários subdomínios do

conhecimento do professor (não ignorando o fato de que os subdomínios também se relacionam entre si).

Nas subseções abaixo, apresentaremos primeiro os subdomínios, e suas respectivas categorias, que compõem o MK para, em seguida, tratar dos que integram o PCK e, ao final, falaremos brevemente das *Beliefs*. Entretanto, visto ser necessário apresentar uma articulação entre o conteúdo que será o foco da pesquisa (proporcionalidade) e o conhecimento especializado do professor de matemática, ao final da descrição de cada categoria dos subdomínios haverá um exemplo de conhecimento inerentes ao tópico de proporcionalidade relacionados à devida categoria, o que atuará como uma estratégia de conscientização teórica para compreender o conhecimento especializado associado ao ensino desse tópico.

3.1.1 Mathematics Knowledge – MK

Esse subdomínio refere-se ao conhecimento do professor a respeito da própria disciplina que ensina. Dito isso, nesse caso, o objeto de pesquisa é saber precisamente o que e como um professor de matemática sabe/deve saber matemática (Carrillo *et al.*, 2014), levando em conta a diferente natureza entre o conhecimento dos professores de e que ensinam matemática e a dos demais usuários dessa disciplina, como engenheiros e os próprios matemáticos (bacharéis). Abaixo descrevemos os três subdomínios que compõem o MK.

3.1.1.1 *Knowledge of Topics* – KoT

O subdomínio KoT refere-se ao conhecimento profundo do conteúdo matemático em si, isto é, conhecer os conteúdos matemáticos e seus significados de maneira fundamentada e sempre com um nível de profundidade, organização e estruturação maior do que se espera dos estudantes (Ma, 1999). Esse subdomínio é composto por quatro categorias que caracterizaremos abaixo.

A categoria *Definições, propriedades e fundamentos* refere-se ao conhecimento das propriedades que caracterizam um determinado objeto e o tornam definível, bem como às maneiras alternativas utilizadas pelo professor para defini-lo,

(sem abranger, contudo, o conhecimento sobre os critérios que uma definição deve atender) (Carrillo *et al.*, 2014), como, por exemplo, quando o professor define razão e proporção como conceitos distintos, indicando que a razão é uma comparação entre grandezas e a proporção é uma igualdade entre razões. Além disso, sabendo que a proporcionalidade pode ser definida a partir de diversas perspectivas, cada uma fundamentando-se em determinado aspecto da matemática, é dever do professor conhecer tantas quanto possível, visto que apresentam propostas complementares que proporcionam uma compreensão mais rica do conceito, ou seja, se uma única forma ou perspectiva for selecionada, não haverá uma compreensão ampla e profunda da proporcionalidade (Fuentes Leal, 2020).

Ademais, essa categoria abrange também o conhecimento das propriedades e fundamentos que são atribuídos a um tema em específico, como o conhecimento da seguinte propriedade de grandezas proporcionais: "Seja $x \mapsto y$ uma proporcionalidade. Se $x_1 \mapsto y_1, x_2 \mapsto y_2, \dots, x_n \mapsto y_n$, então $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \mapsto y_1 + y_2 + \cdots + y_n$. Com efeito, tendo-se $y_1 = kx_1, y_2 = kx_2, \dots, y_n = kx_n$, segue-se que $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = kx_1 + kx_2 + \cdots + kx_n = k(x_1 + \cdots + kx_n)$" (Lima, 2006, p. 8).

A categoria *Fenomenologia e aplicações* pode ser tratada a partir de dois pontos de vista. Por um lado, refere-se ao conjunto de situações em que o professor pode situar um tema, dando sentido a ele e gerando conhecimento matemático, entre elas, aquelas que aparecem na gênese do próprio conceito (Carrillo *et al.*, 2014), como o conceito de incomensurabilidade e os processos relacionados a grandezas proporcionais decorrentes dele, que são estranhos ao estudante do ensino fundamental, mas podem ser refletidos fenomenologicamente através de uma tarefa que envolva investigação histórica no ensino da matemática, por exemplo. Por outro lado, abrange o conhecimento dos usos e aplicações de um tópico, como o professor conhecer a aplicação do conceito de escala quando se trabalha com planta baixa de construções.

A categoria *Registros de representação* refere-se às diferentes formas as quais o professor pode recorrer ao representar o conceito, processo ou procedimento, as quais podem ser gráficas, algébricas, aritméticas, pictóricas, linguagem natural etc., bem como o conhecimento da notação e vocabulário apropriado associado a essas representações (Carrillo *et al.*, 2018). Incluiríamos aqui o professor saber apresentar as relações multiplicativas existentes entre duas grandezas proporcionais a partir de

diferentes tipos de representações – gráfica, tabela e expressão algébrica etc., ou quando representa uma razão por meio de uma fração, uma tabela ou um gráfico.

A categoria *Procedimentos* abrange o conhecimento de algoritmos convencionais e alternativos, como proceder com eles, as condições suficientes para usá-los, os fundamentos matemáticos desses algoritmos (porque eles são utilizados dessa maneira) – o que implica uma conexão com as propriedades e seus fundamentos – e, finalmente, as características que o objeto resultante teria associado ao tema em questão (Carrillo *et al.*, 2014). Essa categoria inclui, por exemplo, o professor saber em que tipo de situações é conveniente utilizar estratégias e algoritmos que envolvem o raciocínio multiplicativo ou o raciocínio aditivo, assim como saber o que fundamenta a famosa “regra de três”, usada para resolver situações que envolvem proporcionalidade e porque ela pode ser usada nesse tipo de situação.

3.1.1.2 *Knowledge of the Structure of Mathematics* – KSM

O KSM abrange o conhecimento do professor sobre as conexões que este pode fazer entre diferentes tópicos, especificamente da matemática, visto que as relações extramatemáticas compõem a categoria *Fenomenologia e aplicações*, do KoT. Segundo Gamboa e Figueiras (2014, p. 340), essas conexões são como “redes de vínculos que coordenam definições, propriedades, técnicas e procedimentos para construir interconceitos”, as quais são dotadas de caráter lógico e coerente (Montes; Climent, 2016).

Esse subdomínio abrange as conexões interconceituais do tipo temporais – como uma visão sequencial que gera conexões de complexidade e simplificação, sem se prender às artificialidades do currículo – e do tipo que leva em consideração a demarcação entre conceitos (Carrillo *et al.*, 2018). As conexões intraconceituais estão mais próximas do KoT, pois possuem sua base nas propriedades de determinado conceito e nos fundamentos destas (Ibidem, 2018), por isso não são consideradas no KSM, o qual possui quatro categorias que serão descritas abaixo.

A manifestação da categoria *Conexões de complexificação* ocorre quando um professor reflete ou usa um conceito de uma perspectiva mais avançada do que aquela correspondente ao contexto escolar em que leciona. Ou seja, é a visão de um conteúdo mais elementar a partir de um ponto de vista mais avançado (Klein, 1933).

Um exemplo dessa conexão seria o conhecimento de que a proporcionalidade direta é um caso particular de função linear, ou seja, a função linear pode ser considerada uma generalização da proporcionalidade direta, já que toda relação de proporcionalidade direta pode ser expressa por uma função linear da forma $f(x) = ax$. A conexão de complexificação ocorre quando o professor apresenta a proporcionalidade direta como um caso particular da função linear, ajudando o aluno a compreender que nem toda função linear é uma proporcionalidade direta, mas toda proporcionalidade direta é uma função linear.

Na categoria *Conexões de Simplificação* se relacionam os conteúdos que estão sendo ensinados agora com conteúdos anteriores, ou seja, tem-se uma visão da matemática avançada de um ponto de vista elementar, o que se reflete na retrospectiva dos conteúdos ensinados potencializados pelos anteriores (Carrillo *et al.*, 2014). Um exemplo de conexão de simplificação no âmbito da proporcionalidade ocorre quando a relação proporcional é compreendida como uma extensão da multiplicação por um fator constante. Nesse caso, um conceito matemático mais estruturado, a invariância da razão, é interpretado a partir de conhecimentos aritméticos previamente consolidados, permitindo compreender a proporcionalidade direta como generalização da ideia de “multiplicar sempre pelo mesmo número”, evidenciando uma visão elementar de um conteúdo matemático mais avançado.

Na categoria *Conexões auxiliares* o professor utiliza um conceito ou tema diferente daquele que está abordando, para acrescentar um elemento adicional, que sem ser o foco da atividade matemática, fornece elementos que a sustentam (Montes; Climent, 2016), isto é, são conexões que, embora não sejam centrais para o conceito estudado, ajudam a resolver problemas ou a compreender melhor a ideia. Um exemplo seria usar, quando apropriado e conveniente, operações com frações para trabalhar com proporcionalidade.

A categoria *Conexões transversais* relaciona-se à natureza dos conceitos e ocorre quando há uma qualidade comum entre dois tópicos que os conecta, e as formas de pensar associadas a esses tópicos contemplam essa característica comum (Carrillo *et al.*, 2014). Um exemplo seria o fato de que a proporcionalidade pode ser relacionada ao tópico de probabilidade por meio de razões, como ao calcular a probabilidade de um evento simples – a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de possibilidades pode ser tratada como uma proporção. Essa conexão

revela como a ideia de razão e proporção permeia diferentes áreas da Matemática, criando vínculos que ajudam a compreender conceitos aparentemente distintos.

3.1.1.3 *Knowledge of Practices in Mathematics* – KPM

Esse subdomínio abrange qualquer atividade matemática realizada sistematicamente, que representa um pilar da criação matemática e que está em conformidade com uma base lógica da qual regras podem ser extraídas (Carrillo *et al.*, 2018). Dessa forma, o termo *prática* nesse contexto refere-se ao funcionamento da própria matemática e não ao processo de ensino da disciplina.

Trata-se de saber como o conhecimento é explorado e gerado em matemática, como se estabelecem relações, correspondências e equivalências, como se argumenta, se raciocina e se generaliza, qual o papel da convenção e quais as características de alguns dos elementos com os quais a matemática é feita (como uma definição ou uma prova) (Carrillo *et al.*, 2014), além do conhecimento de estratégias de resolução de problemas e aspectos da comunicação matemática, como a precisão no uso da linguagem (Carrillo *et al.*, 2017; Carrillo *et al.*, 2018).

Considera-se também o conhecimento do professor sobre a lógica que sustenta cada uma dessas práticas e sobre a sintaxe própria da matemática (Carrillo *et al.*, 2018). Além disso, por se tratar de um conhecimento que envolve o funcionamento da matemática, o KPM serve de base ou influencia o desenvolvimento de outros subdomínios do conhecimento especializado do professor, especialmente aqueles relacionados ao conhecimento pedagógico do conteúdo (Delgado-Rebolledo; Zakaryan, 2020).

O KPM por muitos anos permaneceu carente de um estudo sistemático do qual emergisse uma categorização bem definida, havendo apenas indicadores e tentativas de encontrar descritores para os conhecimentos que o compõem. Entretanto, a partir de pesquisas com professores universitários de matemática, Delgado-Rebolledo (2020), em sua tese de doutorado, preencheu essa lacuna quando propôs quatro categorias para esse subdomínio, as quais são discriminadas abaixo.

Com relação a categoria *Prática de demonstrar*, Delgado-Rebolledo, Zakaryan e Carvajal (2022) destacam a importância da demonstração para a educação dos estudantes em todos os níveis de ensino, pois ela favorece a compreensão da

matemática, bem como o desenvolvimento e a comunicação do conhecimento matemático. Nesse sentido, considera-se essencial que os professores compreendam sua natureza, suas funções e sua estrutura (Vicario; Carrillo, 2005), portanto, dada sua relevância, ela foi proposta como categoria do KPM.

Além disso, as pesquisas que abordam a categorização do KPM (Campos-Cano; Flores-Medrano, 2019; Alfaro-Carvajal *et al*., 2020; Delgado-Rebolledo, 2020) estão de acordo na descrição de subcategorias para a prática de demonstração: *conhecimento de métodos e tipos de demonstração* e *conhecimento das funções de demonstração*, sendo que Delgado-Rebolledo (2020) acrescenta a estas mais uma subcategoria denominada *conhecimento de como desenvolver demonstrações*.

Segundo Delgado-Rebolledo, Zakaryan e Carvajal (2022), a subcategoria *Métodos e tipos de demonstração* está relacionada ao modo como se conduzem as demonstrações de proposições matemáticas, com base em sua estrutura lógico-sintática, isto é, ela abarca o conhecimento do professor sobre o funcionamento dos tipos de demonstração – método direto, métodos indiretos (redução ao absurdo e contrapositiva) e método de indução matemática.

Além disso, inclui o conhecimento do professor sobre como as demonstrações de existência e/ou unicidade podem ser feitas, bem como sobre regras de inferência, equivalências lógicas e condições suficientes ou necessárias. Um exemplo seria o professor apresentar aos estudantes a necessidade da equivalência entre as razões que relacionam duas grandezas para a implicação de uma situação de proporcionalidade entre elas, demonstrando seu conhecimento do significado das condições necessárias e suficientes em uma prova.

Com respeito a subcategoria *Funções de demonstração*, Villiers (1993) propõe cinco funções para a demonstração, a saber: *verificação* (sobre a verdade de uma afirmação), *explicação* (por que é verdade e quais significados cercam uma afirmação), *sistematização* (organização dos resultados em um sistema axiomático), *descoberta* (possibilidade de surgimento de novos resultados) e *comunicação* (dos resultados e por que eles são, ou não, verdadeiros). Um exemplo de demonstração na função de explicação seria o professor conhecer por que ele pode montar uma relação proporcional para a resolver um problema do tipo “valor faltante”. A subcategoria *Como desenvolver demonstrações* inclui o conhecimento do professor sobre o uso da particularização, da generalização e de contraexemplos como apoio para desenvolver uma demonstração (Delgado-Rebolledo, 2020).

A categoria *Prática de definir* abrange o conhecimento do professor sobre a construção de definições e pode ser dividida em duas subcategorias: *construção de definições* – inclui o conhecimento do professor sobre como construir uma definição a partir da extensão de outra (Delgado-Rebolledo, 2020), neste caso, uma definição do tipo construtiva, visto que definições descritivas estão contempladas no KoT (Carrillo *et al.*, 2018), como conhecer como construir a definição de proporcionalidade a partir da definição de razão – e *características da definição* – o professor deve conhecer as características e atributos necessários a uma definição, que são hierarquia, não circularidade, não ambiguidade, não contradição, minimalidade, independência sob mudança de representação, elegância e equivalência (Escudero *et al.*, 2014).

A categoria *Prática de resolução de problemas* envolve o uso de estratégias heurísticas[8] em uma variedade de situações, como desenhar um esquema; supor a solução do problema e fazer deduções a partir dela; examinar um exemplo concreto e tentar resolver um problema mais geral (Polya, 1945), além de simplificar ou subdividir o problema; explorar analogias, considerando problemas equivalentes substituindo condições, introduzindo elementos auxiliares ou reformulando o problema; e verificar procedimentos e soluções (Schoenfeld, 2016).

Um exemplo mais geral seria conhecer as quatro etapas de Polya (1945) para resolução de problemas, a saber: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e verificar a solução. Já um exemplo mais específico ao tópico trabalhado seria conhecer a estratégia de tabelar as quantidades das variáveis envolvidas com vistas a fazer uma comparação entre suas variações ou encontrar a constante de proporcionalidade.

Enquanto o que foi dito comporia a subcategoria *Prática de resolução de problemas*, Delgado-Rebolledo (2020), embora não a descreva em seu trabalho, propõe uma outra possível subcategoria para a prática de resolução de problemas, que seria a *Formulação de problemas*, a qual incluiria o conhecimento da formulação de um problema – a partir da variação de um determinado problema (Silver, 1994) ou da geração de novos problemas a partir de uma situação particular ou de alguma ideia (Stoyanova; Ellerton, 1996) –, seu contexto e o conjunto de soluções aceitáveis (Piñeiro; Castro-Rodríguez; Castro, 2019).

[8] Polya (1945) introduziu o termo *heurística*, o qual descreve a literatura sobre estratégias de resolução de problemas matemáticos Schoelfeld (2016).

Peña-Ricón *et al.* (2023) trazem exemplo de um grupo de professores em formação inicial que, ao formular um problema envolvendo proporcionalidade, por erros de sentido, embora a relação entre as variáveis envolvidas correspondesse ao tipo de relação matemática que se pretendia representar, havia aspectos que careciam de sentido entre a situação problemática e a realidade, inviabilizando a conexão desse conceito com o cotidiano do aluno, o que evidencia uma fragilidade no conhecimento do professor com relação a essa categoria.

A categoria *O papel da linguagem matemática* abrange o conhecimento do professor sobre *o significado dos símbolos e seu propósito* – como, por exemplo, designar com precisão e clareza ou abreviar (Davis; Hersh, 1981) –, bem como o conhecimento do *uso da linguagem matemática*, preservando valores epistêmicos como precisão e simplicidade (Delgado-Rebolledo, 2020), mas mantendo a rigorosidade e a natureza formal, porém associada menos ao formalismo do que ao significado (Delgado-Rebolledo; Zakaryan; Carvajal, 2022).

Dito isso, o professor precisa, além de conhecer o significado dos símbolos matemáticos, saber interpretá-los e usá-los adequadamente e quando for conveniente. Um exemplo seria conhecer o uso dos símbolos da álgebra para generalizar relações proporcionais entre grandezas, ou mesmo o conhecimento do papel do símbolo $\propto$ para reduzir e abreviar a informação de quando duas grandezas são proporcionais.

O Quadro 3 apresenta uma síntese dos subdomínios que compõem o MK e suas respectivas categorias.

Quadro 3 – Subdomínios do MK e suas respectivas categorias

SUBDOMÍNIO	**CATEGORIA**
KoT	Definições, propriedades e fundamentos
	Fenomenologia e aplicações
	Procedimentos
	Registros de representação
KSM	Conexões de complexificação
	Conexões de simplificação
	Conexões auxiliares
	Conexões transversais
KPM	Prática de demonstrar
	Prática de definir
	Prática de resolver problemas
	O papel da linguagem matemática

Fonte: adaptado de Delgado-Rebolledo e Espinoza-Vásquez (2021).

3.1.2 Pedagogical Content Knowledge – PCK

Esse subdomínio abrange um conhecimento particular do professor, próprio da profissão de ensino. Sua importância se deve ao fato da necessidade do professor de conhecer o conteúdo matemático dos pontos de vista do conteúdo a ser ensinado, do conteúdo a ser aprendido e de uma visão geral dos padrões de aprendizagem que podem ser ou que se pretendem atingir (Carrillo *et al.*, 2014).

Entretanto, o PCK não inclui conhecimentos pedagógicos gerais, comuns a outras áreas de conhecimento, nem mesmo quando aplicados em contextos matemáticos, senão apenas aqueles conhecimentos pedagógicos em que o conteúdo matemático condiciona o ensino e a aprendizagem da matemática, visto que esse subdomínio, mais do que se tratar da intersecção entre o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico geral, é um tipo específico de conhecimento pedagógico que deriva principalmente da matemática (Carrillo *et al.*, 2018).

É neste domínio que a literatura de pesquisa em Didática da Matemática tem mais relevância como fonte de conhecimento para professores (Carrillo *et al.*, 2014). Caracterizamos abaixo os três subdomínios que compõem o PCK.

3.1.2.1 *Knowledge of Mathematics Teaching – KMT*

Esse subdomínio engloba o conhecimento que o professor tem sobre as características do conteúdo matemático como objeto de ensino, englobando, contudo, apenas o que o professor conhece sobre as possibilidades distintas de ensino condicionadas pela natureza conteúdo específico (Escudero-Ávila, 2015). Assim como nos demais subdomínios pertencentes ao PCK, esse conhecimento pode ser baseado tanto em teorias extraídas da literatura de pesquisa em educação matemática quanto na experiência pessoal dos professores e na reflexão sobre sua prática (Carrillo *et al.*, 2018).

O KMT é divido em três categorias. A primeira, *Teorias de ensino da matemática*, envolve o conhecimento de teorias, tanto institucionalizadas quanto originadas a partir de reflexões sobre a própria prática em sala de aula, a respeito do ensino de matemática (Escudero-Ávila, 2015), como, por exemplo, conhecer a Teoria

das Situações Didáticas, de Brousseau (1986), e sua estrutura geral (ação, formulação, validação e institucionalização) a fim de planejar e criar ambientes formativos para promover oportunidades de aprendizagem. Segundo Schoenfeld e Kilpatrick (2008), essas teorias condicionam a atuação do professor e o uso que ele faz do conhecimento.

A categoria *Recursos de ensino* inclui o conhecimento das características matemáticas de recursos e materiais de ensino (concretos ou virtuais), como livros didáticos, materiais manipuláveis (Tangram, Barras de Cuisenaire, Régua de frações entre outros), recursos tecnológicos etc. para o ensino de um conteúdo específico. Destaca-se a importância do conhecimento desses recursos (e de suas características intrínsecas) visto que eles “se caracterizam como elementos reguladores entre os sujeitos do processo de ensino e aprendizagem e os conhecimentos (conteúdos) que devem ser aprendidos” (Teixeira; Passos, 2013, p. 159).

Contudo, uma vez que as características matemáticas do material impactam diretamente nas suas potencialidades e limitações para se trabalhar determinado tópico, essa categoria inclui e destaca a importância da avaliação crítica do professor sobre como esse recurso pode aperfeiçoar o ensino do tópico específico e até que ponto ele poderá ser utilizado para tal (Escudero-Ávila, 2015). Como por exemplo conhecer as limitações provenientes da forma como tópicos inerentes à proporcionalidade são tratados nos livros didáticos e que podem gerar obstáculos à compreensão dos estudantes deste conceito.

A categoria *Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos* envolve o conhecimento do potencial matemático que certas sequências de atividades, estratégias, tarefas e técnicas podem ter para ensinar um tópico específico e em um determinado momento de ensino, assim como quaisquer possíveis limitações e obstáculos que possam surgir e que devem ser superados a fim de que se atinja o objetivo traçado (Escudero-Ávila, 2015). Além disso, inclui também o conhecimento de diferentes maneiras de representar um conteúdo específico (seja por meio de metáforas, situações ou explicações) e de qual é o melhor momento para se usar cada uma delas.

Um exemplo nessa categoria é o uso da “representação de setas”, que comumente é utilizada pelos professores na sala de aula de matemática quando se está resolvendo um problema que envolve grandezas proporcionais, porém que pode gerar obstáculos para a devida aprendizagem dos estudantes. Em seu trabalho, Brabo (2020) constatou que os estudantes relacionavam as setas diretamente aos valores

numéricos, sem considerar as grandezas que esses valores representavam. Assim, interpretavam equivocadamente que setas apontando para baixo indicavam uma diminuição nos valores, enquanto setas apontando para cima sinalizavam um aumento. Segundo o autor, muitos professores utilizam essa representação por não haver superado e encontrado uma maneira diferenciada de comunicar esse conteúdo mencionado.

É importante observar que nessa categoria considera-se os elementos que denotam intencionalidade do ensino do professor sobre um determinado assunto, por exemplo,

> em que momento e que tipo de ajuda fornecer aos alunos, quais exemplos são mais potentes de acordo com o tempo e a intenção da aula ou conhecer uma tarefa específica para promover a aprendizagem de um conteúdo matemático (conhecer a Situação Didática do quebra-cabeça para o tópico de proporções) (Carrillo *et al.*, 2014, p. 69)

Abrange também o conhecimento de exemplos adequados para cada etapa ou contexto específico, o conhecimento de como organizar uma sequência estruturada de exemplos para auxiliar na compreensão do significado do conteúdo matemático, além do conhecimento das condições particulares da sala de aula às quais determinadas sequências de aprendizagem são direcionadas. Essas decisões orientam as ações do professor, e sempre em função do conteúdo matemático que está sendo tratado (Escudero-Ávila, 2015).

Segundo a autora, esse conhecimento que permitirá ao professor optar por um material específico para aprender determinado conceito ou procedimento matemático, possibilitando-lhe selecionar os exemplos mais adequados e eficazes ou escolher um livro didático com base em suas potencialidades como recurso didático.

3.1.2.2 *Knowledge of Features of Learning Mathematics – KFLM*

O KFLM abrange o conhecimento sobre as características de aprendizagem inerentes ao conteúdo matemático, tomando este como objeto de aprendizagem. Dito isso, este subdomínio foca menos no estudante como ator principal do processo de aprender do que nas características de aprendizagem derivadas da interação dele com o tópico que está sendo trabalhado (Carrillo *et al.*, 2014). Escudero-Ávila (2015) enfatiza a importância do conhecimento que permite ao professor interpretar as

produções dos alunos assim como desenvolver a capacidade de antecipar possíveis raciocínios que podem surgir, bem como mapear diferentes contextos que influenciam a aprendizagem, a fim de obter controle sobre esse processo e compreender a origem dos raciocínios, erros, dificuldades de aprendizagem ou concepções equivocadas de seus estudantes.

Devido à grande abrangência desse subdomínio, atualmente ele é subdividido em quatro categorias, as quais são descritas a seguir. A primeira é *Teorias de aprendizagem da matemática*, a qual refere-se ao conhecimento que o professor tem sobre os possíveis modos de compreensão associados à própria natureza do conteúdo matemático. Além disso, inclui também o conhecimento de estruturas ou teorias sobre o desenvolvimento cognitivo do aluno tanto para matemática em geral quanto para conteúdos específicos (Escudero-Ávila, 2015).

Um exemplo seria o conhecimento a respeito da Teoria dos Campos Conceituais, mais especificamente o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas (Vergnaud, 1994), a qual compreende situações que envolvem multiplicação, divisão, ou uma combinação das duas e que, dentro das relações quaternárias, dão sentido ao conceito de proporcionalidade. Dito isso, esse campo permite ao professor estudar o desenvolvimento e a aprendizagem dos estudantes com respeito ao tópico específico de proporcionalidade.

A segunda categoria é *Pontos fortes e dificuldades associadas à aprendizagem*, que inclui o conhecimento sobre erros, obstáculos e dificuldades, comuns e incomuns, relacionados às características e processos de aprendizagem (Muñoz-Catalán, 2010; Sosa, 2011), abrangendo, contudo, apenas aqueles que são específicos do conteúdo matemático a ser trabalhado, ou seja, aqueles que estão diretamente associados às características matemáticas e não pedagógicas do conteúdo (Escudero-Ávila, 2015). Um exemplo seria o professor conhecer que os estudantes costumam pensar que quando há duas grandezas e ambas aumentam ou ambas diminuem, significa que existe situação de proporcionalidade, ou seja, os estudantes têm dificuldade em identificar uma proporção, isto é, em compreender a relação existente entre duas grandezas diretamente proporcionais.

Além dos erros e dificuldades, Carrillo *et al.* (2014) afirmam que essa categoria também inclui o conhecimento das características que podem ser vantajosas ou potencializadoras para a aprendizagem, associadas à natureza da própria matemática ou de um determinado conteúdo, as quais podem estar associadas ao contexto

específico em que o conteúdo matemático é aprendido, de modo que diferentes nuances nas características de aprendizagem de um determinado grupo de indivíduos podem ser reconhecidas (Pinto; González, 2006).

A próxima categoria é *Formas de interação do estudante com o conteúdo matemático*, a qual inclui o conhecimento que o professor tem sobre os processos e estratégias dos alunos, tanto os comuns quanto os inusitados (Sosa; Aguayo; Huitrado, 2013). Por exemplo, o conhecimento do professor sobre os métodos de solução normalmente usados para resolver um problema de proporção do tipo “valor omisso” (Lesh; Post; Behr, 1988), como a estratégia aditiva, a busca pelo valor unitário (“quanto para um”), o uso do escalar multiplicativo (“quantas vezes algo”) ou através da relação funcional.

Além disso, inclui-se aqui também o conhecimento sobre a linguagem ou vocabulário, formal ou informal, comumente usados pelos estudantes ao abordar um determinado conteúdo (Escudero-Ávila, 2015). Segundo Escudero-Ávila, Climent e Vasco (2016), essa categoria poderia englobar ainda o conhecimento que o professor tem sobre os detalhes da resolução de um problema suscetível de desviar a atenção dos estudantes para aprender a solução do mesmo, ou sobre os cálculos matemáticos que poderiam fazer mecanicamente os estudantes sem saber realmente o que estão fazendo, como, por exemplo, a aplicação automática da “regra de três”, em problemas envolvendo proporcionalidade, sem realmente compreender a relação entre as grandezas que estão sendo trabalhadas.

A última categoria diz respeito aos *Aspectos emocionais da aprendizagem da matemática* (Hannula, 2006). Essa categoria envolve a consciência da ansiedade matemática (Maloney; Schaeffer; Beilock, 2013; Mori, 2024) e dos preconceitos ou concepções errôneas que podem existir sobre um tópico específico por exemplo (Escudero-Ávila, 2015). Não obstante inclui também aspectos cotidianos como o que motiva os alunos, seus interesses e expectativas da matemática (tanto em geral quanto em termos tópicos específicos), e que pode manifestar-se na escolha de registros de representação ao definir problemas para um tópico específico, por exemplo (Carrillo *et al.*, 2018).

3.1.2.3 *Knowledge of Mathematics Learning Standards – KMLS*

O subdomínio KMLS reflete sobre a importância de o professor estar ciente das especificações curriculares em qualquer nível específico, embora não deva limitar-se a esse documento. Esta é uma área de conhecimento que permite ao professor ser crítico e reflexivo ao considerar o que o aluno deve aprender e qual foco deve ser tomado no nível escolar específico ou período de desenvolvimento (Carrillo *et al.*, 2018).

Diferentemente do conhecimento localizado no KSM, refere-se aqui a uma localização temporal dos conteúdos matemáticos e não às conexões interconceituais que podem existir entre os diferentes tópicos (Escudero-Ávila, 2015). Nesse subdomínio são consideradas três categorias: *Expectativas de aprendizagem*, *Nível esperado de desenvolvimento conceitual e processual* e *Sequenciamento de tópicos*, que serão caracterizadas a seguir.

O conhecimento sobre as *Expectativas de aprendizagem* refere-se ao conhecimento sobre o que se espera que o aluno aprenda em um determinado nível escolar, o qual pode ser adquirido pelo professor, seja por meio da consulta a um documento orientador que indique quais são esses conteúdos, seja como uma abstração das habilidades matemáticas específicas que precisam ser desenvolvidas em seus alunos naquele momento escolar (Carrillo *et al.*, 2014).

Inclui, por exemplo conhecer que a BNCC recomenda que os estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental (12-13 anos de idade) desenvolvam a habilidade de "resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas" (Brasil, 2018, p. 307).

A categoria *Nível esperado de desenvolvimento conceitual e processual* refere-se ao conhecimento sobre a profundidade com que um determinado conteúdo matemático deve ser abordado, em relação a um determinado ano letivo (Escudero-Ávila, 2014). De acordo com a BNCC, no Ensino Fundamental (6 a 14 anos de idade), o pensamento proporcional pode ser trabalhado a partir da análise de situações que permitam representar a variação de grandezas em um sistema de coordenadas cartesianas, além da exploração e caracterização do comportamento dessa variação, identificando se ela é diretamente proporcional, inversamente proporcional ou se não

segue uma relação de proporcionalidade. Já no Ensino Médio (15 a 17 anos de idade), há um aprofundamento conceitual da proporcionalidade ao relacioná-la ao conceito de funções polinomiais do 2º grau, a partir da identificação de quando uma variável é proporcional ao quadrado da outra, por exemplo (Brasil, 2018).

A categoria *Sequenciamento de tópicos* abrange o conhecimento sobre o sequenciamento de vários conteúdos matemáticos, pensando retrospectivamente e prospectivamente, ou seja, o conhecimento e as habilidades prévias que um estudante deve ter para aprender um novo conteúdo em termos do que as normas indicam, e o conhecimento que precisará ser adquirido para abordar tópicos posteriores (o que não precisa coincidir com as conexões de complexificação ou simplificação que podem ser construídas matematicamente) (Escudero-Ávila, 2014). Como por exemplo o professor conhecer a necessidade do estudo prévio de conceitos como razão e proporção, assim como a resolução de problemas de proporcionalidade para ensinar função (Azcárate; Deulofeu, 1990).

O Quadro 4 apresenta uma síntese dos subdomínios que compõem o PCK e suas respectivas categorias.

Quadro 4 – Subdomínios do PCK e suas respectivas categorias

SUBDOMÍNIO	**CATEGORIA**
KMT	Teorias de ensino da matemática
	Recursos de ensino
	Estratégias, técnicas, tarefas e exemplos
KFLM	Teorias de aprendizagem da matemática
	Pontos fortes e dificuldades na aprendizagem da matemática
	Formas de interação com o conteúdo matemático
	Aspectos emocionais da aprendizagem da matemática
KMLS	Expectativas de aprendizagem
	Nível esperado de desenvolvimento conceitual e processual
	Sequenciamento de tópicos

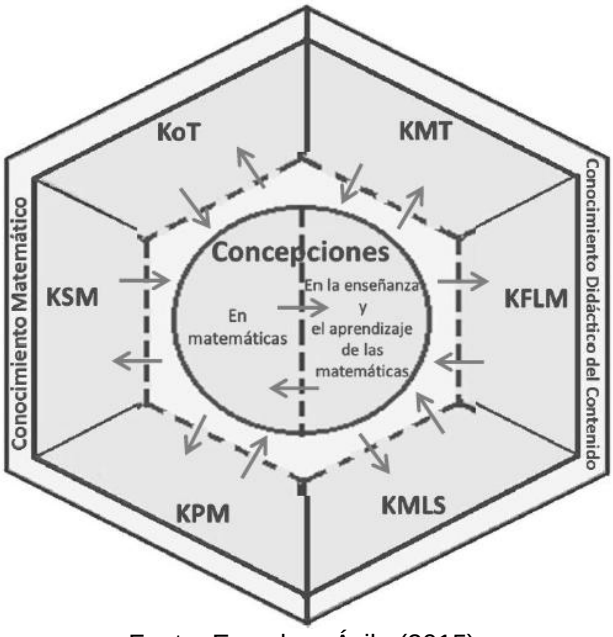
Fonte: adaptado de Delgado-Rebolledo e Espinoza-Vásquez (2021).

3.1.3 Beliefs

Há ainda um terceiro domínio no MTSK, o qual está relacionado às concepções[9] e crenças como elementos que têm relação com a atividade do professor. A prática do professor em sala de aula é profundamente influenciada pelo que pode ser vagamente denominado de *filosofia da matemática* (Thom, 1973), que é um conjunto mais ou menos coerente de concepções e crenças (Thompson, 1992) sobre matemática, como ela é aprendida e como deve ser ensinada, que permeia o conhecimento do professor em cada um dos subdomínios (Carrillo *et al.*, 2018).

O MTSK adota a diferenciação em relação aos dois tipos de natureza das crenças – *crenças sobre a natureza da matemática* e *crenças sobre o ensino da matemática* – e as coloca como vinculadas aos domínios matemático e pedagógico do conteúdo, respectivamente (Montes, 2016). Dito isso, as crenças do professor sobre matemática, seu ensino e aprendizagem impregnam todo o conhecimento que ele possui em cada um dos subdomínios, por isso a representação no centro da figura e com linhas pontilhadas, a fim de enfatizar a reciprocidade entre crenças e domínios de conhecimento (Figura 3).

Figura 3 – Relação entre o MTSK dos professores e suas concepções sobre matemática, seu ensino e aprendizagem



Fonte: Escudero-Ávila (2015)

[9] A exemplo de Escudero-Ávila (2015), os termos “concepções” e “crenças” serão tomadas como sinônimos neste estudo.

Para Montes (2016), considerar as crenças como parte do MTSK se assemelha à prática habitual ao descrever o contexto de um professor (curso em que leciona, anos de experiência, nível sociocultural do centro em que leciona etc.), para posteriormente analisar seus conhecimentos, pois, embora neste caso o que descrevemos seja intrínseco ao próprio professor, tem uma influência indiscutível sobre o objeto a ser analisado. No entanto, Carrillo *et al.* (2014) chamam a atenção para o fato de que as crenças representam uma predisposição através de ações que não podem ser diretamente observadas ou medidas, apenas inferidas.

Como exemplo envolvendo a relação entre crenças e ensino de proporcionalidade, Correal e Rico (2016) apresentam algumas concepções de um grupo de professores do ensino fundamental sobre razão e frações. Alguns aspectos mencionam que as crenças com respeito à razão determinam suas ações no planejamento e execução das aulas. Além disso, os autores também observam que há outros fatores que influenciam se o professor tem certas crenças ou não, como por exemplo a quantidade de experiência no ensino de matemática e a motivação que o professor sente. Dessa forma, crenças e concepções são apresentadas como elementos relacionados ao perfil do professor a ser investigado (Fuentes Leal, 2020).

Não obstante o que foi dito, como as crenças não serão objeto de reflexão neste trabalho, não nos aprofundaremos em sua caracterização e nas discussões que envolvem esse tema[10]. Entretanto, é importante chamar a atenção para o fato de que o professor-pesquisador também possui crenças sobre a matemática, seu ensino e aprendizagem e que estas influenciam constantemente a tomada de decisões e a sintetização, análise e interpretação das produções que compõem sua pesquisa (Carrillo *et al.*, 2014).

Dito isso, Fuentes Leal (2020) enxerga as crenças do pesquisador como uma das condições limitantes presentes na investigação do conhecimento matemático especializado do professor de matemática através do modelo MTSK. Segundo o autor, para superar essa limitação, deve-se evitar ter uma atitude valorativa[11] ou avaliativa com relação às informações coletadas e ao conhecimento do professor.

[10] Para uma discussão mais aprofundada, ver Montes (2016).
[11] No sentido de atribuir juízos de valor à informação analisada, com base em suas próprias crenças e opiniões.

4 CONTEXTO E MÉTODO

Neste capítulo estabelecemos as diretrizes e procedimentos que serão utilizados para atingir os objetivos propostos para a pesquisa. Ele está destinado a abordar os procedimentos metodológicos da investigação, no qual apresentamos a sua abordagem, os instrumentos, descrevemos a escolha e o contexto dos participantes envolvidos e apresentamos os procedimentos de obtenção e análise de dados.

Como mencionado na introdução do trabalho, a presente pesquisa foi desenvolvida no formato *multipaper*, em detrimento do modelo monográfico tradicional. Essa opção fundamenta-se tanto em aspectos acadêmicos quanto formativos e de divulgação científica. Embora a literatura aponte potencialidades e limitações em ambos os formatos, o modelo *multipaper* apresenta como uma de suas principais vantagens a ampliação do alcance da produção científica, uma vez que os estudos são concebidos já em formato publicável, direcionando-se não apenas a uma banca avaliadora, mas a um público mais amplo, composto por pesquisadores, formadores e profissionais da educação (Duke; Beck, 1999).

Nesse sentido, Duke e Beck (1999) argumentam que o estilo e as condições de produção de uma dissertação tradicional nem sempre favorecem sua circulação em contextos reais de pesquisa e prática profissional, visto que a trajetória acadêmica tende a se estruturar em investigações mais focalizadas, avaliadas progressivamente por meio do processo de publicação científica. Assim, a escolha pelo formato multipaper também se justifica pela intenção de ampliar a divulgação dos resultados desta pesquisa para além do contexto universitário, tornando-os mais acessíveis a professores da Educação Básica, público diretamente relacionado à temática investigada e que, em geral, dispõe de tempo limitado para a leitura de trabalhos extensos no formato tradicional de dissertação.

Isso posto, esta pesquisa possui um enfoque teórico interpretativo a partir de uma abordagem qualitativa. Buscamos analisar e compreender o conhecimento matemático especializado mobilizado e desenvolvido por um grupo de futuros professores inseridos em um ambiente formativo, o que vai ao encontro do pensamento de Stake (2011) quando diz que o termo qualitativa significa que a forma

de pensar nesse tipo de pesquisa fundamenta-se principalmente na percepção e na compreensão humana.

Além disso, esta pesquisa se caracteriza como qualitativa devido também ao papel que os pesquisadores terão no decorrer do estudo, visto que, segundo o autor, neste tipo de abordagem, “o próprio pesquisador é um instrumento ao observar ações e contextos e, com frequência, ao desempenhar intencionalmente uma função subjetiva no estudo, utilizando sua experiência pessoal em fazer interpretações” (Stake, 2011, p. 30). Definida a abordagem da pesquisa, dividimo-la em três etapas principais sobre as quais discorremos abaixo.

4.1 ETAPA 1 – REVISÃO DE LITERATURA

Na primeira etapa, quanto aos objetivos, a pesquisa é classificada como exploratória. Na perspectiva de Gil (2022), este tipo de estudo busca oferecer uma compreensão mais aprofundada do problema, com o objetivo de torná-lo mais claro ou de possibilitar a formulação de hipóteses, assim como aperfeiçoar ideias ou aclarar intuições. Com esse propósito, nesta fase, o estudo tem o delineamento de uma pesquisa bibliográfica (Gil, 2022), visto que se trata de um levantamento bibliográfico através de um mapeamento sistemático (Falbo, 2018) em trabalhos publicados em anais eventos da área de Educação Matemática.

O objetivo é obter um panorama do cenário das pesquisas que envolvem o processo de ensino e aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade, e que buscou responder as seguintes questões: Quais as bases teóricas que subsidiam as pesquisas relacionadas a tópicos inerentes à proporcionalidade? Quais teorias de ensino e de aprendizagem são mais utilizadas ao se tratar de tópicos inerentes a proporcionalidade? Quais os principais obstáculos e dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? Quais os principais recursos pedagógicos que têm sido utilizados no processo de ensino e aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? Quais outros tópicos costumam ser relacionados à proporcionalidade?

Quanto às técnicas e instrumentos de coleta de dados, fizemos uso de protocolo de pesquisa, ferramentas de buscas em bancos de dados e ferramentas de síntese de dados para coletar, avaliar e sintetizar a literatura científica sobre os

teóricos, as metodologias de ensino, os obstáculos, os recursos entre outros envolvidos no processo de ensino e aprendizagem da proporcionalidade.

4.2 ETAPAS 2 E 3 – EXPERIMENTAÇÃO

Nas etapas dois e três, a pesquisa é classificada como descritiva, cujo principal objetivo, segundo Gil (2022), consiste em detalhar as características de uma população ou fenômeno específico, ou em identificar as relações existentes entre diferentes variáveis. No caso deste estudo, analisamos as características do conhecimento matemático especializado do professor e seu funcionamento dentro de um contexto específico (o ambiente formativo pautado nas dialéticas da TSD).

Além disso, a pesquisa tem o delineamento de estudo de caso instrumental (Stake, 2005), no qual, segundo o autor, o caso é escolhido com a expectativa de que contribua para uma melhor compreensão de um contexto mais amplo, oferecendo percepções valiosas sobre o tema em questão. Da mesma forma, nesta pesquisa o foco não será o caso em si, mas a compreensão do objeto de estudo, isto é, o conhecimento matemático especializado do professor para o ensino de proporcionalidade.

A prática matemática do professor sustenta-se na implementação de tarefas matemáticas, as quais devem assumir um papel central também na formação desses profissionais (Ribeiro; Gibim; Alves, 2021) uma vez que é um importante elemento para a ampliação e construção dos conhecimentos didático-matemáticos do professor (Pereira; Gusmão, 2020; Flôres; Gusmão, 2022). Tendo isso em vista, optamos por aplicar Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021), as quais são conceitualizadas focando tópicos problemáticos (no caso dessa pesquisa, proporcionalidade) para os estudantes e professores e têm o objetivo de aceder e desenvolver o Conhecimento Interpretativo e Especializado dos professores participantes. Como o foco deste estudo é investigar somente o Conhecimento Especializado, a TpF será estruturada em apenas duas partes – Parte preliminar e Parte I (Silva; Ribeiro, 2023) –, as quais são caracterizadas nas descrições das Etapas 2 e 3 da pesquisa, respectivamente.

A TpF é um dos três documentos que compõem a chamada Tarefa Formativa – TF (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021), os quais

> funcionam em bloco e que têm por objetivo possibilitar, a ‘qualquer pesquisador/formador’ que no desenvolvimento do seu trabalho tenha um conhecimento amplo das abordagens teóricas e metodológicas utilizadas e desenvolvidas nesse contexto específico, implementar as tarefas de forma associada aos objetivos que sustentam a sua conceitualização e elaboração (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021, p. 15).

Os outros dois documentos são denominados Documento do Professor e Documento do Formador. O primeiro é destinado aos futuros professores e apresenta uma discussão das dimensões matemáticas envolvidas na tarefa, que, no contexto desta pesquisa, estão associadas à proporcionalidade, com foco nos subdomínios do conhecimento matemático especializado do professor. Já o Documento do Formador, voltado ao formador de professores, contempla uma discussão mais ampla sobre as formas de implementação da tarefa. Esse documento aborda os objetivos de cada parte e de cada questão proposta, incluindo sugestões de discussões a serem conduzidas, acompanhadas de suas respectivas justificativas, possibilitando que a tarefa seja desenvolvida em consonância com os objetivos estabelecidos (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021).

Apesar da relevância desses documentos, o foco da presente pesquisa recai sobre a Tarefa para Formação, sem a intenção inicial de elaborar explicitamente um documento específico para o professor e outro para o formador.

4.2.1 Etapa 2 – Parte Preliminar

Nesta etapa, os participantes foram 7 (sete) professores de matemática em formação inicial, cursando o 3º período (2º ano) da Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Amazonas – UFAM. Todos os participantes são bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID e estão estagiando em escolas da rede pública de ensino da capital do estado, sendo que 4 (quatro) estagiam em turmas de 7º e 8º ano (12 e 13 anos) e 3 (três), em turmas de Ensino Médio (15 a 17 anos).

Ela foi desenvolvida em dois encontros. No primeiro, com duração de 3 (três) horas, aplicamos um questionário exploratório com o objetivo de aceder ao conhecimento do professor sobre o tópico de proporcionalidade, atentando à dimensão do KoT dos futuros professores, a fim de estabelecer um ponto de partida para as discussões a serem efetuadas futuramente. Esse processo constitui o que

Ribeiro, Almeida e Mellone (2021) denominam de Parte Preliminar de uma Tarefa para Formação e o usaremos para obter um panorama desses conhecimentos antes de qualquer intervenção formativa.

No segundo encontro, a fim de enriquecer nossas análises, fizemos uso de entrevista semiestruturada (Minayo, 2014) tendo em vista o aprofundamento das respostas, o esclarecimento de dúvidas, a obtenção de dados qualitativos, validação das respostas e identificação de novas variáveis, contribuindo, dessa forma, para uma visão mais ampla do fenômeno estudado, isto é, o conhecimento do professor.

De modo geral, com a aplicação da Parte Preliminar da TpF, almejamos aceder ao conhecimento dos professores acerca de como resolver os diferentes tipos de problemas que dão sentido ao conceito de proporcionalidade, assim como das diferentes estratégias que estes podem usar para fazê-lo (Oliveira, 2009; Scheller; Bonotto, 2020; Souza; Palhares; Oliveras, 2015; Spinillo, 1994).

Investigamos também se os professores mobilizam uma atitude crítica quanto a escolha de uma abordagem adequada à cada situação proposta (Burgos *et al.*, 2018). Contudo, cada uma das situações possui uma intencionalidade específica relacionada com determinados conhecimentos que compõem os subdomínios do MTSK os quais buscamos investigar[12].

4.2.2 Etapa 3 – Parte I

A terceira etapa se deu em um contexto formativo pautado nas tipologias da Teoria das Situações Didáticas – TSD (Brousseau, 1986) – *ação*, *formulação*, *validação* e *institucionalização* – como meio para observar a mobilização e estimular o desenvolvimento do conhecimento especializado dos participantes, os quais são um subgrupo de quatro licenciandos pertencentes ao grupo dos que compunham a segunda etapa do estudo.

O principal instrumento de obtenção de dados são as TpFs (Parte I), uma vez que são desenhadas justamente para aceder e desenvolver o conhecimento especializado do professor em contextos formativos (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021). As situações que compõem as tarefas estão fundamentadas nas categorias de

[12] As intencionalidades específicas de cada situação estão descritas nos *papers* 2 e 3 desta dissertação.

problemas envolvendo pensamento proporcional (Lesh; Post; Behr, 1988), que enfatizam diferentes aspectos de proporcionalidade e do pensamento proporcional (Falvo; Jucá, 2022). Além das produções escritas pelos professores ao resolverem às TpFs, também fizemos uso da técnica observação participante (Cohen; Manion; Morrison, 2018) por meio de diário de bordo e gravação de áudio e vídeo, que serão, posteriormente, transcritas linha a linha (Schoenfeld, 2000).

Em relação à escolha da atividade formativa, utilizaremos a estratégia de ofertar um tipo particular de oficina de curta duração com 3 (três) encontros de 3 (três) horas cada. Essa opção se deve ao seu potencial de promover interação entre os participantes na construção de conhecimentos, pois “as oficinas são espaços com potencial crítico de negociação de sentidos, permitindo a visibilidade de argumentos, posições, mas também de deslocamentos, construção e contraste de versões [...]” (Spink; Menegon; Medrado, 2014, p. 33).

Em cada encontro será aplicada e discutida uma TpF, especificamente a Parte I desta, que é estruturada a partir de uma tarefa para o aluno (indicada dentro de um retângulo, para demarcar que é o ponto de partida) que seja passível de os estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental resolverem e serve de motivação para desenvolver o conhecimento dos professores em uma perspectiva mais ampla do que somente discutir como poderia ser implementada em sala de aula (Almeida; Ribeiro, 2021). Em seguida encontram-se algumas questões especificamente desenhadas para o professor, que levam a uma reflexão e discussão sobre as dimensões matemáticas relacionada ao tópico de estudo (no caso desta pesquisa, proporcionalidade), visando desenvolver seu conhecimento especializado (Silva; Ribeiro, 2023), ampliando, dessa forma, o saber fazer e incorporando o entendimento dos porquês associados.

Necessário se faz mencionar que, objetivando seu aprimoramento, antes das intervenções citadas, as tarefas foram testadas e validadas primeiro em um contexto distinto: em meio a uma turma de 11 licenciandos em matemática, estudantes do turno noturno da mesma universidade do grupo focal, e dali emergiram indagações que contribuíram para a reestruturação e refinamento da tarefa final a ser desenvolvida para subsidiar esta pesquisa.

A tarefas, construídas com vistas a aceder e desenvolver o conhecimento especializado dos futuros professores no âmbito de proporcionalidade, foram estruturadas a partir de duas ou três situações (tarefa do aluno) pertencentes às

classes de problemas envolvendo o pensamento proporcional, de Lesh, Post e Behr (1988). A partir das situações propostas em cada TpF, os professores deveriam responder a três perguntas, que permanecem as mesmas em todas as tarefas:

1) Resolva as situações por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino).
2) Para resolver os dois problemas, é utilizada a mesma forma de pensar ou formas diferentes? Justifique.
3) Crie um problema que envolva o mesmo raciocínio matemático, mas matematicamente distinto dos dois problemas dados, e resolva-o. O que leva os três problemas a serem distintos?

A **Questão 1** teve como objetivo acessar os conhecimentos dos participantes acerca das estratégias de resolução de problemas que mobilizam o pensamento proporcional (KoT – Procedimentos), bem como das representações utilizadas nesse processo (KoT – Registros de Representação), reconhecendo que tais estratégias podem variar conforme o tipo de problema. Esperava-se que os participantes evidenciassem diferentes formas de abordar situações proporcionais, indo além da aplicação mecanizada de regras e algoritmos, de modo a refletir sobre as relações envolvidas, especialmente na comparação de razões. Ao focar nas próprias compreensões dos futuros professores – e não em respostas esperadas de alunos –, a questão buscou mobilizar e favorecer o desenvolvimento do KoT, contribuindo para o aprofundamento de conhecimentos relativos à procedimentos, fenomenologia, aos registros de representação e às propriedades da proporcionalidade.

A **Questão 2** teve como objetivo identificar se os participantes apreenderam as características específicas que distinguem os diferentes tipos de problemas presentes em cada TpF, bem como os contextos em que a proporcionalidade se manifesta em cada categoria. Busca-se, assim, analisar em que medida os futuros professores reconhecem que, embora todas as situações mobilizem o pensamento proporcional, elas se diferenciam quanto ao enfoque que dão à proporcionalidade, ao raciocínio e, por vezes, às estratégias requeridas para sua resolução, aspecto diretamente relacionado ao KoT – Fenomenologia e aplicações.

A **Questão 3** teve como objetivo analisar se os participantes eram capazes de elaborar uma nova situação-problema que mobilizasse o pensamento proporcional, mas que fosse matematicamente distinta das situações apresentadas, pertencendo a outra classe de problemas. Pretendeu-se, assim, investigar se os futuros professores

reconhecem que a proporcionalidade pode se manifestar em diferentes contextos e estruturas, e que modificações nos dados, nas grandezas envolvidas ou nas condições do problema podem alterar sua natureza matemática, podendo inclusive descaracterizar uma relação proporcional. Essa reflexão evidencia a importância de compreender não apenas onde a proporcionalidade está situada, mas de que forma está situada em cada problema, aspecto diretamente relacionado ao KoT – Fenomenologia e aplicações.

Apresentados os objetivos de cada uma das questões que compõem as Tarefas para o Professor, passamos, a seguir, à descrição das situações que integram cada TpF. Em cada tarefa, são explicitados os problemas propostos aos participantes, bem como ao menos uma forma possível de resolução, com o intuito de esclarecer ao leitor os tipos de raciocínio proporcional envolvidos e as categorias de problemas contempladas. Essa descrição antecede as análises, permitindo compreender tanto a estrutura matemática das situações quanto as demandas cognitivas que elas impõem aos futuros professores. Inicialmente, discutimos as situações que compõem a TpF1 (Quadro 5); em seguida, adotamos o mesmo procedimento para a TpF2 (Quadro 6) e, posteriormente, para a TpF3 (Quadro 7).

Quadro 5 – Situações propostas na TpF 1

PROBLEMA	**CATEGORIA**
Uma fábrica de tecidos, chamada Tecelagem Pitágoras, opera com vários teares. Em um período de avaliação, observou-se que 5 teares trabalhando 6 horas por dia produziram 2.160 metros quadrados de tecido. Agora, o gerente da produção está reorganizando os turnos e precisa da sua ajuda para responder às seguintes questões: a) Se os mesmos 5 teares passarem a trabalhar apenas 4 horas por dia, quantos metros quadrados de tecido serão produzidos, mantendo o mesmo ritmo de trabalho? b) Para continuar produzindo 2.160 metros quadrados, quantas horas por dia seriam necessárias se a fábrica usar 8 teares? c) A fábrica recebeu uma grande encomenda e precisa produzir 5.184 metros quadrados de tecido. Quantos teares seriam necessários, se cada um trabalhar o mesmo número de horas por dia que no início (6 horas)?	Problema de Valor Omisso
Dona Rosalina prepara e vende vitaminada de guaraná com amendoim em sua lanchonete no Centro de Manaus. No liquidificador A, ela misturou 4 doses de xarope de guaraná com 3 colheres de amendoim com uma quantidade de água. No liquidificador B, ela usou 3 doses de xarope de guaraná e 2 colheres de amendoim, e a mesma quantidade de água. Se você	Problema de Comparação

pedir a ela para tomar a vitaminada que tem o gosto mais forte de guaraná, de qual liquidificador ela deverá servir a sua bebida?	

Fonte: elaborado pela autora.

A **Situação 1** foi elaborada a partir da categoria *problema de valor omisso*, na qual, considerando duas grandezas proporcionais, três quantidades são conhecidas e a quarta deve ser determinada por meio da relação A/B=C/D, conforme a classificação proposta por Lesh, Post e Behr (1988).

A escolha dessa situação teve como finalidade investigar e promover a mobilização de conhecimentos associados ao KoT – Procedimentos, particularmente no que se refere à utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas proporcionais, para além da aplicação algorítmica da regra de três. Buscou-se favorecer a emergência de estratégias como a estratégia escalar, a estratégia funcional e a busca pelo valor unitário, possibilitando analisar como os participantes estabelecem relações multiplicativas entre grandezas.

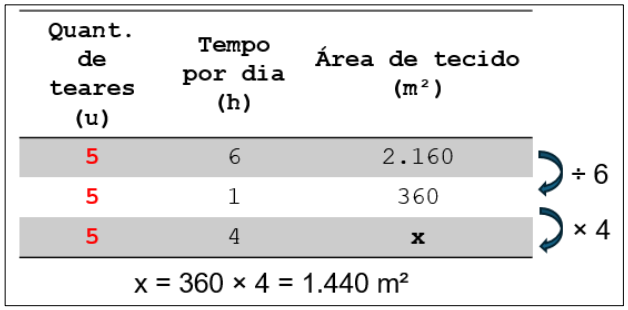
A situação é composta por três itens que envolvem as mesmas grandezas — número de teares, tempo de funcionamento diário e área de tecido produzida — variando apenas qual delas permanece constante em cada caso. Embora o contexto configure uma situação de proporcionalidade composta, a manutenção de uma grandeza fixa em cada item permite que os participantes tratem localmente o problema como uma relação de proporcionalidade simples, favorecendo a explicitação das relações entre as variáveis e a identificação do tipo de proporcionalidade envolvido.

Sob a perspectiva do KoT – Fenomenologia e aplicações, a tarefa foi concebida para favorecer o reconhecimento das relações de proporcionalidade direta e inversa a partir da análise das variações entre grandezas, incentivando os participantes a justificar suas decisões com base na estrutura matemática da situação, e não apenas em procedimentos previamente institucionalizados.

Os esquemas apresentados nas Figuras 4, 5 e 6 ilustram possíveis caminhos de resolução, não sendo prescrições metodológicas, mas exemplos de estratégias cuja mobilização era esperada no contexto da tarefa. No item (a), espera-se que os participantes identifiquem a relação direta entre tempo de produção e quantidade produzida, podendo recorrer à busca pelo valor unitário ou à estratégia escalar. No item (b), a manutenção da produção total favorece a análise de uma relação inversamente proporcional entre número de teares e tempo de trabalho, exigindo

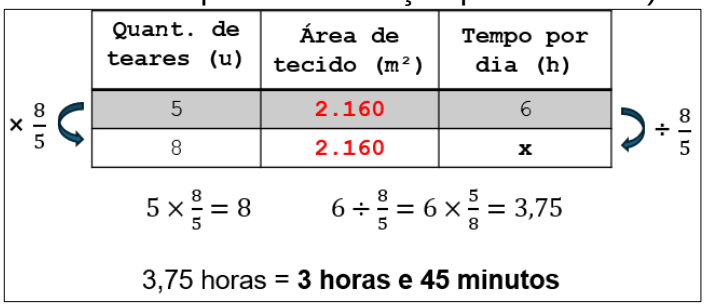
coordenação multiplicativa entre fatores inversos. Já no item (c), ao manter constante o tempo de produção, a tarefa possibilita a mobilização da estratégia funcional, por meio da identificação do fator de proporcionalidade que relaciona número de teares e produção obtida.

Figura 4 – Possível esquema de solução para o item a) da Situação 1.



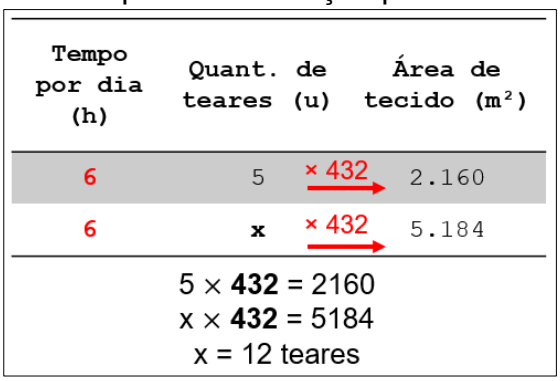
Fonte: elaborado pela autora.

Figura 5 – Possível esquema de solução para o item b) da Situação 1.



Fonte: elaborado pela autora.

Figura 6 – Possível esquema de solução para o item c) da Situação 1.



Fonte: elaborado pela autora.

Desse modo, a Situação 1 foi estruturada para criar condições de análise acerca de como futuros professores reconhecem, interpretam e operam com diferentes relações proporcionais, sejam elas diretas ou inversas, bem como das estratégias que mobilizam ao resolver situações pertencentes à mesma classe de problemas, mas com variações fenomenológicas.

A **situação 2** exigirá a mobilização do raciocínio relativo dos participantes. Ela foi adaptada de Lamon (2012) e pode ser caracterizada como um *problema de comparação* (Lesh; Post; Behr, 1988), mais especificamente um problema de mistura, o qual solicita a comparação quantitativa entre duas razões (KoT – Procedimentos), que não estão evidentes em seu enunciado (Oliveira, 2016). Nessa situação, além de realizar corretamente os cálculos matemáticos e chegar a um resultado numérico, os participantes precisam interpretar esse resultado para justificar a sua tomada de decisão.

Uma possível estratégia de resolução para a situação seria relacionar as quantidades de guaraná e de amendoim em cada liquidificador, por meio de razões, e calcular o valor dessas razões (Oliveira, 2016).

$$\text{Liquidificador A: } \frac{Guaraná}{Amendoim} = \frac{4}{3} = 1,\overline{3}$$

$$\text{Liquidificador B: } \frac{Guaraná}{Amendoim} = \frac{3}{2} = 1,5$$

A partir disso, evidencia-se que a proporcionalidade existente nos liquidificadores é aproximadamente 1,3 vezes mais guaraná que amendoim no jarro A e 1,5 vezes mais guaraná que amendoim no liquidificador B, ou, enunciando de outra forma, comparando as duas razões entre a quantidade de guaraná e a de amendoim, temos aproximadamente $1{,}3\colon 1$ no liquidificador A e $1{,}5\colon 1$ no liquidificador B (KoT – Procedimentos). Dessa forma, podemos concluir que, relativamente à quantidade de amendoim nos dois recipientes, é o liquidificador B que possui a maior concentração de guaraná, logo, a que possui o gosto mais acentuado de guaraná, visto que ele possui 1,5 doses de guaraná para 1 colher de amendoim, enquanto o liquidificador A possui aproximadamente 1,3 doses de guaraná para 1 colher de amendoim.

Uma **estratégia incorreta** que os estudantes poderiam usar seria desconsiderar a mistura de elementos nos liquidificadores, as razões entre eles e seus respectivos valores, e afirmar que a vitaminada com sabor mais acentuado de guaraná estaria no liquidificador A, pois é o recipiente que contém a maior quantidade absoluta de guaraná, o que evidenciaria a mobilização do raciocínio absoluto (aditivo), que se baseia na visualização e quantificação direta de objetos, e não do raciocínio relativo, o qual exige um maior nível de abstração, que o torna menos natural aos estudantes (Oliveira, 2016).

A autora menciona outro exemplo de um dos professores participantes de sua pesquisa que, ao levar em conta o conhecimento que desenvolveu a respeito de seus alunos, compartilha uma estratégia possível de ser elaborada por um jovem estudante, e que também demonstra a mobilização de pensamento absoluto. Por essa estratégia, adaptando ao contexto do nosso problema, cada unidade de guaraná anularia o sabor de uma unidade de amendoim, ou seja, as grandezas estariam relacionadas na razão $1:1$, e não nas razões unitárias $1{,}3:1$ (no liquidificador A) e $1{,}5:1$ (no liquidificador B). Assim, o sabor mais acentuado da vitaminada seria indicado pelos tipos e quantidades de unidades restantes nos liquidificadores após as "simplificações". Como restaram quantidades iguais de canela nos dois recipientes, o estudante concluiria que a intensidade desse sabor é a mesma (Oliveira, 2016).

No Quadro 6, apresentamos uma síntese dos conhecimentos que se esperava que fossem mobilizados e/ou desenvolvidos pelos participantes ao longo da implementação e discussão da TpF.

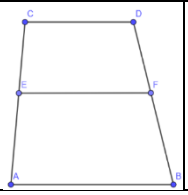
Quadro 6 – Conhecimentos esperados dos participantes na resolução da TpF1.

CATEGORIA	**DESCRITOR**
KoT – Definição, propriedades e fundamentos	Conhecer a diferença entre variáveis diretamente e inversamente proporcionais
KoT - Procedimentos	Usar a *estratégia escalar* para resolver problemas de proporcionalidade
	Usar a *estratégia funcional* para resolver problemas de proporcionalidade
	Usar a estratégia *busca pelo valor unitário* em problemas de proporcionalidade
	Usar a *regra de três* para resolver problemas de proporcionalidade
	Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade
	Estabelecer relações de ordem e igualdade na comparação entre razões
KoT – Fenomenologia e aplicações	Reconhecer quando uma situação é diretamente ou inversamente proporcional
	Reconhecer distintas classes de problemas que envolvem o pensamento proporcional
KoT – Registros de Representação	Organizar as grandezas e seus respectivos valores em tabelas

Fonte: elaborado pela autora.

A seguir (Quadro 7), apresentam-se as situações e uma síntese das expectativas associadas à TpF2, de modo a explicitar sua estrutura matemática e as demandas cognitivas envolvidas na atividade proposta aos futuros professores.

Quadro 7 – Situações propostas nas TpF 2

PROBLEMA	CATEGORIA
Dona Ana precisa voltar para casa com as compras do mês que acabou de fazer no supermercado. Ela está em dúvida se chama um táxi ou um motorista de aplicativo para fazer a corrida. O taxista cobra R$ 20,00 a cada 4 quilômetros rodados, enquanto que pelo aplicativo, o valor cobrado é R$ 18,00 para cada 5 quilômetros rodados. Considerando que o caminho à casa de dona Ana ao supermercado seja o mesmo para ambos os serviços, em quanto cada motorista precisaria alterar o valor de sua corrida a fim de que o custo final para dona Ana fosse o mesmo, independentemente da escolha?	Problema de Transformação
Considere o trapézio ABDC de base maior com medida 6cm e base menor com medida 4cm. Qual é a medida do seguimento EF se os trapézios ABFE e EFDC são semelhantes? 	Problema de Média

Fonte: elaborado pela autora.

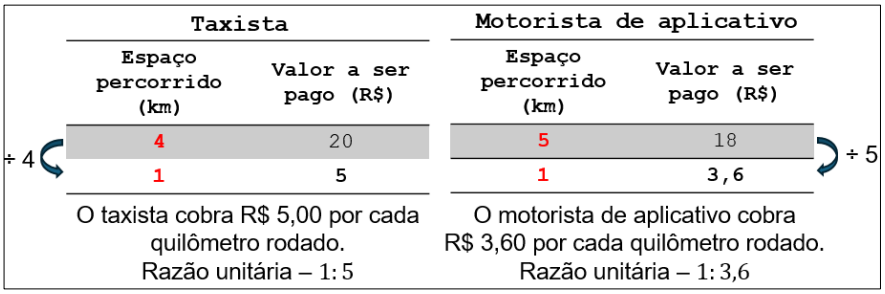
A **Situação 1** foi elaborada a partir da categoria *problema de transformação* (Lesh; Post; Behr, 1988), caracterizando-se por demandar a modificação de uma das quantidades envolvidas de modo a tornar duas razões equivalentes. Diferentemente dos problemas de valor omisso, nos quais se determina uma quantidade desconhecida mantendo fixa a relação proporcional, essa categoria exige que o participante compreenda a estrutura da razão e atue sobre ela para produzir equivalência.

A situação foi concebida com o objetivo de favorecer a mobilização de conhecimentos associados ao KoT – Procedimentos, especialmente aqueles relacionados à comparação e transformação de taxas unitárias, bem como ao KoT – Fenomenologia e aplicações, ao explorar uma situação contextualizada envolvendo relações entre grandezas monetárias e distância. Nesse contexto, buscou-se analisar como os participantes interpretam a ideia de custo por distância (reais por quilômetro) e de que modo utilizam essa interpretação para estabelecer equivalência entre duas relações proporcionais distintas.

O enunciado foi estruturado de modo a deslocar o foco da simples determinação de um valor desconhecido para a análise comparativa entre duas taxas,

incentivando os participantes a reconhecerem que a equivalência de custos depende da igualdade entre os valores unitários associados a cada serviço. A Figura 7 ilustra uma possível de resolução cuja mobilização era esperada no contexto da atividade. Entre elas, destaca-se a busca pelo valor unitário, por meio da determinação do custo por quilômetro em cada serviço, o que permite comparar quantitativamente as razões envolvidas e identificar a necessidade de transformação de uma das taxas para atingir equivalência. Nesse processo, os participantes podem reconhecer que a igualdade entre os custos finais decorre da igualdade entre as taxas unitárias, conduzindo à determinação do ajuste necessário no valor cobrado por quilômetro.

Figura 7 – Possível esquema de solução para a Situação 1.



Fonte: elaborado pela autora.

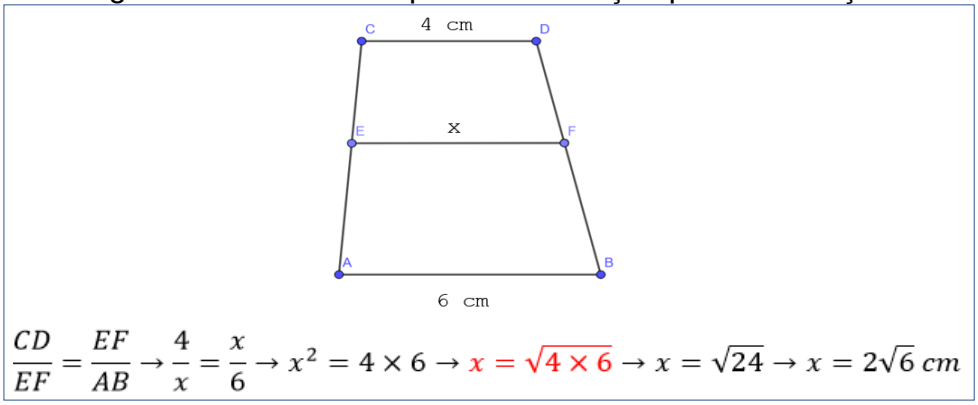
Desse modo, a Situação 1 foi planejada para investigar como futuros professores compreendem e operam com a noção de equivalência entre razões, analisando não apenas os procedimentos mobilizados, mas também os significados atribuídos às relações proporcionais envolvidas.

A Situação 2, adaptada de Bianchini e Lima (2023), foi concebida como um problema de média (Lesh; Post; Behr, 1988), mobilizando o pensamento proporcional no contexto da semelhança de figuras geométricas. Nessa situação, os participantes são convidados a reconhecer que os trapézios ABFE e EFDC são semelhantes e, portanto, que os comprimentos de seus lados homólogos mantêm relações proporcionais. A determinação do segmento EF envolve compreender que sua medida corresponde à média geométrica entre as bases maior e menor do trapézio original.

Diferentemente da Situação 1, em que a proporcionalidade se expressa por meio de razões associadas a grandezas monetárias, aqui ela emerge em um contexto geométrico, exigindo a articulação entre proporcionalidade e semelhança de figuras. A tarefa foi planejada com o objetivo de favorecer a mobilização de conhecimentos relacionados ao KoT – Procedimentos em um contexto dentro da própria matemática, ao demandar o estabelecimento de proporções entre segmentos homólogos.

Ao estruturar o problema dessa forma, buscou-se analisar como os participantes reconhecem relações proporcionais em registros geométricos e de que modo articulam conceitos algébricos e geométricos na resolução. Esperava-se que os licenciandos identificassem as bases maior e menor do trapézio, estabelecessem a proporção entre os trapézios semelhantes e interpretassem a medida procurada como resultado de uma relação proporcional específica, a média geométrica, evidenciando a compreensão das relações multiplicativas subjacentes. A Figura 8 ilustra uma possível estratégia de resolução para a situação.

Figura 8 – Possível esquema de solução para a Situação 2.



Fonte: elaborado pela autora.

No Quadro 8, apresentamos uma síntese dos conhecimentos que se esperava que fossem mobilizados e/ou desenvolvidos pelos participantes ao longo da implementação e discussão desta TpF.

Quadro 8 – Conhecimentos esperados dos participantes na resolução da TpF2.

CATEGORIA	DESCRITOR	PARTICIPANTES
KoT - Procedimentos	Usar a *estratégia escalar* para resolver problemas de proporcionalidade	A
	Usar a *estratégia funcional* para resolver problemas de proporcionalidade	C
	Usar a estratégia *busca pelo valor unitário* em problemas de proporcionalidade	A, B, C e E
	Usar a *regra de três* para resolver problemas de proporcionalidade	B e C
	Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade	E
	Transformar quantidades para tornar razões equivalentes	A, C e E
	Estabelecer proporções entre os lados homólogos de trapézios semelhantes	C

KoT – Fenomenologia e aplicações	Reconhecer quando uma situação é diretamente ou inversamente proporcional	A, B e C
	Reconhecer que figuras semelhantes envolvem relações proporcionais	C e C
	Reconhecer distintas classes de problemas que envolvem o pensamento proporcional	C
KoT – Registros de Representação	Organizar as grandezas e seus respectivos valores em tabelas	A, B e C

Fonte: elaborado pela autora.

No Quadro 9, apresentam-se as situações e uma síntese das expectativas associadas à TpF3, com o intuito de explicitar sua estrutura matemática e os conhecimentos e processos a serem mobilizados pelos futuros professores ao interagir com a tarefa.

Quadro 9 – Situações propostas nas TpF 3

PROBLEMA	**CATEGORIA**
Hoje o professor Francisco divulgou as notas da avaliação final da disciplina de Geometria I na turma de Licenciatura em Matemática. Sabendo que a razão entre a quantidade de aprovados e a quantidade de reprovados é de 20 para 8, a quantidade de reprovados representa que fração da quantidade total de estudantes dessa turma?	Problema de Conversão
A vazão média do Rio Amazonas é de 209.000 m³/s quando chega a sua foz no Oceano Atlântico. Quantos litros de água o Rio Amazonas despeja no oceano a cada hora?	Problema envolvendo unidade de medida e números
A tabela abaixo apresenta a quantidade de bananas compradas por dona Socorro na feira da Manaus Moderna e os respectivos preços: Massa (Kg) | Preço (R$) 2 \| 20 4 \| 40 6 \| 60 A partir dessa tabela: a) Represente graficamente a relação entre a quantidade de bananas e o preço pago. b) Descreva algebricamente a relação entre as duas grandezas. c) Quanto custaria 7,5 kg de banana? d) Se dona Socorro pagou R$ 90, quantos kg ela comprou? e) Essa relação se mantém se houver promoção, como “leve 3kg pelo preço de 2kg”?	Problema de translação

Fonte: elaborado pela autora.

A **Situação 1** enquadra-se na categoria de *problemas de conversão* (Lesh; Post; Behr, 1988) e requer que os participantes articulem estratégias que envolvem razões do tipo parte–parte e parte–todo (Noelting, 1980), mobilizando conhecimentos relativos à interpretação e transformação de razões, taxas e frações, sem alteração da relação subjacente entre as quantidades envolvidas. Nesse contexto, a situação foi planejada para favorecer a mobilização de conhecimentos relacionados ao significado relacional da razão (KoT – Fenomenologia e aplicações), ao uso de estratégias procedimentais de simplificação e recomposição de razões (KoT – Procedimentos) e à explicitação dessas relações por meio de diferentes formas de representação (KoT – Registros de representação), contribuindo para a análise dos conhecimentos matemáticos especializados mobilizados no âmbito da proporcionalidade.

Quanto ao conhecimento e à compreensão do significado relacional da razão, esperava-se que os participantes reconhecessem que os dados do problema não indicam a existência de exatamente 28 alunos na turma, dos quais 20 estariam aprovados e 8 reprovados, mas sim uma relação constante entre essas quantidades. Isto é, a cada 28 alunos, 20 estão aprovados e 8 reprovados, ou, de forma equivalente, para cada 20 alunos aprovados, há 8 alunos reprovados, independentemente do número absoluto de estudantes na turma. A Figura 9 apresenta um esquema em linguagem figural, bem como sua correspondente tradução em linguagem algébrica, que evidencia esse significado relacional: independentemente da quantidade total de estudantes, as razões entre aprovados e reprovados e entre reprovados e o total de alunos permanecem invariantes.

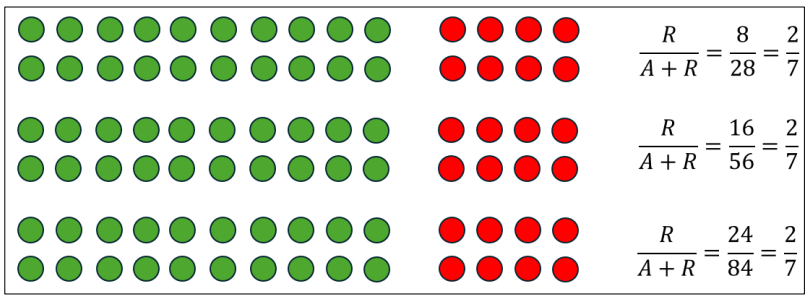
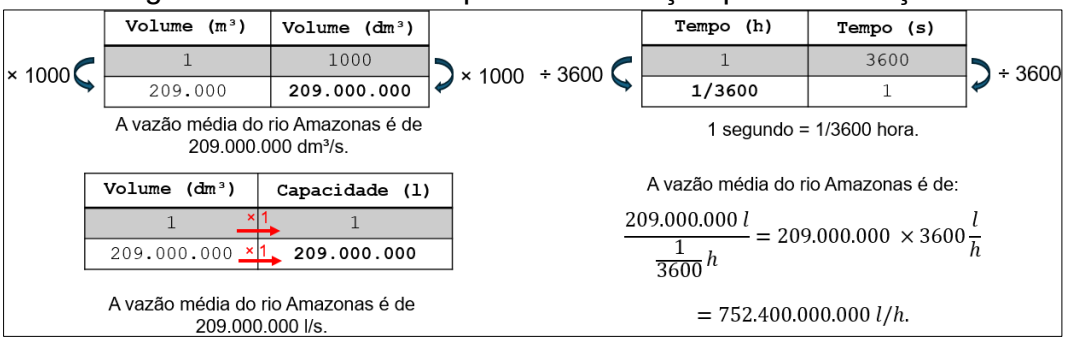


Figura 9 – Representação figural e algébrica da Situação 1.
Fonte: elaborado pela autora.

Essa compreensão está alinhada às discussões de Scheller e Bonotto (2020), ao indicarem que o pensamento proporcional envolve reconhecer que em uma situação proporcional existe uma relação constante entre as quantidades (invariância) e reconhecer que em uma situação proporcional as quantidades variam em conjunto (covariância).

A **Situação 2** enquadra-se na categoria de problemas envolvendo unidades de medida e números (Lesh; Post; Behr, 1988), uma vez que, além da relação proporcional entre grandezas, exige dos participantes a compreensão e a coordenação entre diferentes unidades de medida de volume e de tempo. Para resolver a situação, é necessário reconhecer a vazão como uma taxa expressa em metros cúbicos por segundo e realizar conversões tanto da unidade de volume (de metros cúbicos para litros) quanto da unidade de tempo (de segundos para horas) (Figura 10).

Figura 10 – Possível esquema de solução para a Situação 2.



Fonte: elaborado pela autora.

Desse modo, a mobilização do pensamento proporcional não se restringe à manipulação numérica, mas envolve o entendimento do significado das unidades associadas às grandezas em jogo, bem como das relações entre elas. A situação demanda, portanto, conhecimentos relacionados ao KoT – Fenomenologia e aplicações, ao reconhecer o contexto físico da vazão, e ao KoT – Procedimentos, no que diz respeito às estratégias de conversão de unidades e ao uso adequado de fatores de proporcionalidade.

A **Situação 3** enquadra-se na categoria problema de translação (Lesh; Post; Behr, 1988), uma vez que exige do participante a manutenção de uma mesma relação proporcional entre grandezas ao representá-la em diferentes sistemas. Ao longo dos itens propostos, os participantes precisam transitar entre: (a) um gráfico cartesiano; (b) uma expressão algébrica que descreva a relação funcional; (c) e (d) situações de

interpolação e extrapolação; e (e) a análise da manutenção – ou não – da proporcionalidade em um contexto de promoção comercial. Assim, diferentemente das Situações 1 e 2, o foco não recai sobre a conversão entre razões ou unidades, mas sobre a coordenação entre diferentes representações de uma mesma relação proporcional.

Do ponto de vista do conhecimento matemático especializado, a Situação 3 mobiliza, sobretudo, conhecimentos associados ao KoT – Registros de Representação, ao exigir que os participantes expressem a mesma relação por meio de tabela, gráfico e expressão algébrica, bem como ao KoT – Procedimentos, ao recorrerem a estratégias como a identificação do valor unitário, a construção de expressões do tipo y=k.x e o uso de operações multiplicativas para determinar valores não explicitamente apresentados na tabela. Ademais, o item (e) amplia o escopo da análise ao solicitar uma reflexão conceitual sobre a validade da relação proporcional em um novo contexto, o que implica compreender que nem toda relação linear aparente se mantém sob alterações nas condições do problema.

A Figura 11 apresenta a representação gráfica da relação entre a massa de bananas adquirida e o preço pago, a qual se configura como uma semirreta com extremidade na origem, construída a partir dos dados fornecidos na tabela. A análise desses dados permite inferir uma relação proporcional direta entre as grandezas, a qual pode ser modelada por uma função linear do tipo y=kx, em que x representa a massa de bananas, em quilogramas, e y o preço correspondente, em reais. Essa relação constitui a base conceitual para a determinação de valores não explicitados na tabela, como solicitado nos itens c) e d), por meio da substituição de valores na expressão algébrica.

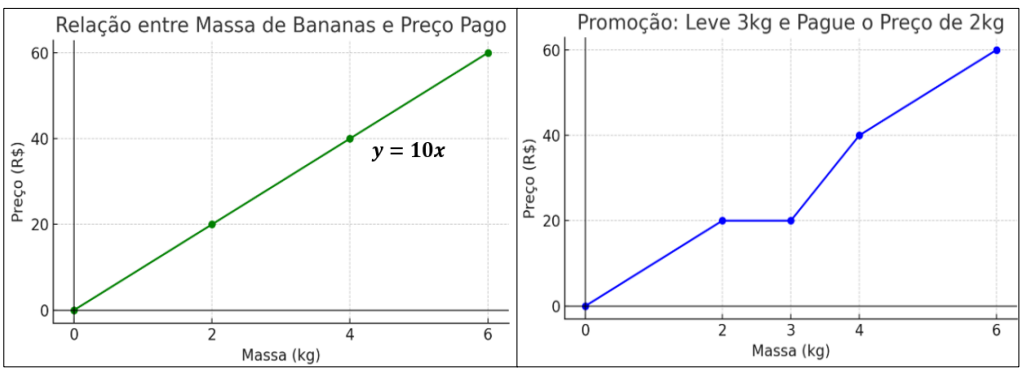


Figura 11 – Gráfico das relações propostas na Situação 3.
Fonte: elaborado pela autora.

A figura também ilustra a situação proposta no item e), referente à promoção “leve 3 kg pelo preço de 2 kg”, cujo gráfico evidencia a ruptura da proporcionalidade, uma vez que a razão entre preço e massa deixa de se manter constante. Tal característica descaracteriza a relação proporcional, pois perde-se a invariância da razão, mobilizando conhecimentos relacionados às definições e propriedades das relações proporcionais (KoT – Definições, propriedades e fundamentos) e ao KoT – Fenomenologia e aplicações, na medida em que a situação envolve um contexto cotidiano de compra e venda, exigindo do participante avaliar se as condições do fenômeno preservam ou não a relação proporcional.

No Quadro 10, apresentamos uma síntese dos conhecimentos que se esperava que fossem mobilizados e/ou desenvolvidos pelos participantes ao longo da implementação e discussão da TpF3.

Quadro 10 **–** Conhecimentos esperados dos participantes na resolução da tarefa.

Categoria	**Descritor**
KoT – Definição, propriedades e fundamentos	Reconhecer a razão como uma relação entre grandezas, e não como uma quantidade absoluta
	Reconhecer a invariância da razão como critério definidor de uma relação proporcional
KoT – Procedimentos	Mobilizar estratégias procedimentais de simplificação e recomposição de razões
	Converter razões parte-parte em razões parte-todo, preservando a proporcionalidade
	Mobilizar estratégias de conversão de unidades de medida preservando a proporcionalidade
	Usar a estratégia “Busca pelo valor unitário” em problemas envolvendo proporcionalidade
	Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade
	Construir a expressão algébrica de uma relação proporcional a partir do valor unitário
	Usar a expressão algébrica da relação proporcional como ferramenta para calcular valores correspondentes entre grandezas.
KoT – Fenomenologia e aplicações	Reconhecer uma situação em que as quantidades são relativas, não absolutas
	Reconhecer que em uma situação proporcional existe uma relação constante entre as quantidades (invariância)
	Reconhecer que em uma situação proporcional as quantidades variam em conjunto (covariância)
	Reconhecer o contexto proporcional ao lidar com grandezas físicas
	Distinguir situações proporcionais e não proporcionais
	Reconhecer distintas classes de problemas que envolvem o pensamento proporcional
KoT – Registros de representação	Coordenar diferentes registros de representação de uma mesma relação proporcional
	Expressar uma relação proporcional por meio de representações gráficas

	Expressar relações proporcionais por meio de representações algébricas

Fonte: Elaboração própria (2025).

Todas as três tarefas foram implementadas segundo as dialéticas da Teoria das Situações Didáticas. A preferência pela TSD como metodologia de ensino deve-se principalmente ao fato de que as tarefas, por si sós, não são promotoras de aprendizagem. Nesse sentido, Brocardo e Santos (2014) ressalta a importância do modo como o professor as explora, como organiza e orienta o trabalho na aula.

Dessa forma, pareceu-nos pertinente recorrer às tipologias da TSD uma vez que permitiria ao pesquisador acompanhar e apoiar o trabalho dos licenciandos, promover a discussão, sistematizar e analisar o trabalho realizado, relacionando-o com ideias e conceitos matemáticos relevantes à situação. Além disso, segundo Ribeiro, Mellone e Jakobsen (2013), o conhecimento especializado para a atuação docente não se desenvolve apenas pela prática letiva, sem um apoio formativo com essa intencionalidade específica.

Dito isso, além de essa teoria ter sido desenvolvida visando justamente modelar o processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos (Almouloud, 2010) e cujas situações propostas devem ser concebidas de forma a estimular a manifestação dos conhecimentos que os estudantes possuem (em contextos adequados) (Brousseau, 1986), Feitosa e Rodrigues (2025) e Rodrigues e Feitosa (2025b) já discutem o potencial formativo da TSD para explorar e desenvolver o conhecimento especializado dos futuros professores de matemática para o ensino. De posse dessas considerações, é possível compreender que a TSD, como metodologia de ensino, caracteriza-se como:

> [...] um modelo teórico, segundo o qual, considerando o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em constituição, a didática da matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos. (Teixeira; Passos, 2013, p. 163)

Apesar de a TSD ter sido originalmente pensada para ser aplicada à Educação Básica, é possível planejar, implementar e analisar uma sequência didática em qualquer etapa da educação, levando em conta as particularidades dos participantes e as metas estabelecidas (Teixeira; Passos, 2013). A seguir, estabelecemos algumas das potencialidades das tipologias da TSD para garantir a mobilização e o

desenvolvimento do conhecimento matemático especializado do professor de matemática com ênfase em determinadas categorias.

No decorrer da *dialética*[13] *da ação*, o estudante (no caso desta pesquisa, o professor em formação), na interação com o *milieu*[14], reflete e simula tentativas, organiza suas estratégias para resolver o problema e constrói uma representação da situação que lhe serve de modelo e guia na tomada de decisões (Brousseau, 2002). Nesta etapa, estimulamos os professores a tentativas de solução experimentais, sem preocupação com formalizações ou coerência em escrita, com o aparecimento de tentativas de soluções de natureza puramente intuitiva e empírica. Promovemos, assim, o uso de estratégias de resolução características de problemas do pensamento proporcional, destacando a mobilização de conhecimentos pertencentes à categoria Procedimentos do KoT.

Na *dialética da formulação* ocorre troca de informação entre o aluno e o *milieu* (os estudantes estão organizados em grupos), utilizando uma linguagem apropriada, porém sem a exigência do uso estrito de uma linguagem matemática formal, o que pode envolver ambiguidade, redundância, metáforas, a criação de novos termos semióticos, além de falta de clareza e eficácia na comunicação, dentro de um ciclo contínuo de feedback (Teixeira; Passos, 2013). No entanto, a cada momento, essa linguagem construída seria testada do ponto de vista da inteligibilidade, da facilidade de construção e da extensão das mensagens que ela permite transmitir, visto que a construção de tal linguagem ou código (repertório, vocabulário, às vezes sintaxe) em uma linguagem comum ou formalizada viabiliza a explicação de ações e modelos de ação (Brousseau, 2002).

Nessa situação, os membros do grupo foram estimulados a trocarem informações e colaborarem entre si, permitindo a comparação das soluções parciais e oportunizando a percepção de padrões. Além disso, é reforçada a necessidade de uma comunicação um pouco mais sistemática para permitir a troca de informações e comparações bem-sucedidas, mas sem exacerbada preocupação com linguagem matemática formal.

---

[13] Brousseau (2002, p. 9, tradução nossa) usa o termo *dialética* pois "por um lado, o aluno é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro lado, suas estratégias são, de certa forma, proposições confirmadas ou invalidadas pela experimentação em uma espécie de diálogo com a situação".

[14] "Dentro de uma situação de ação, tudo o que atua sobre o aluno ou sobre o qual ele atua é chamado de '*milieu*'" (Brousseau, 2002, p. 9, tradução nossa).

A *dialética de validação* motiva os estudantes a discutirem uma situação e a tentarem convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações), embora seu raciocínio seja frequentemente insuficiente, incorreto e desajeitado, além de os estudantes adotarem teorias falsas e aceitarem provas insuficientes ou também falsas. Segundo Brousseau (2002), a situação didática deve levá-los a evoluir, a revisar suas opiniões e a substituir sua teoria falsa por uma verdadeira.

Essa evolução também tem um caráter dialético visto que uma hipótese deve ser suficientemente aceita — pelo menos provisoriamente — até mesmo para mostrar que é falsa (Brousseau, 2002). Nessa situação é esclarecido ao grupo que se faz necessário o uso de uma linguagem matemática mais cuidadosa, pois é nesse momento que os professores devem apresentar suas soluções para a tarefa, organizando logicamente suas afirmações.

As situações de *ação*, *formulação* e *validação* caracterizam a *situação adidática*[15], em que o professor (no caso desta pesquisa, o pesquisador) permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador (Teixeira; Passos, 2013). Seguindo esses procedimentos, o professor não fornece diretamente a resposta, permitindo que o aluno participe ativamente na construção do conhecimento, possibilitando a ele desenvolver novos saberes a partir de suas experiências pessoais e de sua interação com o meio. No entanto, elas sozinhas mostram-se insuficientes para resultar em ensino, sendo, dessa forma, necessária uma fase envolvendo institucionalização (Brousseau, 2002).

Na etapa da *institucionalização* o professor estabelece as relações possíveis entre as ações ou produções do estudante e o conhecimento cultural ou científico e o projeto didático, oferecendo uma interpretação dessas atividades e lhes atribuindo um status (Brousseau, 2002). Segundo Teixeira e Passos (2013), é nessa etapa que o professor revela suas intenções e seu papel é claramente apresentado aos estudantes visto que ele reassume parte da responsabilidade previamente lhes delegada, validando certas produções como saber ou descartando outras, definindo os objetos de estudo por meio da formalização e generalização. Portanto, ocorre uma verdadeira aprendizagem, reconhecida pelo professor.

[15] Uma situação adidática é caracterizada quando o professor não tem controle direto sobre as variáveis que interferem na situação (Teixeira; Passos, 2013)

Brousseau (2008, p. 21) pondera que o papel da institucionalização é justamente “prover sentido de um saber”. É nesta etapa que analisamos e sintetizamos as respostas e soluções dos professores, apresentando a formalização matemática esperado para o assunto escolhido, levando em conta as soluções e concepções apresentadas pelo grupo, situando-as dentro do tema proporcionalidade. Além disso, esse é o momento em que há a discussão dos professores junto à professora pesquisadora referente às perguntas que compõem a Tarefa para Formação.

4.3 PROCESSO DE ANÁLISE

A análise dos dados foi realizada por meio da metodologia da Análise de Conteúdo de Bardin (2011), a qual é caracterizada como:

> um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens." (Bardin, 2011, p. 47)

Na busca por obter os indicadores, utilizamos os subdomínios e categorias próprias do MTSK de modo a identificar que conhecimentos revelam os futuros professores no contexto do tópico de proporcionalidade. Dito isso, Bardin propõe que a Análise de Conteúdo seja estruturada em três fases principais: *pré-análise*, *exploração* e *tratamento de dados, inferência e interpretação*.

Na etapa da *pré-análise*, a qual envolve a organização do material a ser analisado, permitindo que se torne operacional e sistemático, fizemos uma leitura flutuante do material e selecionamos para compor o *corpus* a ser analisado, na etapa 2, as respostas escritas dos participantes ao protocolo diagnóstico (Parte Preliminar da TpF) e, gravadas e transcritas, à entrevista, enquanto na etapa 3, a resolução escrita às Tarefas para Formação propostas durante a intervenção e a gravação de cada um dos encontros devidamente transcrita.

Na etapa da *exploração do material*, codificamos e classificamos as unidades de análise de acordo com as categorias pertencentes aos subdomínios do MTSK que foram analisados. Os indicadores dos conhecimentos revelados e desenvolvidos

pelos participantes serão compostos pelas iniciais do subdomínio relevante, acrescido do nome da categoria correspondente.

Já para a etapa de *tratamento dos dados, inferência e interpretação*, a qual envolve a interpretação dos dados categorizados, buscando identificar significados subjacentes e realizar inferências que respondam aos objetivos e hipóteses estabelecidos inicialmente, descrevemos manifestações do conhecimento pertencente às categorias mobilizadas em cada fase da TSD, em busca de, através da interpretação dos dados, responder às questões da pesquisa e alcançar os objetivos inicialmente traçados.

Não obstante compreendamos que a investigação de um maior número de subdomínios proporciona mais evidências sobre a especialização do conhecimento do professor, analisar todos os seis não é viável para uma pesquisa de mestrado, pois poderia comprometer a profundidade da análise e a ampliação do entendimento acerca do conhecimento dos futuros professores sobre proporcionalidade. Dito isso, optamos por focar no subdomínio KoT, pertencente ao MK, por entender que boa parte das dificuldades dos professores, consequentemente dos estudantes, no âmbito de proporcionalidade provêm de fragilidades nos conhecimentos relacionados a esse subdomínio do conhecimento especializado do professor de matemática.

Com respeito aos subdomínios do PCK, vamos ao encontro do pensamento de Ribeiro e Silva (2023) sobre tarefas desenhadas com a intencionalidade clara de desenvolver o conhecimento matemático especializado do professor. Os autores mencionam que, para efetivar a transformação das práticas para a melhoria das aprendizagens matemáticas, o conhecimento pedagógico não se ensina, mas vive-se. Essa afirmação está em consonância com Ribeiro, Almeida e Mellone (2021, p. 17) quando dizem que se busca desenvolver as dimensões do PCK “pela forma de trabalho, por focos de discussão e exemplos apresentados e discutidos durante a implementação da tarefa nos contextos formativos”.

Além disso, com relação à TpF, não obstante sua conceitualização priorize um foco no desenvolvimento do conteúdo dos subdomínios do conhecimento matemático do professor, segundo os autores, a implementação é pensada de forma que os professores possam experienciar o tipo de trabalho e as vivências que se almeja que venham a proporcionar aos seus futuros estudantes (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021). Dessa forma, acreditamos que os professores, ao vivenciarem uma oficina formativa pautadas nas tipologias da TSD, compreendam o processo e as potencialidades

dessa teoria como uma metodologia de ensino e apliquem futuramente com seus estudantes.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como este trabalho assume o formato *multipaper*, a análise e a discussão são desenvolvidas no âmbito de cada um dos quatro artigos que o compõem, culminando, no Capítulo 6, em uma conclusão apresentada sob a forma de metassíntese. Recorda-se que a questão central que orienta a investigação é: Que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de matemática no âmbito do tópico proporcionalidade quando participam de um contexto formativo com o intuito de desenvolvê-lo?

Para a primeira subquestão – “O que revelam as pesquisas sobre os obstáculos e dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do tópico proporcionalidade?” – foi investigada no artigo intitulado Ensino e aprendizagem de proporcionalidade: algumas reflexões a partir de um mapeamento sistemático, publicado no periódico Ensino da Matemática em Debate – EMD (Rodrigues, Feitosa, 2025b). Nesse estudo, buscou-se delinear um panorama das pesquisas apresentadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do ensino e aprendizagem de tópicos relacionados à proporcionalidade, identificando tendências investigativas e obstáculos recorrentes por meio dos princípios do mapeamento sistemático. A análise do corpus permitiu classificar as dificuldades em seis categorias, que abrangem desde a confusão entre raciocínio aditivo e multiplicativo até o ensino mecanizado e as dificuldades na resolução de problemas.

A segunda subquestão – “Que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de matemática sobre o tópico proporcionalidade?” – foi discutida em dois artigos: Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de Matemática sobre o tópico proporcionalidade (Rodrigues; Feitosa, 2025a), e Conhecimento matemático especializado mobilizado na resolução de problemas do pensamento proporcional (Rodrigues; Feitosa, no prelo). Ambos apresentam resultados de uma avaliação diagnóstica (Parte Preliminar das TpFs), realizada com sete licenciandos em Matemática, com o objetivo de descrever seus conhecimentos matemáticos, com foco no KoT enquanto dimensão central do conhecimento matemático especializado analisado nesta investigação. A análise conjunta das nove questões desse diagnóstico inicial permite aprofundar a compreensão acerca dos conhecimentos e das fragilidades reveladas pelos

participantes, considerando as estratégias mobilizadas, os registros de representação utilizados e os elementos do conhecimento matemático especializado evidenciados, em consonância com os objetivos desta pesquisa e com seu caráter diagnóstico.

Por fim, a terceira subquestão – “Que conhecimentos matemáticos especializados são mobilizados e/ou desenvolvidos por futuros professores de matemática a partir da participação em um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade?” – foi abordada no artigo Conhecimento matemático especializado mobilizado em um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade (Rodrigues; Feitosa, submetido). O estudo analisa a mobilização e o desenvolvimento do conhecimento especializado em um contexto formativo estruturado a partir de três categorias de problemas: conversão entre razões, taxas e frações; situações envolvendo unidades de medida e números; e translação entre diferentes sistemas de representação.

Optou-se por apresentar, em formato de artigo, a análise detalhada da terceira Tarefa para Formação (TpF3). As análises das duas tarefas anteriores encontram-se sistematizadas nos Apêndices desta dissertação, que posteriormente serão submetidos em periódicos, sendo seus resultados retomados e articulados no capítulo da metassíntese, no qual realizamos uma discussão integrada dos achados das três intervenções formativas.

Nesse sentido, os quatro artigos são apresentados integralmente a seguir, respeitando as normas de formatação definidas pelos periódicos para os quais foram elaborados.

emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.71486

Ensino e aprendizagem de proporcionalidade: algumas reflexões a partir de um mapeamento sistemático

Teaching and learning proportionality: some reflections from a systematic mapping

Roberta dos Santos Rodrigues[1]

Francisco Eteval da Silva Feitosa[2]

RESUMO

Esse trabalho é um recorte de uma pesquisa de mestrado e tem como objetivo apresentar um panorama das pesquisas publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade, observando tendências de pesquisas e obstáculos recorrentes, por meio dos princípios do mapeamento sistemático. Foram estabelecidas como questões de pesquisa: (a) Quais as bases teóricas que subsidiam as pesquisas relacionadas a tópicos inerentes à proporcionalidade? (b) Quais teorias de ensino e de aprendizagem são mais utilizadas ao se tratar de tópicos inerentes a proporcionalidade? (c) Quais os principais obstáculos e dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? (d) Quais os principais recursos pedagógicos que têm sido utilizados no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? (e) Quais outros tópicos costumam ser relacionados aos tópicos inerentes à proporcionalidade? A coleta de dados foi realizada em anais de eventos do campo da Educação Matemática – ENEM, SIPEM, CIAEM e CIBEM - que investigaram e discutiram aspectos relacionados ao pensamento proporcional, observando alguns resultados referentes ao ensino-aprendizagem de tópicos relacionados a esse tipo de pensamento matemático na educação básica. Os resultados de pesquisa evidenciam tendências quanto às teorias de aprendizagem geralmente elencadas para nortear as pesquisas sobre o tema, assim como permitiram emergir categorias de obstáculos e dificuldades relacionados ao processo de ensino-aprendizagem desse tópico.

Palavras-chave: *Pensamento Proporcional; Obstáculos; Tendências; Mapeamento sistemático.*

ABSTRACT

This work is an excerpt from a master's research and aims to present an overview of the research published in the annals of national and international events regarding the teaching-learning process of themes related to proportionality, observing research trends and recurrent obstacles, through the principles of systematic mapping. The following research questions were established: (a) What are the theoretical bases that support research related to the themes inherent to proportionality? (b) What theories of teaching and learning are most used when it comes to topics related to proportionality? (c) What are the main obstacles and difficulties in the teaching-learning process of topics related to proportionality? (d) What are the main pedagogical resources that have been used in the teaching-learning process of topics related to proportionality? (e) What other topics are usually related to the topics inherent to proportionality? Data collection was carried out in annals of events in the field of Mathematics Education - ENEM, SIPEM, CIAEM and CIBEM - which investigated and discussed aspects related

[1] Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas - UFAM, discente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECiM/UFAM e bolsista do Programa de Apoio à Pós-graduação Stricto Sensu POSGRAD-FAPEAM-2024-2025. E-mail: roberta.rodrigues@ufam.edu.br

[2] Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas - UFAM e docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECiM/UFAM. E-mail: sfeitosa@ufam.edu.br

to proportional thinking, observing some results related to the teaching-learning of this type of mathematical thinking in basic education. The research outcomes highlight trends regarding the learning theories generally listed to guide research on the topic, as well as allowing the emergence of categories of obstacles and difficulties related to the teaching-learning process of this topic.

Keywords*: Proportional Thinking; Obstacles; Trends; Systematic Mapping.*

Introdução

Noções envolvendo a proporcionalidade transparecem desde muito cedo na vida dos estudantes, seja dentro de sala de aula ou em suas atividades cotidianas, manifestadas de forma consciente assim como inconsciente. Um exemplo seria quando olhamos uma foto da família num quadro, intuitivamente percebemos que aquela imagem é uma representação reduzida do momento que realmente foi capturado pela câmera. Além disso, a proporcionalidade é a base para a compreensão de diversos outros conceitos dentro da matemática, como semelhança entre figuras, funções, probabilidade entre outros. Em todo o currículo de matemática da Educação Básica a proporcionalidade se faz presente, sendo inclusive abordada em outras ciências, como quando se estuda cartografia e suas escalas, na Geografia, ou quando se aprende que a força gravitacional entre dois corpos é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, na disciplina de Física.

Além de ser um dos tópicos centrais na matemática e subsídio para o aprendizado de importantes temas em outras ciências, a proporcionalidade integra o que é conhecido como *pensamento proporcional*, o qual é um dos tipos de pensamento que compõem o pensamento matemático e que, segundo Lesh, Post e Behr (1988), pode ser considerado uma das pedras angulares da Matemática, além de constituir-se como "uma ponte entre a Matemática numérica e concreta da Aritmética, a Álgebra simbólica e a Matemática superior" (Jitendra et al., 2011, p. 731). Embora não haja um consenso quanto a definição de pensamento proporcional, Norton (2005, p. 17) o define como sendo aquele usado para "descrever os conceitos e pensamentos requeridos para compreender: taxa de variação, proporção e proporcionalidade, incluindo escala". Dessa forma, o desenvolvimento adequado desse tipo de pensamento é essencial para compreender contextos e aplicações fundamentados na proporcionalidade (Falvo; Jucá, 2002).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do ensino evidencia a importância do tema quando afirma a proporcionalidade como uma das ideias fundamentais que constituem os diferentes campos que compõem a Matemática, junto com equivalência, ordem, interdependência, representação, variação e aproximação, as quais "são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento" (Brasil, 2018, p. 268). Além disso, espera-se que os estudantes dos Anos Iniciais e Finais possam desenvolver o pensamento proporcional através da investigação de situações que possibilitem a representação da

variação de grandezas em um sistema de coordenadas cartesianas, assim como da análise e identificação do tipo de variação apresentada (proporcional direta, proporcional inversa ou não proporcional) (Brasil, 2018).

Entretanto, não obstante sua relevância, pesquisas indicam que as ideias de proporcionalidade são pouco assimiladas, sobretudo porque seu ensino ocorre de maneira mecanizada em sala de aula, sem estimular uma compreensão aprofundada do pensamento proporcional subjacente (Lamon, 2012, 2016). Além do mais, segundo Dooley (2006, p. 3), se o pensamento proporcional "não for entendido conceitual, mas algoritmicamente, torna-se mais difícil a transferência e o uso na 'vida real'". Tendo em vista sua importância tanto para a Matemática quanto para outras ciências, assim como para as mais variadas atividades cotidianas, cabe ressaltar a necessidade de pesquisas cujo objetivo seja o aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem desse tópico em sala de aula, buscando superar os obstáculos e dificuldades envolvidos.

Dito isso, o ponto de partida é investigar o que já vem sendo pesquisado dentro dessa temática, a fim de esboçar um cenário das pesquisas já produzidas com esse objetivo. Nesse sentido, o objetivo deste estudo é apresentar um panorama das pesquisas publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade, observando tendências de pesquisas e obstáculos recorrentes, por meio dos princípios do mapeamento sistemático.

Outros estudos secundários a respeito do pensamento proporcional já foram realizados antes, como o de Miranda (2009), a qual realizou uma metanálise qualitativa em dissertações de mestrado com o objetivo de sintetizar investigações cujo foco era as expressões matemáticas geradas na (ou reflexos da) manifestação e desenvolvimento do pensamento proporcional. Contudo, seu material de estudo diferencia-se do deste trabalho pois a autora restringiu-se à análise de dissertações, e, mais precisamente, às produzidas apenas no estado de São Paulo, enquanto o objeto de estudo deste são exclusivamente trabalhos publicados em anais de eventos, tanto nacionais quanto internacionais. Além disso, os dois trabalhos são metodologicamente diferentes, visto que a autora realiza uma revisão sistemática com foco em uma síntese e interpretação mais aprofundada, enquanto este tem um caráter mais exploratório, com vistas a mapear tendências, lacunas e padrões de pesquisa.

Dessa forma, a justificativa para a realização desse mapeamento é a possibilidade de uma compreensão geral das produções publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino e aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade, identificando algumas tendências como as teorias de aprendizagem geralmente relacionadas às propostas pedagógicas para se trabalhar esse tópico assim como aos recursos mais utilizados para abordá-lo entre outros.

Metodologia

Um Mapeamento Sistemático (MS) é um tipo de estudo secundário, cujo objetivo deste, segundo Falbo (2018), é "revisar estudos primários, isto é, as investigações originais, relativos a certas questões de pesquisa, com o objetivo específico de integrar e sintetizar evidências relacionadas a essas questões". Conforme Petersen et al. (2008), estudos de mapeamento sistemático são projetados para fornecer uma visão geral de uma área de pesquisa por meio da classificação e contagem de contribuições em relação às categorias dessa classificação, o que permite ao pesquisador observar lacunas e oportunidades de investigações como estudos primários.

De acordo com Falbo (2018), o processo para realização de um MS envolve três fases bem delineadas: planejamento, condução e publicação dos resultados. No *planejamento*, é identificada a motivação para se realizar o estudo, além de ser definido o protocolo da revisão, detalhando as questões da pesquisa, as estratégias de execução, os critérios para seleção dos estudos e o processo de extração e síntese dos dados dos estudos. Na fase de *condução*, os estudos primários são identificados e selecionados com base nos critérios de seleção que compõem o protocolo estabelecido, o qual deve considerar tanto o conteúdo quanto a qualidade dos estudos. Além disso, a fim de responder às questões de pesquisa, os dados devem ser extraídos e, posteriormente, sintetizados para futura análise. Quanto à *publicação dos resultados*, esta etapa representa a conclusão do processo, com a apresentação da síntese dos achados, bem como do registro esquematizado das etapas anteriores.

Este trabalho possui uma abordagem qualitativa e, quanto aos procedimentos para realização do mapeamento, seguimos as recomendações de Falbo (2018). Na etapa de *planejamento*, iniciamos definindo o objetivo geral deste estudo, que é apresentar um panorama das pesquisas publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes a proporcionalidade, observando tendências de pesquisas e temáticas recorrentes, por meio dos princípios do mapeamento sistemático.

A fim de alcançar o objetivo proposto, foram estabelecidas as seguintes questões de pesquisa: (a) Quais as bases teóricas que subsidiam as pesquisas relacionadas a tópicos inerentes à proporcionalidade? (b) Quais teorias de ensino e de aprendizagem são mais utilizadas ao se tratar de tópicos inerentes a proporcionalidade? (c) Quais os principais obstáculos e dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? (d) Quais os principais recursos pedagógicos que têm sido utilizados no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? (e) Quais outros tópicos costumam ser relacionados à proporcionalidade?

Definimos os anais de quatro eventos de Educação Matemática como referência para a coleta dos dados, com o recorte temporal dos últimos 10 anos (2015 - 2024), sendo um nacional - Encontro

Nacional de Educação Matemática (ENEM), edições de 2016, 2019 e 2022 -, dois internacionais – Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), edições de 2015, 2019 e 2022, e Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM), edições de 2017 e 2022 -, e um internacional mas promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), edições de 2015, 2018, 2021 e 2024. A escolha por esses eventos baseou-se na sua relevância e impacto na área de Educação Matemática no Brasil e no continente americano como um todo.

Para a etapa de *condução* do estudo, estabelecemos os descritores, inseridos separadamente, "proporcionalidade" (18 artigos), "pensamento proporcional" (1 artigo), "raciocínio proporcional" (7 artigos), "proporção" (14 artigos) e "proporcional" (3 artigos) com seus devidos correspondentes no inglês e espanhol, assim como no plural, os quais deveriam constar no título dos trabalhos. A ferramenta de busca em anais de eventos não permite o uso de operadores *booleanos*, portanto os termos foram pesquisados de forma isolada, retornando um total de 43 artigos. Além disso, em algumas edições, foi necessária a busca manual nos arquivos em PDF dos anais, documento por documento. Após a escolha dos termos de busca, foram adotados os critérios de inclusão e exclusão para seleção dos estudos (Quadro 1), aplicados primeiro no título, palavras-chave e resumo dos trabalhos e, quando necessário, após leitura na íntegra, a fim de refinar as buscas.

Quadro 1 – Critérios de Inclusão (CI) e Exclusão (CE) e total de artigos selecionados e excluídos

Código	Critério de Inclusão	Total
CI1	Abordar o ensino e aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade	43
CE1	Ausência ou discussão insuficiente sobre o tópico proporcionalidade	14
CE2	Não é um estudo primário (revisões sistemáticas, revisões de literatura, estado da arte, metanálise)	2
CE3	Pesquisas de natureza básica	3
CE4	Pesquisas de análise de currículo, livro didático e afins	2

Fonte: dados do estudo

A respeito dos trabalhos excluídos a partir do CE1, embora alguns estudos tenham trazido como tópico principal a proporcionalidade e noções relacionadas, ou, como proposta, o uso desses tópicos para se trabalhar outros conceitos matemáticos, notou-se que o foco destes trabalhos não foi a discussão dos tópicos inerentes à proporcionalidade em si, ou ainda, o texto deu destaque a outros aspectos do trabalho que não a discussão do tópico proporcionalidade, não aprofundando nesse último, motivo pelo qual não foram selecionados para este estudo.

Conforme um dos critérios de exclusão estabelecidos, os estudos de revisão, por serem secundários, não farão parte do *corpus* da pesquisa. No entanto, embora estudos semelhantes tenham

sido encontrados (Batista; Lima, 2016), este diferencia-se daquele em termos de recorte temporal e fontes de busca, que, no trabalho citado, contempla apenas as publicações que constam no ENEM, limitando-se às edições de 2010 e 2013 (X e XI edições, respectivamente). Além disso, enquanto o foco desse estudo foi apenas nos conceitos matemáticos de "razão" e "proporção", este busca abranger vários tópicos que compõem o pensamento proporcional. Ademais, pretende-se usar mais critérios de classificação dos estudos além do seu tipo, como foi realizado no trabalho mencionado.

Silva e Costa Júnior (2016) também realizaram um levantamento bibliográfico, mas com o objetivo de apresentar os métodos utilizados pelos babilônios e egípcios para lidarem com o conceito de proporcionalidade. A revisão foi realizada em obras que tratavam de História da Matemática, pois, segundo os autores, fundamentados em Brolezzi (1991), reconhecer eventos históricos relacionados à proporcionalidade pode contribuir para uma melhor compreensão desse conceito e, por extensão, para o aprimoramento do ensino e aprendizagem em Matemática (Silva; Costa Júnior, 2016). Dessa forma, ao final, foram selecionados 22 trabalhos para compor o *corpus* da pesquisa (Quadro 2).

Quadro 2 – *Corpus* do Mapeamento

Evento	Título/Autores/Ano do trabalho
IX CIBEM	Desempenhos de estudantes dos 6º e 9º anos na resolução de problemas de proporção: um estudo comparativo (Merlini; Santos; Magina, 2022)
	Indicadores de progresso em níveis de raciocínio algébrico elementar na resolução de tarefas de proporcionalidade no Ensino Primário (Gaita; Wilhelmi; Ugarte; Gonzales, 2022)
XIV CIAEM	Investigando a formação para a docência – as relações proporcionais em sólidos geométricos (Aroma; Beltrame, 2015)
	Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta (Galvão; Souza; Poggio, 2015)
	El tipo de cantidad en proporcionalidad con problemas de valor faltante (Maciel; Soto, 2015)
	Proporção simples: um estudo de caso sobre o raciocínio de estudantes brasileiros do ensino fundamental (Zanella; Zanella, 2015)
	Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad (Suica; Ramírez, 2015)
	Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da Resolução de Problemas (Costa; Allevato, 2015)
XVI CIAEM	Interpretar características del razonamiento proporcional para tomar decisiones que ayuden a los estudiantes a progresar en su aprendizaje (González; Lloret; Ciscar, 2023)
	Razonamiento proporcional: desafíos de su enseñanza en la formación inicial del profesorado (Peña-Rincón; González; López; Maggio, 2023)
	Uma clase sobre proporcionalidad em uma escuela multigrado (Luna, 2023)
VI SIPEM	Proporcionalidade através da resolução de problemas no curso superior de licenciatura em matemática (Onuchic; Allevato, 2015)
	Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores de matemática (Oliveira; Cyrino, 2015)
VII SIPEM	Conhecimentos profissionais explicitados por uma professora ao ensinar proporcionalidade (Silva; Lopes; Pietropaolo; Campos, 2018)
	Resolução de problemas de divisão de proporção simples por estudantes do 3º e 5º anos (Lautert; Santos; Merlini, 2018)
IX SIPEM	Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória (Rodrigues; França; Rodrigues, 2024)

	A explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de proporção simples por estudantes do ensino fundamental (Sousa; Spinillo, 2024)
XII ENEM	Análise de desempenho e de estratégias de estudantes do 6° ano do ensino fundamental em situações de proporção simples (Castro; Souza; Medeiros; Souza; Dias; Filho, 2016)
	Raciocínio proporcional em um problema envolvendo relações de proporcionalidade: aspectos evidenciados na CoP-PAEM (Oliveira, 2016)
XIII ENEM	Uma introdução do conceito de proporção através da resolução de problemas no contexto do estágio obrigatório (Gardin; Rodrigues; Teixeira, 2019)
	Raciocínio proporcional: uma discussão com base nas dimensões epistêmicas do saber (Oliveira; Lins; Pereira, 2019)
	Situações de proporcionalidade: um caminho para trabalhar a relação funcional nos anos iniciais (Merlini; Teixeira, 2019)

Fonte: dados do estudo

Em termos de caracterização das pesquisas, o que tange a filiação dos autores, embora alguns dos trabalhos selecionados envolvam parcerias entre pesquisadores filiados a universidades de diferentes Estados (4) e até diferentes países (2), no que tange ao âmbito internacional, há trabalhos vinculados à Espanha (2) – contudo as experimentações ocorreram em países latino-americanos –, ao México (2), à Colômbia (1), ao Peru (1), à Costa Rica (1) e ao Chile (1). Já no âmbito nacional, os autores estão distribuídos em instituições, tanto de ensino superior quanto de educação básica, dos Estados de São Paulo (5), Paraná (4), Bahia (3), Pernambuco (2), Mato Grosso do Sul (2), Maranhão (1), Rio de Janeiro (1), Ceará (1), e Paraíba (1). É importante destacar, no contexto nacional, a falta de produções – relacionadas ao foco desta pesquisa – provenientes da região Norte do Brasil, bem como a concentração dessas iniciativas no Estado de São Paulo, envolvendo diversas instituições.

Acerca do público-alvo das pesquisas, 4 contemplam a Educação Básica Anos Iniciais (Zanella; Zanella, 2015; Lautert; Santos; Merlini, 2018; Sousa; Spinillo, 2024; Merlini; Teixeira, 2019), 7 abrangem os Anos Finais (Merlini; Santos; Magina, 2022; Gaita et al., 2022; Suica; Ramírez, 2015; Rodrigues; França; Rodrigues, 2024; Castro et al., 2016; Gardin; Rodrigues; Teixeira, 2019; Oliveira; Lins; Pereira, 2019) e 2 contemplam o Ensino Médio (Galvão; Souza; Poggio, 2015; Maciel; Soto, 2015). Já com relação à formação de professores, 3 trabalham com Formação Inicial (Costa; Allevato, 2015; González; Lloret; Ciscar, 2023; Peña-Rincón et al., 2023), 5 com Formação Continuada (Aroma; Beltrame, 2015; Luna, 2023; Oliveira; Cyrino, 2015; Oliveira, 2016; Silva et al., 2018) e 1 com ambos os seguimentos (Onuchic; Allevato, 2015).

Vale ressaltar que, apesar da pouca diferença entre o quantitativo de trabalhos cujo foco são estudantes da Educação Básica (13) e cujo público é a formação de professores (9), segundo diversos estudos, uma possível explicação para as dificuldades relacionadas à tópicos inerentes à proporcionalidade está na formação de professores, visto que tanto os professores em exercício quanto os na formação inicial têm dificuldades em ensinar conceitos relacionados à proporcionalidade (Burgos et al., 2018). Na próxima seção apresentaremos os resultados do trabalho discutindo-os a partir de cada questão de pesquisa as quais buscamos responder.

Resultados e discussões

Houve trabalhos que enfatizaram um dos tópicos abaixo em detrimento dos demais, ou os ignoraram por completo nas suas análises, por isso nem todos são citados nas respostas e discussões das questões de pesquisa.

Com vistas a responder à indagação "Quais as principais bases teóricas que subsidiam as pesquisas relacionadas a tópicos inerentes à proporcionalidade?", buscamos identificar nos trabalhos os teóricos selecionados pelos pesquisadores para subsidiar as discussões a respeito desses tópicos. O mapeamento dessas bases a respeito do pensamento proporcional visa a compreensão do aparato teórico a partir do qual os autores traçam os objetivos dos seus trabalhos e norteiam as suas ações para, então, observar o que indicam os resultados das pesquisas.

Assim, um trabalho (Onuchic; Allevato, 2015) cita o estudo a respeito do ensino e aprendizagem de razão e proporção de Cramer, Post e Currier (1993), enquanto que seis trabalhos (Galvão; Souza; Poggio, 2015; Oliveira; Cyrino, 2015; Silva et al., 2018; Rodrigues; França; Rodrigues, 2024; Oliveira, 2016; Oliveira; Lins; Pereira, 2019) citam Lesh, Post e Behr (1988) quando falam a respeito do pensamento proporcional, os quais veem este como um conceito fundamental que representa o ponto culminante da Aritmética elementar e serve como base para tudo o que vem depois, além de proporem sete categorias de problemas envolvendo o pensamento proporcional: problema de valor omisso; problema de comparação; problema de transformação; problema de média; problema de conversão; problema envolvendo unidades de medida e números; problema de translação. Rodrigues, França e Rodrigues (2024) se fundamentam nos trabalhos de Silvestre (2012) e Silvestre e Ponte (2012) para caracterizar os aspectos relevantes do pensamento proporcional.

Galvão, Souza e Poggio (2015) trazem Post, Behr e Lesh (1995) a fim de discutir a importância do pensamento proporcional na aprendizagem de Álgebra, apresentando três principais razões para essa importância: a representação algébrica das proporções; a igualdade entre duas razões; e os diferentes modos de representação, como tabelas, gráficos, símbolos, desenhos e diagramas. Também com a proposta de desenvolver o raciocínio algébrico por meio de situações envolvendo proporcionalidade, Gaita et al. (2022), através de um enfoque ontosemiótico, trazem os indicadores identificados por Burgos e Godino (2019) para determinar o nível RAE (Raciocínio Algébrico Elementar) em práticas matemáticas associadas à proporcionalidade.

Quatro trabalhos (Peña-Rincó et al., 2023; Oliveira; Cyrino, 2015; Rodrigues; França; Rodrigues, 2024; Oliveira, 2016) basearam-se na caracterização de Lamon (2012, 2016) para o pensamento proporcional. Já Maciel e Soto (2015), para fundamentar suas ações, consideraram o estudo de Tjoe et al. (2013), os quais investigam os atributos do pensamento proporcional que estão presentes em problemas de proporcionalidade e que os estudantes deveriam dominar: comparar e ordenar frações;

construir razões; construir proporções; identificar uma reação multiplicativa entre conjuntos de valores; diferenciar a relação proporcional de uma não proporcional; e aplicar algoritmos na solução de problemas de pensamento proporcional.

Dois trabalhos (Aroma; Beltrame, 2015; Rodrigues; França; Rodrigues, 2024) fundamentaram-se na meta-análise de Maranhão e Machado (2011) a respeito do pensamento proporcional, as quais, recorrendo a diferentes referenciais teóricos, enfatizam a importância desse pensamento matemático, cujos descritores já existentes sintetizam em apenas cinco, a saber: distinguir situações proporcionais e não proporcionais; diferenciar variáveis diretamente proporcionais das inversamente proporcionais; usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade; fazer comparações numéricas envolvendo os racionais e também não numéricas, ao trabalhar com proporcionalidade; usar ideia de covariação. Em seu trabalho, Aroma e Beltrame (2015) focalizaram apenas os descritores 1 e 2, pois eram os que mais se aproximavam da proposta didática apresentada pela professora participante da pesquisa aos seus estudantes de 5º ano dos Anos Iniciais.

Costa e Allevato (2015), não obstante mencionem as autoras supracitadas, enfatizam Tinoco (1996) e Schliemann e Carraher (1997) como suas fontes de leitura a respeito das discussões que envolvem o processo de ensino e aprendizagem do tópico proporcionalidade. Luna (2023) fundamenta-se na noção de proporcionalidade de Freudenthal (1983) e Block et al. (2010), enquanto González, Lloret e Ciscar (2023) fazem uso das transições entre os níveis de pensamento proporcional (Lobato et al., 2010) dos alunos do ensino secundário que os professores devem ter em conta quando pensam em ensinar os conceitos de razão e proporção.

Seis trabalhos (Merlini; Santos; Magina, 2022; Zanella; Zanella, 2015; Lautert; Santos; Merlini, 2018; Sousa; Spinillo, 2024; Castro et al., 2016; Merlini; Teixeira, 2019) usaram a Teoria dos Campos Conceituais, mais especificamente o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas (Vergnaud, 1983), seus eixos e categorias, para embasar as suas atividades e analisar os dados. Zanella e Zanella (2015) e Lautert, Santos e Merlini (2018) usaram, também, os quatro níveis de raciocínio para a estrutura multiplicativa propostos por Magina, Santos e Merlini (2014): Nível 1: Incompreensível; Nível 2: Pensamento aditivo; Nível 3: Transição do Pensamento Aditivo para o Multiplicativo; Nível 4: Pensamento Multiplicativo, para categorizar o raciocínio dos estudantes participantes de sua pesquisa.

Suica e Ramírez (2015) partem da perspectiva de Guacaneme (2001), o qual, com base na análise de diversos textos de matemática, evidencia algumas contradições que surgem, tanto na matemática quanto intuitivamente, ao se tratar indistintamente a noção de razão e de quociente exato entre dois números, enquanto que Gardin, Rodrigues e Teixeira (2019) fundamentam seus argumentos sobre

proporcionalidade com base no trabalho de Onuchic e Allevato (2008), que trata dos diferentes "significados" do número racional.

A partir desses dados, pode-se retirar que o aparato teórico a respeito de proporcionalidade e do pensamento proporcional levado em consideração pelos trabalhos é bastante diverso, embora Lesh, Post e Behr (1988), Lamon (2012, 2016) e a Estrutura Multiplicativa dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983) sejam os mais utilizados, o que evidencia uma tendência na interpretação de como o pensamento proporcional é estruturado e desenvolvido pelos estudantes.

A fim de responder à questão de pesquisa "Quais teorias de ensino e de aprendizagem são mais utilizadas ao se tratar de tópicos inerentes a proporcionalidade?", identificamos as teorias e metodologias de ensino e aprendizagem utilizadas pelos professores, de forma explícita, para se trabalhar os tópicos específicos de cada um dos trabalhos.

Em se tratando de metodologias de ensino, Costa e Allevato (2015) e Onuchic e Allevato (2015) fizeram uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Allevato; Onuchic, 2009), a qual é realizada a partir de problemas geradores de novos conteúdos, enquanto que Silva et al. (2018) e Gardin, Rodrigues e Teixeira (2019) usaram apenas esta última, seguindo as 9 etapas propostas pelas autoras, a saber: 1) Preparação do problema; 2) Leitura individual; 3) Leitura em conjunto; 4) Resolução do problema; 5) Observar e incentivar; 6) Registro das resoluções na lousa; 7) Plenária; 8) Busca do consenso; 9) Formalização do conteúdo.

Gaita et al. (2022) e Luna (2023) utilizaram as fases da Teoria das Situações Didáticas - TSD, de Brousseau (1986, 2007), para construir a sua proposta de ensino e realizar a análise dos dados coletados, elencando também noções como "contrato didático" e "variáveis didáticas". Rodrigues, França e Rodrigues (2024) conduziram suas atividades a partir da perspectiva do Ensino Exploratório, que se organiza em quatro fases: apresentação e proposição da tarefa; desenvolvimento da tarefa; discussão coletiva e sistematização das aprendizagens (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012).

Já com respeito às teorias de aprendizagem, seis trabalhos (Merlini; Santos; Magina, 2022; Zanella; Zanella, 2015; Lautert; Santos; Merlini, 2018; Sousa; Spinillo, 2024; Castro et al., 2016; Merlini; Teixeira, 2019) fundamentaram-se na Teoria dos Campos Conceituais, mais especificamente na Estrutura Multiplicativa (Vergnaud, 1983), para estruturar a tarefa proposta e/ou realizar a análise das estratégias de resolução dos estudantes.

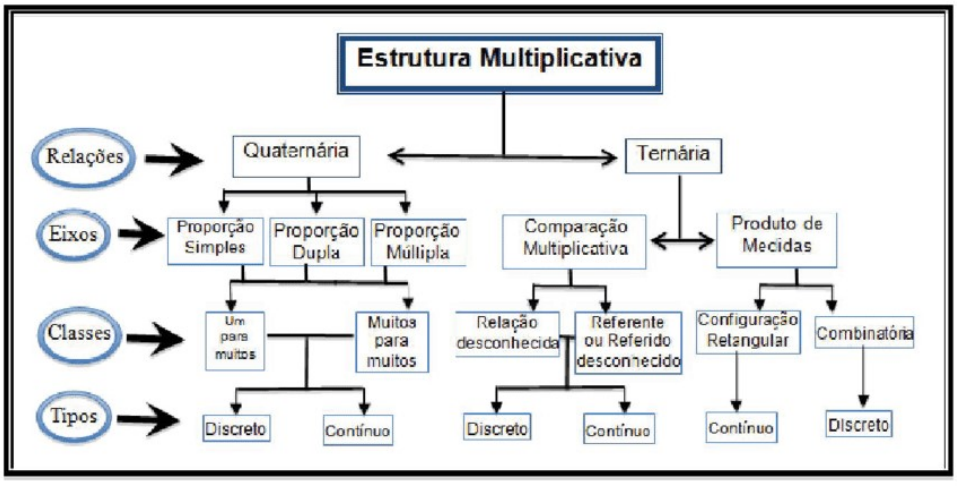
Galvão, Souza e Poggio (2015) norteiam sua questão de pesquisa e sua ação a partir da Teoria dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2004), a qual defende que, para o desenvolvimento cognitivo do ser humano em Matemática, são necessárias atividades que abarquem os diferentes tipos de pensamento matemático, e que categoriza a aprendizagem em três diferentes mundos: mundo conceitual corporificado, mundo operacional simbólico e mundo axiomático formal.

Maciel e Soto (2015) basearam-se no Enfoque Ontológico e Semiótico da Cognição Matemática – EOS, de Godino (1998, 2002), a fim de tentar compreender as diferentes interpretações do significado de um objeto matemático e analisar as relações que se formam entre esses objetos. Gaita et al. (2022) também se apoiaram nessa teoria, embora com foco no modelo de Raciocínio Algébrico Elementar – RAE (Godino et al., 2014) e nos indicadores propostos para determinar o nível RAE (Burgos; Godino, 2019) em práticas matemáticas associadas à proporcionalidade. Aroma e Beltrame (2015) fundamentaram-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (Duval, 2002) durante a análise das respostas dos estudantes à tarefa proposta.

Suica e Ramírez (2015) basearam suas ações no chamado "Retreinamento cognitivo" (Ames, 1987), o qual propõe estratégias que estimulam a reflexão e a modificação de comportamentos cognitivos através de intervenções planejadas. Já Oliveira e Cyrino (2015) e Oliveira (2016) nortearam suas ações a partir da perspectiva da Teoria Social de Aprendizagem por meio de uma Comunidade de Prática (Wenger, 1998), utilizando da Teoria da Aprendizagem Situada (Wenger, 1998) para fazer a análise de seus dados.

A partir do exposto, pode-se destacar a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, mais especificamente o Campo Conceitual Multiplicativo (Figura 1), como a mais utilizada pelos pesquisadores. Segundo Merlini, Santos e Magina (2022), esse campo abrange diversas situações que exigem o uso das operações de multiplicação, divisão ou uma combinação entre ambas, além de contemplar um conjunto de conceitos, incluindo espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, proporção, número racional, multiplicação e divisão.

Figura 1 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo.



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 5).

Dessa forma, o campo conceitual multiplicativo, focando nas relações quaternárias, é composto por um conjunto de situações que envolvem os conceitos que subjazem o tópico de proporcionalidade,

proporcionando toda uma estrutura de relações entre essas situações e os conceitos a fim de que o professor tenha um aporte para traçar seus objetivos de aprendizagem.

Para responder à questão "Quais os principais obstáculos e dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade?", identificamos os que foram levantados e conjecturados pelos autores das pesquisas que fazem parte do *corpus* desse trabalho, não dos obstáculos que estes citam na sua introdução e referencial teórico através de referências a outros estudos. Após análises, classificamos as dificuldades encontradas em seis categorias principais (Quadro 3):

Quadro 3 – Categorias de obstáculos e dificuldades

Categoria	Trabalhos
Confusão entre raciocínio aditivo e multiplicativo	Gaita et al. (2022), Silva et al. (2018) e Oliveira (2016)
Dificuldade com a constante de proporcionalidade	Costa e Allevato (2015), Galvão, Souza e Poggio (2015) e Onuchic e Allevato (2015)
Obstáculos relacionados às operações matemáticas e temas prévios e subjacentes ao pensamento proporcional	Castro et al. (2016), Costa e Allevato (2015), Lautert; Santos e Merlini (2018) e Oliveira (2016)
Dificuldades na interpretação de grandezas e tipos de quantidades	Maciel e Soto (2015), Rodrigues, França e Rodrigues (2024) e Suica e Ramírez (2015)
Ensino mecanizado e falta de compreensão conceitual	Galvão, Souza e Poggio (2015), Oliveira e Cyrino (2015), Onuchic e Allevato (2015), Oliveira (2016) e Rodrigues, França e Rodrigues (2024)
Engajamento e dificuldades na resolução de problemas	Castro et al. (2016), Merlini, Santos e Magina (2022), Oliveira, Lins e Pereira (2019), Peña-Rincón et al. (2023), Silva et al. (2018), Sousa e Spinillo (2024) e Zanella e Zanella (2015)

Fonte: dados do estudo

(1) *Confusão entre raciocínio aditivo e multiplicativo:* Muitos estudantes apresentam dificuldades em diferenciar situações que exigem o uso do raciocínio multiplicativo daquelas que envolvem soma e subtrações diretas (Gaita et al., 2022; Silva et al. 2018). Segundo Oliveira (2016), o pensamento relativo (multiplicativo) não é desenvolvido de maneira natural, assim verifica-se a mobilização do pensamento absoluto (aditivo) quando deveria ser usado o relativo, pois aquele é base de experiências de contagem direta e do trabalho com números naturais. Segundo a autora, as dificuldades apresentadas pelas professoras participantes da sua pesquisa em relacionar as grandezas e diferenciar o significado das comparações absolutas e multiplicativas podem ser considerados reflexos das propostas de ensino vigentes, que não têm priorizado o desenvolvimento matemático dos indivíduos, sua capacidade de comunicação, argumentação e interpretação ao lidar com relações abstratas de natureza multiplicativas.

(2) *Dificuldade com a constante de proporcionalidade:* Galvão, Souza e Poggio (2015) e Costa e Allevato (2015) observaram que os alunos frequentemente definem relações proporcionais apenas com base no aumento ou diminuição das grandezas envolvidas, sem compreender a relação multiplicativa subjacente. Costa e Allevato (2015) e Onuchic e Allevato (2015) também identificaram dificuldades na identificação da constante de proporcionalidade, a qual é responsável por constituir

tal relação como uma função linear (Costa; Allevato, 2015), assim como na distinção entre proporcionalidade e outras relações matemáticas.

(3) *Obstáculos relacionados às operações matemáticas e temas subjacentes ao pensamento proporcional:* Algumas dificuldades estão diretamente ligadas às operações matemáticas envolvidas no pensamento proporcional e aos temas subjacentes a esse. Lautert, Santos e Merlini (2018) destacam que a divisão é um dos obstáculos mais difíceis para as crianças, sendo um conceito intrínseco à Estrutura Multiplicativa, enquanto Castro et al. (2016), além da divisão, citam também a multiplicação como sendo as operações de maior dificuldade entre os estudantes, as quais são requisitadas para trabalhar conceitos como proporção, covariação, razão entre outros.

Na sua pesquisa, Costa e Allevato (2015) evidenciaram a dificuldade dos participantes em operar com uma expressão, o que, segundo os autores, demonstra falta de conhecimento algébrico e numérico. Oliveira (2016) traz ainda que os temas subjacentes ao pensamento proporcional, como os supracitados, são, por vezes, pouco explorados na formação de professores.

(4) *Dificuldades na interpretação de grandezas e tipos de quantidades*: Maciel e Soto (2015) argumentam que o tipo de quantidade envolvida pode ser a base de algumas das problemáticas que enfrentam os estudantes com os problemas de proporcionalidade, citando, como exemplo, o uso de quantidades heterogêneas, visto que os estudantes não estabelecem uma relação significativa imediata entre as quantidades – a dificuldade nesse processo, segundo os autores, está no tratamento semântico da interpretação das unidades geradas pela comparação, como newton-metro, pressão-temperatura etc. Os autores citam, nesse caso, os antecedentes históricos do tema como um obstáculo epistemológico, visto que historicamente as relações de proporcionalidade foram primeiro estabelecidas entre quantidades de mesma natureza e, só então, ampliadas para quantidades de naturezas distintas, o que mostra que chegar à ideia de razão de quantidades não homogêneas não é uma inclinação natural.

Suica e Ramirez (2015) também identificaram dificuldades entre os estudantes quando os problemas envolvem a busca por um segmento em vez de um número devido à tendência dos alunos de reduzir todas as relações matemáticas a números porque é mais fácil para eles tratarem com estes últimos. Além disso, Rodrigues, França e Rodrigues (2024) reforçam essa dificuldade ao destacar o desafio que é para muitos estudantes identificarem corretamente as grandezas e suas relações.

(5) *Ensino mecanizado e falta de compreensão conceitual:* Vários estudos indicam que o ensino da proporcionalidade muitas vezes enfatiza abordagens mecânicas, sem promover uma real compreensão conceitual. Onuchic e Allevato (2015) e Oliveira e Cyrino (2015) mencionam que o ensino é frequentemente restrito à aplicação de regras como a regra de três, sem explorar conexões com outros conceitos dentro e fora da matemática.

Além disso, com relação à resolução de problemas, os estudantes podem até responder às situações, mas não porque têm familiaridade com a ideia de grandezas proporcionais, mas porque sabem aplicar um dos métodos: taxa unitária; regra de três; ou decomposição em parcelas, e não associam estes métodos à proporcionalidade (Galvão; de Souza; Poggio, 2015).

Há ainda casos em que a natureza multiplicativa da relação é observada pelos alunos, mas não compreendida em termos de comparação e relação entre as grandezas envolvidas (Rodrigues; França; Rodrigues, 2024), ou seja, os alunos sabem que devem realizar operações de natureza multiplicativa, mas não compreendem o porquê de estarem fazendo isso, o que evidencia uma fragilidade na produção de significado para as comparações multiplicativas e seus valores resultantes (Oliveira, 2016).

(6) *Engajamento e dificuldades na resolução de problemas:* Algumas pesquisas também apontam desafios relacionados ao engajamento dos alunos e à sua capacidade de resolver problemas envolvendo proporcionalidade. Oliveira, Lins e Pereira (2019) apontam que a falta de engajamento dificulta a identificação de relações multiplicativas e a interpretação de tabelas e gráficos, enquanto Silva et al. (2018) destacam que a forma como os problemas são explorados pode influenciar as dificuldades enfrentadas pelos alunos. Peña-Ricón et al. (2023) apresentam o caso de um grupo de professores em formação inicial que, ao elaborar uma situação envolvendo proporcionalidade, cometeu erros de sentido. Embora a relação entre as variáveis representasse corretamente o tipo de relação matemática desejada, havia inconsistências entre a situação proposta e a realidade, o que comprometia a conexão desse conceito com o cotidiano dos alunos.

Sousa e Spinillo (2024) indicam que a ausência de uma estrutura explícita de "um para muitos" em certos enunciados dificulta a resolução, enquanto Castro et al. (2016) observam que os alunos enfrentam maiores dificuldades ao resolver situações da classe "muitos-para-muitos" do que da classe "um-para-muitos". Além disso, geralmente os estudantes possuem mais dificuldades com o produto de medidas do que com o isomorfismo, a não ser que esse seja interpretado como dupla proporção (Zanella; Zanella, 2015). Merlini, Santos e Magina (2022) evidenciaram que a estratégia de resolver problemas estabelecendo uma relação de correspondência funcional é mais simples para os estudantes do que resolver o problema por meio do escalar multiplicativo, além de hipotetizar que problemas em que a relação funcional entre as variáveis distintas está dentro do domínio dos números naturais são mais simples do que quando não estão.

Dessa forma, os obstáculos identificados na literatura reforçam a necessidade de abordagens pedagógicas que promovam uma compreensão conceitual da proporcionalidade, em vez de apenas enfatizar métodos procedimentais, de modo a dar sentido ao tipo de relação entre as grandezas e significado aos resultados encontrados pelos estudantes ao resolver as situações propostas.

Deve-se também dar uma maior atenção a forma como os problemas são explorados em sala de aula, de forma que os alunos analisem criticamente o tipo de estratégia adequado para resolver situações de proporcionalidade. Além disso, o professor deve privilegiar situações conectadas com a realidade e com outros conceitos matemáticos, a fim de haver um maior engajamento por parte dos estudantes na resolução dos problemas.

Para responder à questão "Quais os principais recursos pedagógicos que têm sido utilizados no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade?", buscamos identificar que recursos os professores costumam usar para sustentar a sua prática pedagógica ao tratar de tópicos relacionados ao pensamento proporcional, assim como a sua potencialidade para promover a aprendizagem dos estudantes. Dito isso, Rodrigues, França e Rodrigues (2024) fizeram uso de uma tarefa exploratória (Ponte, 2005), a fim de favorecer a mobilização de aspectos específicos do pensamento proporcional dos alunos, e da Plataforma digital Genially para introduzir a tarefa a partir de uma história animada.

Em seu trabalho, Aroma e Beltrame (2015) fizeram uso, a partir das etapas de uma sequência didática, de sólidos geométricos em material acrílico e de desenhos, manipulação, recorte e colagem de caixas de embalagem diversas, além de tabelas para explorar a relação entre o número de vértices (arestas) da base de prismas com diferentes configurações com o número total de vértices (arestas) do prisma. Já Gaita et al. (2022) utilizaram as tabelas como instrumento para ordenar valores e estabelecer relações entre magnitudes diretamente proporcionais com os estudantes.

Peña-Rincón et al. (2023), utilizando a metodologia de pesquisa Design Based Research – DBR (Reimann, 2011), também através de uma sequência didática, propuseram uma atividade que fez uso de 116 cartões plastificados de 9x12cm, de cores diferentes e associados a uma mesma situação, organizados da seguinte forma com relação a coloração: amarelos: *situação*; vermelhos: *variáveis implicadas*; verdes: *tabela de valores*; cinzas: *gráficos* (alguns cartões estavam em branco pra que os acadêmicos pudessem completar), com o objetivo principal de caracterizar o tipo de relação que ocorre entre duas variáveis envolvidas na mesma situação.

Suica e Ramírez (2015) usaram como recurso à sua proposta a história da matemática através do Método de Antanairesis (Algoritmo de Euclides) e classificaram, como material concreto utilizado, palitos de madeira coloridos e, como recurso intangível, representações de pares de segmentos de diferentes medidas. Já Silva et al. (2018), fundamentando-se no Método Modelo de Cingapura (MMC), trabalharam com barrinhas para que os estudantes modelassem as situações[3]. Os demais

[3] O MMC é um método específico de resolver problemas matemáticos que utiliza barras retangulares como representações pictóricas de relações quantitativas em situações problema (Silva et al., 2018).

trabalhos fizeram uso de tarefas e situações diversas com objetivos bem delineados, mas sem recorrer a outros recursos para integrar a sua prática.

Pelo exposto, visto que dos 22 (vinte e dois) trabalhos, apenas 6 (seis) fizeram uso de recursos alternativos, evidencia-se uma tendência ao uso de tarefas e situações estruturadas com objetivos específicos, porém sem recorrer a demais recursos para sustentar a prática, embora a eficácia da proposta não seja prejudicada.

Para responder à seguinte questão: "Quais outros tópicos costumam ser relacionados à proporcionalidade?", assim como na seção de obstáculos, buscamos identificar essas conexões a partir das reflexões e conclusões dos trabalhos que compõem o *corpus* da pesquisa, e não das citações de outros teóricos que estes trazem no seu referencial. Portanto, referenciamos apenas os trabalhos que fazem esse movimento.

Assim, baseando-se em Maranhão e Machado (2011), segundo os quais a compreensão dos conceitos inerentes ao pensamento proporcional se manifesta por meio de sua aplicação em problemas de diferentes áreas da Matemática e nas atividades humanas, Aroma e Beltrame (2015), a partir de sua investigação, concluíram que a abordagem didática dos sólidos geométricos pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento proporcional, desde que haja essa intencionalidade no trabalho docente, que foi precisamente a proposta dos autores.

Já Gaita et al. (2022) e Merlini e Teixeira (2019) apresentam situações envolvendo proporcionalidade como potenciais para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, visto que essa noção é transversal no currículo da Educação Básica, associando-a desde as relações de dobro e metade[4] até modelagem mediante função linear (Wilhelmi, 2017 apud Gaita et al., 2022). Merlini, Santos e Magina (2022) também trazem uma conexão com este último, pensando a introdução do conceito de função a partir da generalização de situações multiplicativas, no âmbito da relação quaternária, tendo em vista o Campo Conceitual Multiplicativo. Já Costa e Allevato (2015), além de também relacionarem a proporcionalidade com o tópico função (afim), com a proposta de desvinculá-lo da função afim não linear, afirmam que:

> a proporcionalidade não é apenas um conteúdo matemático, mas um 'formador' de estruturas cognitivas para a compreensão de outros importantes conceitos matemáticos, tanto nas questões numéricas como naquelas que envolvem medidas, Álgebra e Geometria (p. 143).

Onuchic e Allevato (2015) veem a proporcionalidade como princípio unificador na matemática, ou seja, segundo as autoras:

> as relações proporcionais desempenham um papel chave em outros assuntos importantes como: razões, proporções, porcentagem, taxa, escala, semelhança de figuras geométricas, declividade, funções lineares, divisão em partes direta e inversamente proporcionais, regras de três, probabilidade e chance, sequências,

[4] Relación de doble-mitad.

> distribuições de frequências e estatística, razões trigonométricas, movimento em velocidade constante, juros simples, entre outros (p. 5).

De forma mais localizada, Galvão, Souza e Poggio (2015) relacionam a proporcionalidade aos tópicos de fração, semelhança, regra de três, porcentagem e grandezas direta e inversamente proporcionais, no Ensino Fundamental, razão e proporção, semelhança, representação gráfica de funções que relacionam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, no Ensino Médio, e função e derivada no Ensino Superior. Luna (2023) também conecta a proporcionalidade ao tópico de fração, mas no sentido de que esta pode ser usada como estratégia para resolver problemas envolvendo proporcionalidade. Já em Silva et al. (2018), os participantes da pesquisa relacionam-no à fração e à porcentagem.

Suica e Ramírez (2015) vinculam o tópico de proporcionalidade ao de Máximo Divisor Comum (MDC) ao introduzirem o primeiro a partir de situações que visavam a busca de um segmento cuja medida seria a comum entre um par de segmentos dado. Por discutir o pensamento proporcional como um todo, Oliveira e Cyrino (2015) trazem as noções necessárias para o seu desenvolvimento/mobilização, a saber:

> produzir significado para as diferentes representações do número racional (porcentagem, decimal, fração), para as interpretações da representação fracionária a/b (relação parte–todo/medida, quociente, razão, probabilidade, operador) e ainda identificar relações coerentes entre essas representações (proporcionalidade direta ou inversa, equivalência) (p. 3).

Localizando as situações envolvendo proporcionalidade dentro do Campo Conceitual Multiplicativo, Silva et al. (2018) consequentemente relacionam esse tópico à fração, razão, função linear e função n-linear, número racional, dentre outros. Já Sousa e Spinillo (2024) associam a relação do tipo “um para muitos” com atividades envolvendo o raciocínio combinatório e, junto com Castro et al. (2016), colocam as operações de multiplicação e divisão como pré-requisitos para resolução de certos problemas envolvendo proporção. Por fim, Oliveira (2016, p. 4) destaca a importância do pensamento relativo “para lidar com relações de proporcionalidade e proporção em problemas que envolvam comparações entre razões e para desenvolver/mobilizar o Pensamento Proporcional”.

Dessa forma, percebe-se que o tópico proporcionalidade é envolto por uma gama de outros conceitos que o subjazem ou que dependem do seu entendimento para serem plenamente compreendidos, além de perpassar todo o ensino básico dos estudantes. Dito isso, sua importância se faz mais evidente visto que fragilidades conceituais dentro da proporcionalidade impactam nos mais diversos conceitos subsequentes, tanto dentro da matemática – semelhança, funções, razões trigonométricas, derivadas entre outros –, como em outros contextos.

Conclusões

Este estudo teve como objetivo apresentar um panorama das pesquisas publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade, observando tendências de pesquisas e obstáculos recorrentes, por meio dos princípios do mapeamento sistemático. A partir da análise dos trabalhos que compuseram o *corpus* do estudo, visamos responder a cinco questões de pesquisa, observando tendências.

Com base nos achados, observa-se que a literatura sobre proporcionalidade e pensamento proporcional se apoia em diversas bases teóricas, com destaque para a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, e os estudos de Lesh, Post e Behr, além das contribuições de Lamon. Essa diversidade reflete diferentes perspectivas sobre como os estudantes desenvolvem esse tipo de pensamento, mas também sugere uma tendência à interpretação da proporcionalidade sob a ótica das Estruturas Multiplicativas. No entanto, os desafios identificados apontam para a necessidade de abordagens que transcendam o ensino mecanizado e favoreçam a construção de sentido sobre as relações proporcionais. A forma como os problemas são trabalhados em sala de aula tem um impacto significativo na compreensão dos estudantes, além de que o ensino deve privilegiar conexões entre a proporcionalidade e outras áreas da matemática e da vida cotidiana, promovendo maior engajamento e entendimento conceitual.

Além disso, a análise indica que, embora as pesquisas utilizem tarefas estruturadas para explorar a proporcionalidade, há uma baixa adesão a recursos alternativos, como materiais manipulativos ou tecnologias, que poderiam enriquecer a prática pedagógica. Por fim, fica evidente que a proporcionalidade não é um conceito isolado, mas um eixo central no desenvolvimento matemático dos alunos, influenciando desde a compreensão de semelhança entre figuras e funções até conceitos avançados em trigonometria e cálculo. Assim, o ensino eficaz desse tema tem implicações diretas na construção do pensamento matemático e na aprendizagem de diversas disciplinas, reforçando a necessidade de abordagens didáticas mais integradas e contextualizadas.

Uma das limitações deste estudo diz respeito ao *corpus* da pesquisa, composto exclusivamente por trabalhos publicados em anais de eventos. Embora esses estudos forneçam um panorama relevante e atual sobre a produção acadêmica na área, a ausência de artigos publicados em periódicos pode restringir a abrangência das discussões e aprofundamentos teóricos sobre o tema. Além disso, diante do grande número de trabalhos selecionados, torna-se inviável uma análise aprofundada sobre cada um dos trabalhos. Outra limitação envolve o recorte geográfico das pesquisas, cujas experimentações ocorrem apenas em países latino-americanos, fornecendo um panorama reduzido em comparação às pesquisas realizadas no mundo todo.

Diante dessas limitações, pretende-se dar continuidade a essa investigação por meio de uma revisão sistemática, que permitirá uma análise mais aprofundada sobre os obstáculos envolvidos no

ensino e na aprendizagem da proporcionalidade. Para isso, o estudo focará em um *corpus* reduzido, priorizando trabalhos que tenham como participantes professores em serviço e professores em formação inicial. O objetivo será compreender melhor os desafios que emergem da atuação docente e relacioná-los ao conhecimento especializado do professor de e que ensina matemática, ampliando as discussões sobre a influência desse conhecimento na superação das dificuldades no ensino da proporcionalidade.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 55, p.1-19. 2009.

AMES, C. The enhancement of student motivation. In: MAEHR, M.; KLEYBER, D. (ed.), **Avances y Motivation and Achievement: Enhacing Motivation**, vol.5. Greenwich: Jai Press, 1987.

AROMA, A. C. S.; BELTRAME, S. R. M. Investigando a formação para a docência – as relações proporcionais em sólidos geométricos. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2015, p. 308-314.

BATISTA, J. A.; LIMA, T. N. S. Trabalhos sobre razão e proporção nos X e XI encontros nacionais de educação matemática. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-13.

BLOCK D.; MENDOZA, T.; RAMÍREZ, M. **Al doble le toca el doble?** La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. México: Somos maestros/ Cinvestav, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BROLEZZI, A. C. **A arte de contar: uma introdução ao sentido do valor didático da História da Matemática**. São Paulo, 1991. 75 p. Dissertação (Mestrado em Educação) –Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1991.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques (Revue)**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas en matemáticas**. 1 ed. Buenos Aires: Libros de Zorzal, 2007.

BURGOS, M.; BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACOMONE, B.; GODINO, J. Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. **Educação e Pesquisa**, v. 44, n. e182013, 2018.

BURGOS, M.; GODINO, J. D. Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. **Educación Matemática**, v. 31, n. 3, p. 117-150, 2019.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. *In:* L. Santos (ed.). **Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática**. Portalegre: SPIEM, 2012. p. 255-266.

CASTRO, J. B.; SOUZA, D. C.; MEDEIROS, D. M; SOUZA, M. S. M. X.; DIAS, A. C. A. M.; FILHO, J A. C. Análise de desempenho e de estratégias de estudantes do 6° ano do ensino fundamental em situações de proporção simples. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da Resolução de Problemas. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2015, p. 141-152.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and teaching ratio and proportion: research implications. In: OWENS, D. T. (ed.). **Research ideas for the classroom:** middle grades Mathematics. New York: Macmillan, 1993. p. 159-178.

DOOLEY, K. B. **An investigation of proportional thinking among high school students**. 2006. 170 f. Doctoral Dissertation (Philosophy Curriculum and Instruction) – Graduate School of Clemson University, Clemson, 2006.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematicalthinking: Basic issues for learning. In: HITT, F. (Ed.) **Representations and mathematics visualization**. México, D.F.: Departamento de Matemática Educativa Del Cinestav, 2002.

FALBO, R. de A. Mapeamento sistemático. **Retrieved October**, v. 7, 2018.

FALVO, S R.; JUCÁ, R. S. O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos anos iniciais. **Com a Palavra, o Professor**, v. 7, n. 18, p. 135-152, 2022.

FREUDENTHAL, H. **Ratio and Proportionality**. Didactical Phenomenology of MathematicalStructures. Mathematics Education Library. Springer, 1993.

GAITA, C.; WILHELMI, M. R.; UGARTE, F.; GONZALES, C. Indicadores de progresso em níveis de raciocínio algébrico elementar na resolução de tarefas de proporcionalidade no Ensino Primário. In: IX CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2022, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: PUC-SP, 2022, p. 2417-2429.

GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, V. H. G.; POGGIO, A. M. P. P. Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2015, p. 175-186.

GARDIN, F. S.; RODRIGUES, A. L.; TEIXEIRA, B. R. Uma introdução do conceito de proporção através da resolução de problemas no contexto do estágio obrigatório. In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-10.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 22, n. 2/3, p. 237-284, 2002.

GODINO, J. D.; AKÉ, L.; GONZATO, M.; WILHELMI, M. R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. **Enseñanza Ciencias**, v. 32, n. 1, p. 199-219, 2014.

GODINO J. D.; BATANERO C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D.; RECIO, A. M. A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. In: OLIVIER, A.; NEWSTEAD, K. (ed.), 22ND PME CONFERENCE, v. 3, 1998, Stellenbosch, South Africa. **Proceedings** […]. Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education, 1998. p. 1-8.

GONZÁLEZ, J. E.; LLORET, A. B.; CISCAR, S. L. Interpretar características del razonamiento proporcional para tomar decisiones que ayuden a los estudiantes a progresar en su aprendizaje. In: XVI CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2023, Lima, Perú. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2023, p. 191-198.

GUACANEME, E. **Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad:** Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas (Tesis de maestría). Universidad del Valle: Cali, Colombia, 2001.

JITENDRA, A. K.; STAR, J. R.; RODRIGUEZ, M.; LINDELL, M.; SOMEKI, F. Improving student's proportional thinking using schema-based instruction. **Learning and Instruction**, v. 21, n. 6, p. 731-745, 2011.

LAMON, S. J. Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In: LESTER, F. (ed.) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Volume 1. Information AGE, 2016. p. 629-667.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding:** essential content knowledge and instructional strategies for teacher. New York: Routledge, 2012.

LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M.; MERLINI, V. L. Resolução de problemas de divisão de proporção simples por estudantes do 3º e 5º anos. In: VII SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais** [...]. Foz do Iguaçu: SBEM, 2018. p. 1-13.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (ed.) **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118.

LOBATO, J.; ELLIS, A. B.; CHARLES, R. I.; ZBIEK, R. M. **Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2010.

LUNA, A. A. Una clase sobre proporcionalidad en una escuela multigrado. In: XVI CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2023, Lima, Perú. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2023, p. 400-407.

MACIEL, J. C. R.; SOTO, C. M. A. El tipo de cantidad en proporcionalidad con problemas de valor faltante. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2015, p. 293-303.

MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. In: CASTRO, F. et al. (org.), Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais. Editora CRV: Curitiba, 2016. p. 65-82.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação**, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, v. 27, n. 1, p. 141-156, 2011.

MERLINI, V. L.; SANTOS, A.; MAGINA, S. M. P. Desempenhos de estudantes dos 6º e 9º anos na resolução de problemas de proporção: um estudo comparativo. In: IX CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2022, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: PUC-SP, 2022, p. 2920-2931.

MERLINI, V.; TEIXEIRA, C. Situações de proporcionalidade: um caminho para trabalhar a relação funcional nos anos iniciais. In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-15.

MIRANDA, M. R. **Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações**. 2009. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

NORTON; S. J. The construction of proportional reasoning. **International Group for the Psycology of Mathematics Education**, v. 4, p. 17-24, 2005.

OLIVEIRA, E. S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. S. Raciocínio proporcional: uma discussão com base nas dimensões epistêmicas do saber. In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-14.

OLIVEIRA, L. M. C. P.; CYRINO, M. C. C. T. Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores de matemática. In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Pirenópolis. **Anais** […]. Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.

OLIVEIRA, L. M. C. P. Raciocínio proporcional em um problema envolvendo relações de proporcionalidade: aspectos evidenciados na CoP-PAEM. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N S. G. As Diferentes "Personalidades" do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade através da resolução de problemas no curso superior de licenciatura em matemática. In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Pirenópolis, Brasil. **Anais** […]. Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.

PEÑA-RINCÓN, P.; GONZÁLEZ, N. R.; LÓPEZ, C. L.; MAGGIO, H. M. Razonamiento proporcional: desafíos de su enseñanza en la formación inicial del profesorado. In: XVI CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2023, Lima, Perú. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2023, p. 280-287.

PETERSEN, K., FELDT, R., MUJTABA, S., MATTSSON, M., Systematic MappingStudies in Software Engineering. In: **Proceedings of the 12th International Conference on Evaluation and Assessment in Software Engineering** (EASE 2008), 2008. p. 68-77.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em matemática. In: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2005. p. 11-34.

POST, R. T.; BEHR, J. M.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

REIMANN, P. Design-Based Research. In: MARKAUSKAITE, L.; FREEBODY, L.; IRWIN, P. (ed.), **Methodological Choice and Design**: Scholarship, Policy and Practice in Social and Educational Research. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011. p. 37-50.

RODRIGUES, S. P.; FRANÇA, M. E. V.; RODRIGUES, R. V. R. Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória. In: IX SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2024, Natal. **Anais** [...]. Natal: SBEM, 2024. p. 1-15.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. Razões e Proporções na vida diária e na escola. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Editora da universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37, 1997.

SILVA, J. B. R.; COSTA JÚNIOR, J. R. Contribuições da história da matemática para o estudo de conceitos matemáticos: o caso da proporcionalidade. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.

SILVA, A. F. G.; LOPES, S. C.; PIETROPAOLO, R. C.; CAMPOS, T. M. M. Conhecimentos profissionais explicitados por uma professora ao ensinar proporcionalidade. In: VII SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais** [...]. Foz do Iguaçu: SBEM, 2018. p. 1-13.

SILVESTRE, A. I. **O desenvolvimento do raciocínio proporcional: Trajetórias de Aprendizagem de Alunos do 6.º Ano de Escolaridade**. 392f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa. Lisboa, 2012.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. **Interacções**, v. 8, n. 20, 70-97, 2012.

SOUSA, M. R.; SPINILLO, A. G. A explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de proporção simples por estudantes do ensino fundamental. In: IX SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2024, Natal. **Anais** [...]. Natal: SBEM, 2024. p. 1-8.

SUICA, D. I. Q.; RAMÍREZ, N. V. Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2015, p. 33-41.

TALL, D. O. Thinking Through Three Worlds of Mathematics. 28th CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, v. 4, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings** [...]. 2004. p. 281-288.

TINOCO, L. A. A. **Razões e proporções**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática / UFRJ, 1996.

TJOE et al. Identification and validation process of proportional reasoning attributes: an application of a cognitive diagnosis modeling frame work. **Mathematics Education Research Journal**, p. 1-19, 2013.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: R. LESH; M. LANDAU (ed.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures**. New York: Academic Press, 1983, p.127-174.

WENGER, E. **Communities of Practice**: Learning, Meaning, and Identity. New York: Cambridge University Press, 1998.

ZANELLA, M. S.; ZANELLA, I. A. Proporção simples: um estudo de caso sobre o raciocínio de estudantes brasileiros do ensino fundamental. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2015, p. 210-219.

Recebido em: editora
Aprovado em: editora

Artigo está licenciado sob forma de uma licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional.

Rematec
Revista Matemática, Ensino e Cultura

e-ISSN: 2675-1909 | ISSN: 1980-3141
N. 53, e2025018
10.37084/REMATEC.1980-3141.2025.n53.e2025018.id767

Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de Matemática sobre o tópico proporcionalidade

Specialized mathematical knowledge revealed by prospective mathematics teachers on the topic of proportionality

Conocimiento matemático especializado revelado por futuros profesores de matemáticas sobre el tema de la proporcionalidad

Roberta dos Santos Rodrigues[1]

Francisco Eteval da Silva Feitosa[2]

RESUMO

O pensamento proporcional vai além da simples noção de proporcionalidade, destacando-se por sua relevância tanto na aprendizagem da matemática quanto em sua aplicação em diferentes campos do conhecimento. Este artigo apresenta os resultados de uma avaliação diagnóstica realizada com sete futuros professores de Matemática, com o objetivo de descrever seus conhecimentos matemáticos sobre proporcionalidade. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujos dados foram coletados por meio de um instrumento avaliativo fundamentado nas categorias de problemas envolvendo pensamento proporcional propostas por Lesh, Post e Behr, e analisados à luz do modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Os resultados revelam que os participantes possuem conhecimento restrito ao uso do algoritmo da "regra de três", apresentam dificuldades na compreensão da proporcionalidade inversa e demonstram fragilidades conceituais, o que evidencia a necessidade de fortalecer a formação inicial para favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado voltado ao ensino da proporcionalidade.
Palavras-chave: Pensamento proporcional; Formação de professores; MTSK; Resolução de problemas.

ABSTRACT

Proportional thinking goes beyond the mere notion of proportionality, standing out for its relevance both in mathematics learning and in its application across different fields of knowledge. This article presents the results of a diagnostic assessment conducted with seven prospective mathematics teachers, aiming to describe their mathematical knowledge about proportionality. It is a qualitative study, in which data were collected through an assessment instrument based on the categories of problems involving proportional reasoning proposed by Lesh, Post, and Behr, and analyzed considering the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model. The results reveal that the participants' knowledge is limited to the use of the "rule of three" algorithm, show difficulties in understanding inverse proportionality, and demonstrate conceptual weaknesses, highlighting the need to strengthen initial teacher education to foster the development of specialized mathematical knowledge for teaching proportionality.
Keywords: Proportional thinking; Teacher instruction; MTSK; Problem solving.

RESUMEN

El pensamiento proporcional va más allá de la noción de proporcionalidad, destacándose por su relevancia tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en su aplicación en diferentes campos del conocimiento. Este artículo presenta los resultados de una evaluación diagnóstica realizada con siete futuros profesores de Matemáticas, con el objetivo de describir sus conocimientos matemáticos sobre proporcionalidad. Se trata de una investigación cualitativa, cuyos datos fueron recolectados mediante un instrumento de evaluación basado en las categorías de problemas que implican pensamiento proporcional propuestas por Lesh, Post y Behr, y analizados a la luz del modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Los resultados revelan que los participantes poseen un conocimiento limitado al uso del algoritmo de la "regla de tres", presentan dificultades en la comprensión de la proporcionalidad inversa y evidencian debilidades conceptuales, lo que resalta la necesidad de fortalecer la formación inicial para promover el desarrollo del conocimiento matemático especializado orientado a la enseñanza de la proporcionalidad.
Palabras clave: Pensamiento proporcional; formación de profesores; MTSK; resolución de problemas.

[1] Licenciada em Matemática (UFAM). Discente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECiM-UFAM), Manaus, Amazonas, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Genebra, 4, Qd. 25, Conj. Campos Elíseos, Planalto, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69045-380. E-mail: roberta.rodrigues@ufam.edu.br.

[2] Doutor em Matemática (UFAM). Docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECiM-UFAM), Manaus, Amazonas, Brasil. Endereço para correspondência: Rua das Oliveiras, 9, Novo Israel, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69039-305. E-mail: sfeitosa@ufam.edu.br.

OPEN ACCESS
iThenticate
Artigo analisado usando o software de comparação de texto iThenticate da Turnitin por meio do serviço *Similarity Check* Crossref.

INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental destaca a proporcionalidade como uma das ideias fundamentais da Matemática, as quais são consideradas importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático e devem ser tratadas, no ambiente escolar, como objetos de conhecimento (Brasil, 2018). Segundo esse documento norteador, o tema proporcionalidade está presente em todas as unidades temáticas – Números, Grandezas e Medidas, Álgebra, Geometria e Probabilidade e Estatística – e, mais especificamente para o Ensino Fundamental, espera-se que os estudantes desenvolvam o pensamento proporcional por meio da exploração de situações que permitam representar a variação entre grandezas em um sistema de coordenadas cartesianas, além de analisar e identificar o tipo de variação envolvida – seja ela diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional (Brasil, 2018).

No entanto, não obstante a sua relevância, Lamon (2012, 2016) aponta que as ideias de proporcionalidade são pouco assimiladas, principalmente porque são ensinadas de forma mecanizada na sala de aula, sem promover uma compreensão profunda do pensamento proporcional subjacente. Silvestre e Ponte (2012) relacionam a rigidez no pensamento proporcional dos estudantes à limitada diversidade das tarefas matemáticas apresentadas em sala de aula. Dessa forma, Magina, Spinillo e Lautert (2020) enfatizam a necessidade de os professores ampliarem seus conhecimentos sobre problemas de estrutura multiplicativa – da qual os problemas envolvendo proporcionalidade fazem parte – e de proporem em sala de aula uma maior variedade de situações.

Além disso, tanto os professores em exercício quanto os na formação inicial têm dificuldades em ensinar conceitos relacionados à proporcionalidade (Burgos *et al*., 2018). Segundo esses autores, uma das principais dificuldades apontadas em estudos é que os professores frequentemente utilizam o algoritmo de multiplicação cruzada (regra de três) para resolver problemas, sem avaliar se essa abordagem é adequada à situação em questão. Este método algorítmico, além de ser mal compreendido pelos estudantes (Post; Behr; Lesh, 1995) também é geralmente utilizado mais para evitar o pensamento proporcional do que para favorecê-lo (Lesh; Post; Behr, 1988).

As dificuldades mencionadas refletem o que Fuentes Leal (2020) descreve como uma *tensão* entre a relevância e a presença transversal da proporcionalidade no currículo escolar e os obstáculos persistentes em sua compreensão e aplicação ao longo da trajetória educacional dos alunos. Considerando que estudos indicam que o professor exerce a maior influência sobre a aprendizagem dos estudantes (Darling-Hammond, 2000; Boyd *et al*., 2009; Hill; Chin, 2018), torna-se essencial desenvolver investigações voltadas à formação docente. Ou seja, para que os estudantes desenvolvam competências e consigam superar tais dificuldades, é fundamental que o professor possua um conhecimento aprofundado sobre os conteúdos que pretende ensinar.

Diante do exposto, evidencia-se a relevância de investigações que abordem o conhecimento matemático de futuros professores no campo da Educação Matemática. Nesse contexto, este estudo busca responder à seguinte questão: que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de Matemática ao responderem a uma ava-

liação diagnóstica sobre proporcionalidade? Para isso, tem como objetivo apresentar e analisar os resultados dessa avaliação, identificando os aspectos do conhecimento matemático especializado evidenciados pelos participantes acerca do tópico proporcionalidade.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

Nesta seção, apresentamos uma visão geral sobre o pensamento proporcional, destacando sua complexidade, abrangência e relevância tanto no campo da Matemática quanto no contexto escolar. Abordamos ainda o modelo teórico-analítico Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), que será utilizado como ferramenta para a análise dos conhecimentos manifestados pelos professores participantes desta pesquisa. Por fim, articulamos o objeto matemático foco do estudo com o modelo, de modo a situá-lo na perspectiva do MTSK e a evidenciar as relações entre o conceito e o subdomínio do conhecimento docente investigado.

Proporcionalidade

A proporcionalidade integra o denominado Pensamento Proporcional (Bianchini; Lima, 2023), o qual, de acordo com Lesh, Post e Behr (1988), pode ser considerado uma das bases fundamentais da Matemática. Embora seu alcance vá além da mera compreensão das relações proporcionais, esse tipo de pensamento abarca o estudo das proporções (Lamon, 2012), e seu desenvolvimento adequado é apontado como uma "condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade" (Falvo; Jucá, 2022, p. 139).

Scheller e Bonotto (2020) destacam que o pensamento proporcional envolve compreender adequadamente a existência de uma relação constante entre duas grandezas – ou seja, a invariância –, bem como perceber que essas grandezas se modificam simultaneamente – a chamada covariância. Da mesma forma, Lamon (2012) aponta que o pensamento proporcional inclui tanto a habilidade de ampliar ou reduzir escalas quando necessário, quanto a capacidade de justificar conjecturas sobre as relações envolvidas em contextos de proporcionalidade, seja direta ou inversa.

Maranhão e Machado (2011), ao realizarem uma meta-análise sobre investigações acerca do pensamento proporcional, sintetizam esse tipo de pensamento em cinco descritores essenciais: (i) reconhecer a diferença entre situações proporcionais e não proporcionais; (ii) distinguir variáveis diretamente proporcionais daquelas inversamente proporcionais; (iii) empregar multiplicação e divisão na resolução de problemas de proporcionalidade; (iv) realizar comparações tanto numéricas, envolvendo números racionais, quanto qualitativas; e, por fim, (v) considerar a ideia de covariação, superando uma concepção restrita que reduz a proporcionalidade a algoritmos e procedimentos mecânicos.

Além disso, em alinhamento com a concepção de Vergnaud (1994), segundo a qual o conhecimento se constrói a partir da interação do sujeito com a situação-problema, Lesh, Post e Behr (1988) propõem uma classificação que organiza as diferentes situações que demandam a mobilização do pensamento proporcional em sete distintas categorias, as quais ressaltam múltiplas dimensões tanto da proporcionalidade quanto do pensamento propor-

cional (Falvo; Juca, 2022): problema de valor omisso; problema de comparação; problema de transformação; problema de média; problema de conversão; problema envolvendo unidades de medida e números; e problema de translação.

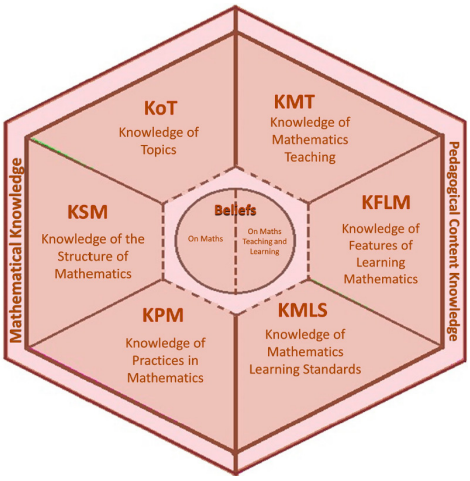
No entanto, determinados tipos de problemas, como aqueles que envolvem a conversão entre diferentes sistemas de representação, raramente aparecem nos livros didáticos e tampouco são foco recorrente das investigações sobre o tema, uma vez que consistem em ações dinâmicas cuja tradução em linguagem escrita é desafiadora. Ainda assim, tais problemas são comuns no cotidiano e refletem processos frequentemente utilizados pelos estudantes ao resolverem tarefas relacionadas à proporcionalidade (Lesh; Post; Behr, 1988).

Diante da ausência desses problemas nos materiais didáticos, torna-se essencial que o professor possua conhecimentos específicos sobre eles, considerados inerentes à prática docente em matemática. Assim, adota-se uma perspectiva que valoriza as particularidades do conhecimento profissional do professor de matemática, especialmente no que diz respeito à sua natureza especializada e ao domínio do conteúdo, com ênfase no tema da proporcionalidade. Para este trabalho, elegemos o modelo teórico Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo *et al*., 2018) e suas dimensões, que ser**ão** explorados a seguir.

Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK

Devido a relevância da investigação a respeito do conhecimento do professor, nas últimas décadas desenvolveu-se propostas de modelos teóricos que se aprofundam em aspectos específicos desse conhecimento, dentre os quais o Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo *et al*., 2018). O MTSK é estruturado em dois domínios principais, cada qual composto por três subdomínios: o Mathematics Knowledge – MK, que diz respeito ao conhecimento que o professor possui sobre a matemática enquanto disciplina científica no contexto educacional, e o Pedagogical Content Knowledge – PCK, que engloba os saberes vinculados ao ensino e à aprendizagem do conteúdo matemático. Além disso, há ainda o domínio das Beliefs, que compreende as crenças e percepções do professor a respeito tanto da matemática quanto sobre o seu processo de ensino e aprendizagem (Figura 1).

Figura 1 – Domínios e subdomínios do modelo MTSK.



Fonte: Carrillo *et al*. (2018).

Aqui, em razão do foco que adotamos, discutimos apenas o conteúdo do conhecimento referente ao KoT, o qual se refere ao conhecimento profundo do conteúdo matemático em si, isto é, conhecer os conteúdos matemáticos e seus significados de maneira fundamentada e sempre com um nível de profundidade, organização e estruturação maior do que se espera dos estudantes (Ma, 1999). Esse subdomínio é composto por quatro categorias, que são caracterizadas a seguir.

A categoria de **Definições, propriedades e fundamentos** refere-se ao conhecimento matemático do professor sobre o tópico proporcionalidade, o qual deve ser sempre mais profundo que o do estudante (Carrillo *et al*., 2018). Abrange o conhecimento do que caracteriza duas grandezas serem diretamente ou inversamente proporcionais, por exemplo. Além disso, esta categoria também contempla o domínio sobre as propriedades e fundamentos que são associados a um tema específico, como o conhecimento das propriedades de razões equivalentes, que são úteis na resolução de problemas envolvendo proporcionalidade.

A categoria **Fenomenologia e aplicações** envolve, de um lado, o conhecimento das diversas situações em que o professor pode contextualizar a proporcionalidade, atribuindo-lhe significado e promovendo a construção de saberes matemáticos, incluindo aquelas relacionadas à origem do próprio conceito (Carrillo *et al*., 2018). Um exemplo seria o professor conhecer os diferentes tipos de problemas que dão sentido ao conceito de proporcionalidade. Por outro lado, essa categoria também engloba o domínio sobre as aplicações práticas desse tópico, como, por exemplo, a utilização do conceito de escala no contexto do trabalho com plantas baixas em projetos de construção.

A categoria **Registros de representação** diz respeito às diversas maneiras que o professor pode empregar para expressar um conceito, processo ou procedimento, incluindo representações gráficas, algébricas, aritméticas, pictóricas, em linguagem natural, entre outras. Além disso, abrange o domínio sobre a notação e a terminologia adequadas a essas formas de representação (Carrillo *et al*., 2018). Por exemplo, envolve a capacidade do professor de apresentar as relações multiplicativas entre duas grandezas proporcionais utilizando esses diferentes registros, assim como de representar uma razão por meio de frações, tabelas ou gráficos.

Já a categoria **Procedimentos** abrange o conhecimento sobre algoritmos, sejam eles convencionais ou alternativos, incluindo como executá-los, quando são apropriados, além dos fundamentos matemáticos que justificam seu uso — o que estabelece uma conexão com as propriedades e definições associadas — e as características do objeto matemático resultante (Carrillo *et al*., 2018). Por exemplo, essa categoria contempla o domínio sobre quais situações requerem o uso de estratégias baseadas em raciocínio multiplicativo ou aditivo, bem como a compreensão do fundamento da conhecida "regra de três", explicando por que esse método é adequado para resolver problemas que envolvem proporcionalidade.

METODOLOGIA

Este estudo, que é um recorte de uma pesquisa maior no nível de mestrado acadêmico, possui um enfoque teórico interpretativo a partir de uma abordagem qualitativa, visto que buscamos analisar e compreender o conhecimento matemático especializado

mobilizado por um grupo de futuros professores ao responderem um questionário diagnóstico. Nossas ações vão ao encontro do pensamento de Stake (2011) quando diz que o termo "qualitativa" significa que a forma de pensar nesse tipo de pesquisa fundamenta-se principalmente na percepção e na compreensão humana. Além disso, a pesquisa tem o delineamento de estudo de caso instrumental (Stake, 2005), no qual o caso é escolhido com a expectativa de que contribua para uma melhor compreensão de um contexto mais amplo, oferecendo percepções valiosas sobre o tema em questão, que, neste caso, é o conhecimento matemático especializado do professor para o ensino de proporcionalidade.

Os participantes deste estudo são 7 (sete) professores de matemática em formação inicial, cursando o 3º período (2º ano) da Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Amazonas – UFAM. Todos os participantes são bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID e estão estagiando em escolas da rede pública de ensino da capital do estado, sendo que 4 (quatro) estagiam em turmas de 7º e 8º ano (12 e 13 anos) e 3 (três), em turmas de Ensino Médio (15 a 17 anos).

De modo geral, com a aplicação desse questionário diagnóstico, buscamos compreender o conhecimento dos participantes sobre a resolução dos diferentes tipos de problemas que dão significado ao conceito de proporcionalidade, bem como identificar as distintas estratégias por eles mobilizadas para esse fim (Scheller; Bonotto, 2020; Spinillo, 1994). Pretendemos ainda investigar se eles demonstram uma atitude crítica na escolha de abordagens adequadas a cada situação proposta (Burgos *et al*., 2018).

O questionário era composto por nove questões, sendo uma conceitual enquanto as demais eram problemas formulados segundo as sete categorias de problemas envolvendo o pensamento proporcional (Lesh; Post; Behr, 1988). Cada uma das questões possui uma intencionalidade específica relacionada com determinados conhecimentos que compõem as categorias do subdomínio KoT, o qual buscamos investigar. Neste trabalho s**ão** analisadas duas questões (Quadro 1), as quais estão descritas abaixo.

Quadro 1 – Questões do Questionário Diagnóstico analisadas neste recorte.

1. O que você entende por: a) Proporcionalidade? b) Proporcionalidade direta? Dê um exemplo de uma situação em que as variáveis são diretamente proporcionais. c) Proporcionalidade inversa? Dê um exemplo de uma situação em que as variáveis são inversamente proporcionais.
2. Mantendo uma velocidade, um carro percorre 250 km em 3 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas? Em um outro trecho, sabe-se que se o carro andar a 80 km/h, levará 5 horas para percorrer este trecho. A que velocidade o carro deverá andar se quiser percorrer esse trecho em 4 horas?

Fonte: Elaboração pelos autores.

Sendo assim, a questão 1 visa aceder ao conhecimento dos participantes acerca das definições de proporcionalidade, proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa (KoT – Definição), assim como ao conhecimento de identificar situações que envolvem grandezas diretamente e inversamente proporcionais (KoT – Fenomenologia e aplicações) através dos exemplos dados. Para essa questão, foi dada a orientação que os participantes poderiam uti-

lizar esquemas, palavras, cálculos, figuras etc. para expressarem o que entendem por esses conceitos (KoT – Registros de representação).

Na questão 2, com vistas a aceder a uma grande gama de conhecimentos dos participantes, solicitou-se que eles: identificassem as grandezas envolvidas na situação, visto que esse conhecimento é transversal ao conceito de proporcionalidade e essencial para reconhecer e compreender conceitualmente a relação entre as quantidades; indicassem se há uma situação de proporcionalidade envolvida (KoT – Fenomenologia e aplicações) e, se houver, justificar o porquê; e resolver o problema proposto, explicando o seu raciocínio e descrevendo o processo que usaram para resolv**ê-lo** através de esquemas, palavras, cálculos etc. (KoT – Procedimentos).

Isso posto, os problemas apresentados nessa quest**ão** pertencem à categoria Problema de valor omisso (Lesh; Post; Behr, 1988), na qual, relativamente às duas magnitudes envolvidas, são conhecidas três quantidades, digamos A, B e C e, recorrendo à relação A/B=C/D, deve-se determinar a quantidade D. Essa questão visa aceder ao conhecimento da diferença entre situações que envolvem variáveis diretamente proporcionais e inversamente proporcionais (KoT – Fenomenologia e aplicações), visto que ela **é composta por uma situação que** contém proporcionalidade direta e uma que envolve proporcionalidade inversa, e ao conhecimento das diferentes estratégias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos).

Para a análise dos dados produzidos pelos participantes, foi adotada a técnica de análise de conteúdo (Bardin, 2011), estruturada em três etapas: pré-análise – na qual foi realizada a organização do *corpus* de dados, composto pelas respostas escritas e pelas transcrições das entrevistas, e leitura flutuante com o objetivo de identificar manifestações do conhecimento relacionado às categorias do KoT dos participantes –, exploração do material – procedeu-se à codificação e categorização dos dados, com base em um sistema de categorias previamente definido a partir do referencial teórico adotado, os quais foram organizados em subcategorias que expressem tanto as evidências de conhecimento robusto quanto as fragilidades identificadas nas respostas dos participantes – e tratamento dos resultados, inferência e interpretação – os dados categorizados foram analisados à luz dos objetivos da pesquisa e do referencial teórico, buscando-se identificar padrões, tendências e possíveis lacunas no conhecimento matemático especializado dos participantes. As interpretações são discutidas em relação às implicações para a formação inicial de professores de matemática e para o ensino de conceitos relacionados à proporcionalidade.

Essa abordagem se mostra adequada ao caráter qualitativo e interpretativo do estudo, uma vez que possibilita a sistematização e a compreensão aprofundada dos dados produzidos a partir das respostas dos participantes ao questionário diagnóstico e das transcrições das entrevistas. Com vistas a assegurar a validade e a confiabilidade da análise, foi realizado um processo de dupla codificação independente, seguido de reuniões de consenso entre os pesquisadores para resolução de eventuais divergências na classificação dos dados.

ANÁLISES E RESULTADOS

Esta seção apresenta a análise dos resultados da avaliação diagnóstica aplicada aos participantes, focando nos conhecimentos sobre proporcionalidade. A interpretação dos dados, baseada nas categorias de Lesh, Post e Behr (1988) e no modelo MTSK (Carrillo *et al*., 2018), revela as manifestações do pensamento proporcional e suas implicações para a aprendizagem e aplicação da matemática.

Na letra a) da questão 1, esperava-se que os participantes interpretassem a proporcionalidade como uma relação entre partes – as quais podem ser quantidades ou conjuntos – através de uma das seguintes diferentes formas de comunicar o conceito de proporcionalidade identificadas por Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017): (i) Como uma razão constante entre duas partes, denotada por a/b = a:b (a está para b) (Ben-Chaim; Keret; Ilany, 2007); (ii) Como uma igualdade entre razões (sustentada pelo teorema de Tales), denotadas por a/b=-c/d (a está para b, assim como c está para d) (Imenes; Lellis, 2005); (iii) Como relações cujos elementos de um conjunto pudessem corresponder respectivamente aos elementos de outro conjunto, multiplicados ou divididos por uma constante, denotadas por uma função do tipo linear.

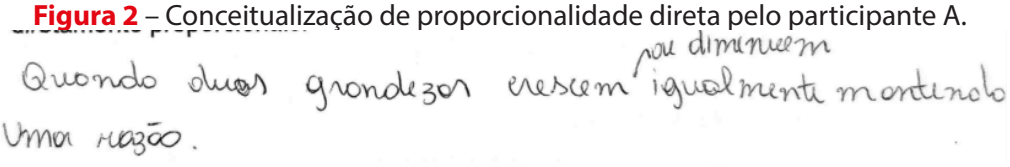
Já nas letras b) e c) dessa mesma questão, esperava-se que os participantes citassem a principal diferença entre uma relação proporcional direta e uma relação proporcional inversa. Uma forma seria, considerando o cenário (iii): tomando a grandeza como uma função da grandeza , dizemos que é diretamente proporcional à quando é uma função crescente de , e que se multiplicarmos por um número natural , o valor correspondente de também fica multiplicado por , enquanto numa relação inversamente proporcional, é uma função decrescente de e, ao multiplicarmos por um número natural , o valor correspondente de fica dividido por (Lima, 1988). Além disso, foi pedido que dessem exemplos de situações envolvendo cada um dos tipos de relação a fim de que pudéssemos evidenciar se eles conheciam o que as caracteriza.

Dito isso, a partir das análises dos questionários, tem-se que apenas um participante (A) fez referência à razão como pertinente a uma relação envolvendo proporcionalidade, cuja resposta à entrevista deu indícios de que conhece a proporcionalidade conforme o cenário (iii) (KoT – Definição), cujo foco está nas relações multiplicativas.

> **Pesquisadora:** *Na letra a) da questão 1, o que que tu quiseste dizer com "de modo semelhante? Quando tu colocas assim "quando duas grandezas se diferenciam de modo semelhante".*
> **Participante (A):** *Conforme elas são diretamente ou inversamente, elas vão crescer ou se dividir dependendo da* [faz sinal de aspas] *razão de proporcionalidade.*

Quanto ao entendimento sobre proporcionalidade direta e inversa, o participante manteve sua conceituação, detalhando os elementos que caracterizam cada tipo de relação e dando exemplos de situações pertinentes a elas (KoT – Fenomenologia e aplicações). Isso pode ser observado em sua resposta escrita ao questionário sobre proporcionalidade direta (Figura 2).

Figura 2 – Conceitualização de proporcionalidade direta pelo participante A.

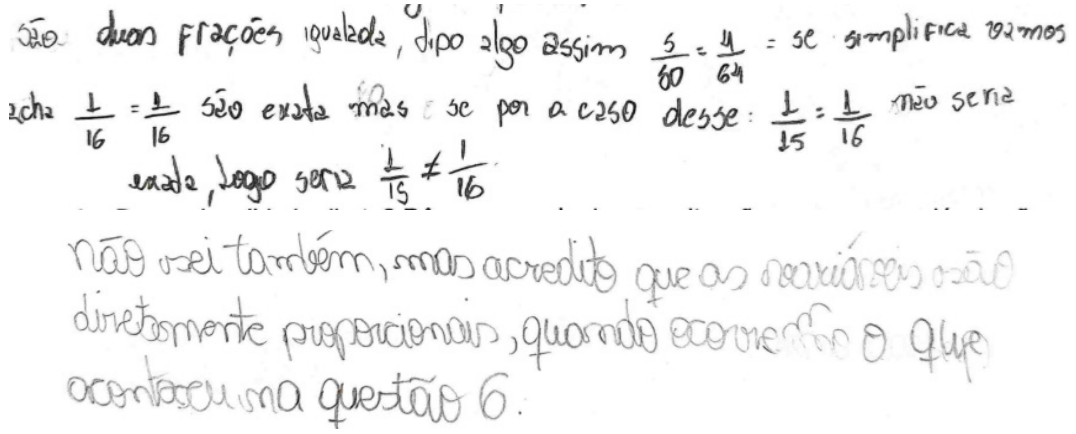


Fonte: dados da pesquisa.

Dessa forma, a ideia que esse participante tem sobre proporcionalidade vai ao encontro de Imenes e Lellin (2005, p. 20) quando afirmam que, no caso da proporcionalidade direta, "[...] generalizando, multiplica-se um valor de A por qualquer número K, o mesmo acontece com o valor correspondente de B" (KoT – Definição). Por outro lado, duas participantes (B e F), apesar de não conhecerem a definição de proporcionalidade, demonstraram ter a ideia de proporcionalidade essencialmente como uma igualdade entre frações (Figura 3) – ao invés de uma igualdade entre razões, como indica o cenário (ii) –, o que pode ser evidenciado também na fala de uma delas na entrevista quando diz:

> **Participante (B):** *O que que eu tinha pensado, quando era diretamente proporcional, né. Quando, por exemplo, no caso o numerador e o numerador eram o mesmo, e o denominador e o denominador também era o mesmo. Só que eu acho que não é. Mas aí foi só na base de achismo.*

Figura 3 – De cima para baixo, resposta à letra a) da questão 1 pela participante F e à letra b) da questão 1 pela participante B.

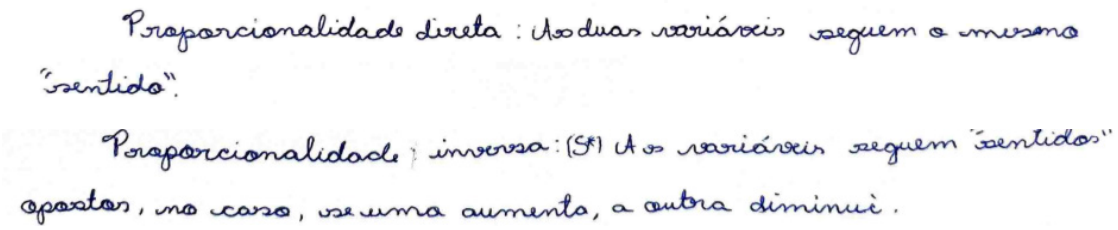


Fonte: dados da pesquisa.

Apesar da semelhança estrutural, a diferenciação entre os conceitos de fração e razão já vem sendo discutida na literatura. Abdounur (2019) observa que a proposição geométrica/musical A:B::C:D (notação de razão) é semanticamente distinta, mas estruturalmente similar à proposição aritmética A/B = C/D (notação de fração). Além disso, ver a razão apenas como uma fração pode levar a erros procedimentais, como alertam Onuchic e Allevato (2008), para que não se transponham as propriedades dos números racionais, como a soma de frações, para a soma de razões, quando realizadas como vetores, por exemplo. Dessa forma, essas respostas escritas e faladas relacionando a proporcionalidade à igualdade entre frações, e não entre razões, revelam uma fragilidade no KoT – Definição das participantes, cuja origem pode estar relacionada ao tratamento mecanizado priorizado no ensino de proporcionalidade (Oliveira; Cyrino, 2015). Tal abordagem relaciona esse conceito à notação de igualdade entre duas frações para posterior aplicação do procedimento de regra de três, sem apresentar o motivo de tal aplicação, deixando de estabelecer conexões entre as grandezas envolvidas.

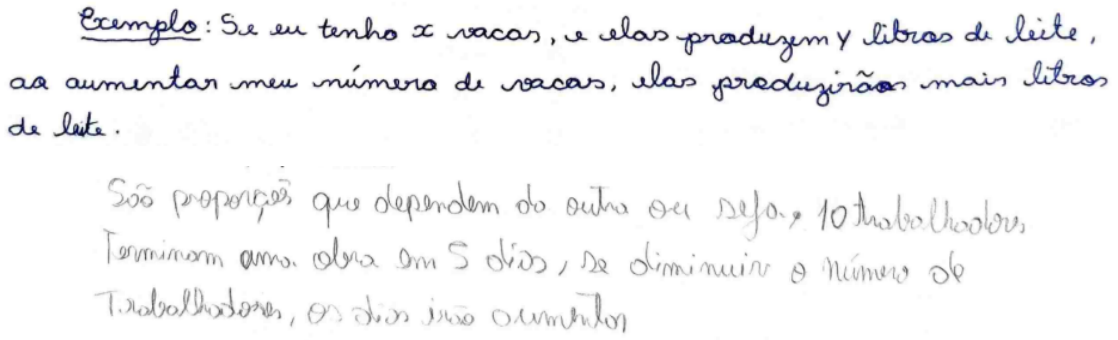
Prosseguindo com a análise das respostas, evidenciou-se uma compreensão que a literatura traz como recorrente no pensamento tanto de estudantes quanto de professores (Costa; Allevato, 2015; Galvão; Souza; Poggio, 2015; Onuchic; Allevato, 2015), isto é, a ideia de que quando se tem duas grandezas e ambas aumentam ou ambas diminuem, significa que existe situação de proporcionalidade (Costa; Allevato, 2015), ou seja, não há referência à constante de proporcionalidade, responsável por constituir tal relação como uma função linear, o que evidencia uma fragilidade no KoT – Definição. Esse fato pôde ser observado tanto a partir das suas respostas à definição de proporcionalidade e à diferenciação entre proporcionalidade direta e inversa – visto que atribuíram essa diferença apenas à "mudança de sentido" na relação (Figura 4) –, quanto pelos exemplos construídos (Figura 5), o que foi confirmado a partir de suas respostas às entrevistas.

Figura 4 – Resposta às letras b) e c) da questão 1 pela participante C.



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 5 – Exemplos construídos pela participante C para proporcionalidade direta e pelo participante E para proporcionalidade inversa, respectivamente.



Fonte: dados da pesquisa.

Participante (C): *Por exemplo um tanque tem um ralo, ele, sei lá, esvazia em 30 minutos. Se tiver mais de um, tiver dois, eu acho, talvez o tempo possa reduzir na metade.*
Pesquisadora: *Se tiver dois ralos, o tempo reduz à metade?*
Participante (C): *É.*
Pesquisadora: *Hum... esse é um ponto interessante. Ele aumenta, o outro diminui, beleza. Mas aí tem mais uma coisinha. Se tu tiveres dois ralos, tu disseste pra mim que o tempo diminui pela metade...*
Participante (C): *É, não, não sei se era pela metade, eu só...*
Pesquisadora: *Tu não tens certeza se era pela metade?*
Participante (C): *É, eu só imaginei assim pra tentar explicar, né, o inverso.*

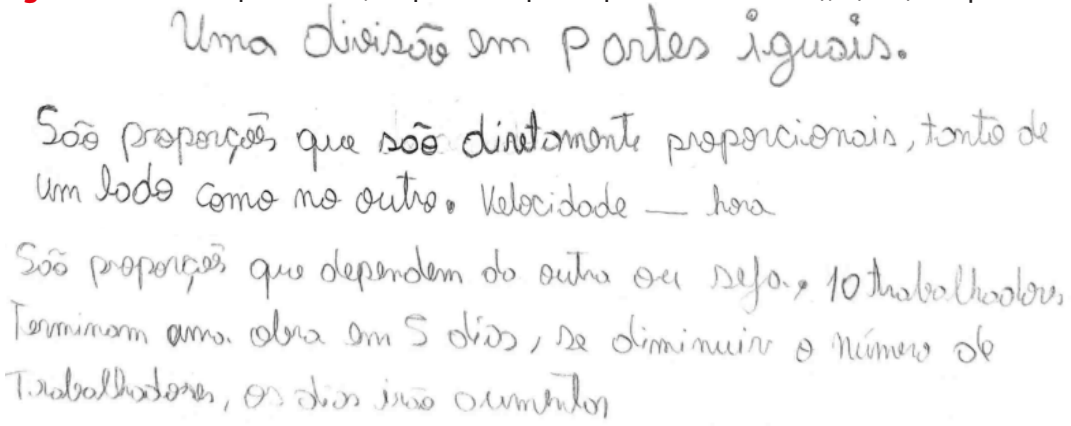
No trecho acima a participante C deu indícios de que sabia que grandezas inversamente proporcionais covariam segundo uma constante, embora ao final do diálogo afirme que foi apenas um valor aleatório, não sabendo se o resultado seria realmente aquele nem se havia "algo a mais" que caracterizasse uma relação inversamente proporcional além dos

"sentidos opostos" que seguem as grandezas, segundo trecho de sua resposta ao questionário (Figura 4), mostrando uma fragilidade no KoT–Definição.

Para Vergara, Estrella e Vidal-Szabó (2020), essas afirmações, apesar de insuficientes do ponto de vista da definição, são evidências da natureza qualitativa do pensamento dos participantes, isto é, um pensamento com base mais intuitiva e que se dá por meio do uso de linguagem informal, o qual se distingue do pensamento de natureza quantitativa, por este estar ancorado predominantemente na razão numérica e na identificação de relações proporcionais expressas por meio de propriedades matemáticas.

O participante E, ao tentar responder à questão 1, fez conceitualizações confusas e/ou circulares (Figura 6), demonstrando uma fragilidade no seu conhecimento, visto que a não-circularidade é um dos atributos essenciais à construção de uma definição (Escudero *et al*., 2014). Não obstante, quando solicitado que explicasse melhor o que havia pensado para cada alternativa, suas afirmações foram ao encontro do raciocínio dos participantes acima, ou seja, sem fazer referência à constante de proporcionalidade. Além do mais, percebeu o equívoco no seu exemplo de proporcionalidade direta, corrigindo que, na verdade, a relação velocidade-tempo é inversamente proporcional (KoT – Fenomenologia e aplicações), utilizando o argumento de que para percorrer um trecho em um intervalo de tempo menor, a velocidade precisa ser maior, o que caracterizaria uma relação proporcional inversa (apesar de esse argumento não ser suficiente para tal).

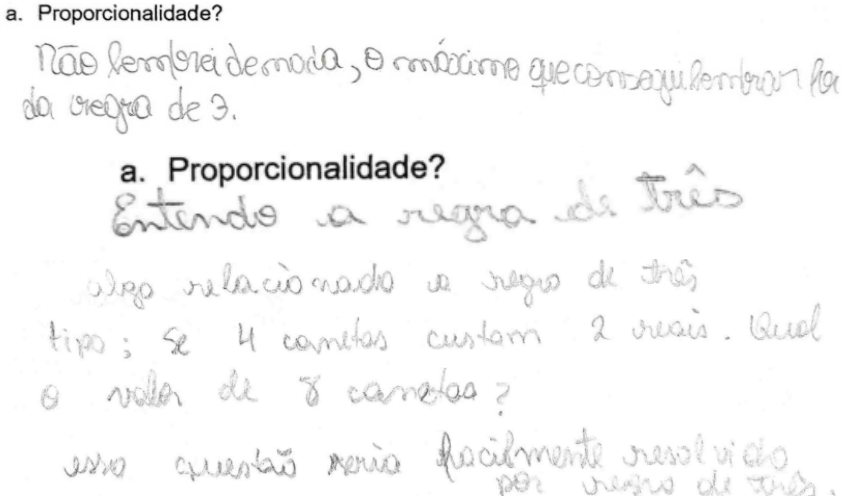
Figura 6 – De cima para baixo, resposta do participante E às letras a), b) e c) da questão 1.



Fonte: dados da pesquisa.

Por fim, três participantes (B, D e G) relacionaram proporcionalidade apenas à regra de três (Figura 7), demonstrando uma fragilidade no KoT – Definição e atestando, mais uma vez, o impacto de uma abordagem mecanizada com ênfase somente no procedimento de regra de três sem uma real compreensão do que se está a fazer (Lesh; Post; Behr, 1988; Schliemann; Carraher, 1997; Tinoco, 1996).

Figura 7 – De cima para baixo, resposta das participantes B e G à letra a) da questão 1 e da participante D à letra b) da questão 1.



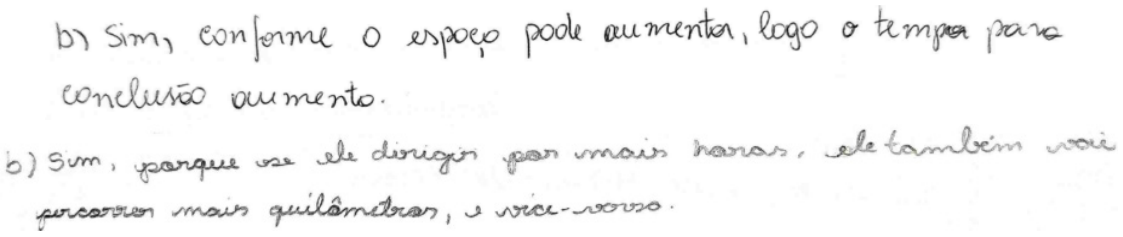
Fonte: dados da pesquisa.

Na questão 2, com respeito à identificação das grandezas envolvidas em cada situação que compõe a questão, apenas o participante A conseguiu identificá-las corretamente, além de que, a partir de sua resposta à entrevista, pôde-se evidenciar que ele conhece o conceito de grandeza e consegue defini-lo. Dos demais, dois identificaram a unidade de medida das grandezas ao invés das grandezas propriamente ditas (C e E), e os quatro restantes (B, D, F e G) não conseguiram identificá-las, seja porque não sabiam o que era grandeza ou porque não se recordavam do conceito. Esse cenário vai ao encontro do que evidencia o estudo de Rodrigues, França e Rodrigues (2024) quando mencionam as dificuldades dos estudantes participantes do seu estudo em identificar as grandezas e o tipo de relação entre elas, o que será percebido mais adiante. Segundo Lamon (2012), a análise e identificação da relação entre as grandezas numa relação proporcional é essencial para compreender sua natureza multiplicativa, assim como a covariação entre elas (Maranhão; Machado, 2011).

Com relação à identificação se o problema envolvia uma relação proporcional ou não, além da justificativa, cinco participantes afirmaram que havia sim uma situação envolvendo proporcionalidade, enquanto duas (participantes B e G) não responderam ao comando, afirmando não lembrarem o que era proporcionalidade, apesar de terem resolvido as situações. Esse resultado vai ao encontro do que apontam Galvão, Souza e Poggio (2015), ao observarem que os estudantes podem responder corretamente não por compreenderem o conceito de grandezas proporcionais, mas por dominarem procedimentos como a taxa unitária, a regra de três ou a decomposição em parcelas, sem relacioná-los à proporcionalidade.

Dos que responderam afirmativamente, os participantes A e C justificaram com o argumento de que quando uma das grandezas do problema aumenta, a outra também aumenta (Figura 8), o que é insuficiente para caracterizar uma situação de proporcionalidade, demonstrando uma fragilidade no conhecimento pertencente ao KoT – Fenomenologia e aplicações.

Figura 8 – De cima para baixo, justificativa do participante A e da participante C para caracterizar uma situação de proporcionalidade na questão 2.



Fonte: dados da pesquisa.

Essas justificativas mais uma vez afirmam a ideia incompleta de que quando se tem duas grandezas e ambas aumentam ou ambas diminuem, então há situação de proporcionalidade (Costa; Allevato, 2015). As participantes B e F, para justificarem o porquê de a situação envolver proporcionalidade, mobilizaram o seguinte raciocínio: como a situação permite o uso do procedimento regra de três, logo ela envolve uma relação de proporcionalidade, o que se pode retirar do seguinte trecho da entrevista com a participante F quando lhe foi solicitado que explicasse a sua resposta ao questionário:

> **Pesquisadora:** *[...] então tu pensaste assim: essa situação aqui consigo resolver com regra de três, então tem proporcionalidade?*
> **Participante (F):** *No começo, como eu tava tentando descobrir ainda o que era proporcionalidade, eu achei que era isso, aí tipo mais pra cá [aponta para as questões seguintes] que já foi desenvolvendo coisa, mas aqui no começo eu achava o que, que proporcionalidade era regra de três, eu achava isso.*

Por fim, o participante E justificou sua resposta afirmativa apenas com a frase "relação entre quilômetro e hora", e, quando solicitado que explicasse melhor seu pensamento, sua fala foi confusa e pouco esclarecedora:

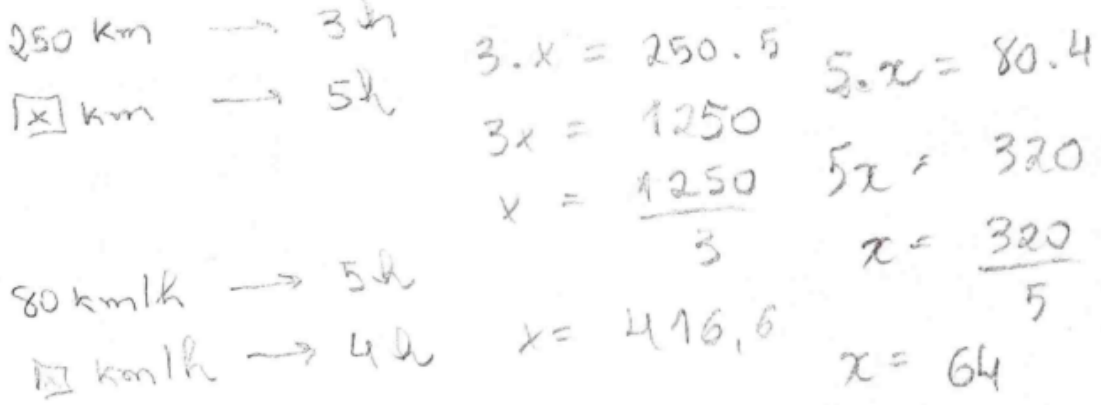
> **Participante (E):** *Bom, pelo que eu consegui extrair da questão, eu consegui entender que o que ele queria saber é mais ou menos qual seria a velocidade que ele percorreria em um trecho com uma hora maior, né, uma hora menor na verdade, então eu relacionei, fiz o cálculo, né, relacionei entre quilômetro, a velocidade e o tempo que ele ia percorrer, aí eu consegui, tipo, achei que seria essa relação de espaço-tempo.*

A fala acima corrobora com os estudos de Costa e Ponte (2008), visto que revela uma situação recorrente entre os participantes deste estudo, isto é, embora percebam as relações numéricas, eles têm dificuldades em explicar o raciocínio utilizado para resolver o problema, muitas vezes se valendo de argumentos confusos ou superficiais como "usei regra de três", sem realmente dar uma explicação que justifique o uso do procedimento. Esse cenário caracteriza uma fragilidade no KoT – Procedimentos, visto que os participantes mostram não conhecer as condições necessárias e suficientes para usar os algoritmos com os quais procederam, além de seus fundamentos matemáticos (por que eles são utilizados dessa maneira) – o que implica também uma consequente fragilidade na categoria que abrange o conhecimento relacionado às propriedades e seus fundamentos.

Já com respeito à resolução do problema, registramos três cenários. No primeiro cenário, quatro participantes (B, D, F e G) resolveram corretamente a primeira situação, que envolvia uma relação diretamente proporcional, fazendo uso do procedimento "regra de três" (KoT – Procedimentos). Entretanto, esses mesmos participantes, ao configurarem a proporção para usar a regra de três no segundo problema, não detectaram tratar-se de uma re-

lação inversamente proporcional e prosseguiram na resolução de forma análoga à primeira situação, chegando ao resultado 64 Km/h (Figura 9).

Figura 9 – Resolução da participante D à questão 2.

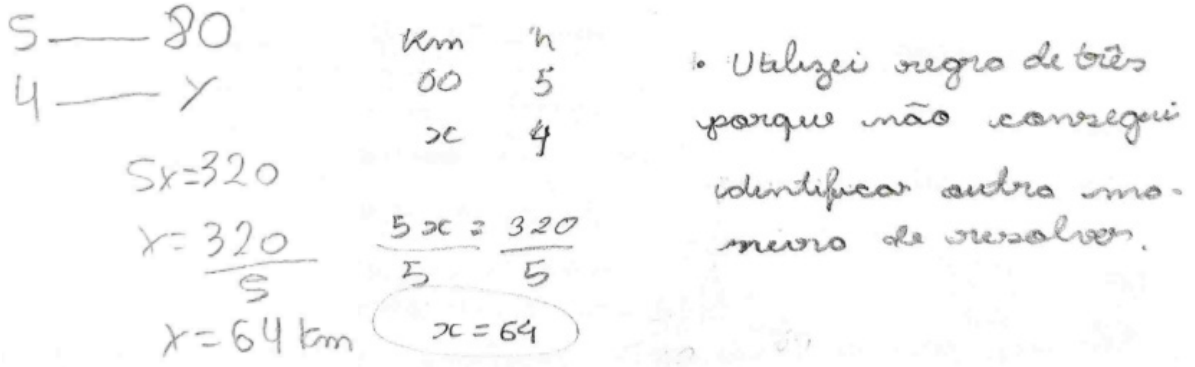


Fonte: dados da pesquisa.

A partir da resposta desses participantes, evidencia-se uma fragilidade no KoT – Definição (relacionado ao KoT – Fenomenologia e aplicações), visto que não conseguiram reconhecer situações que envolvem proporcionalidade direta ou inversa. Isso indica desconhecimento da diferença entre variáveis diretamente e inversamente proporcionais, bem como do impacto dessa distinção na estratégia de resolução do problema (KoT – Procedimentos), conhecimento considerado um dos descritores do pensamento proporcional (Maranhão; Machado, 2011). Esse fenômeno também se manifesta em suas próprias explicações, quando afirmam que a única diferença entre as duas situações está nas grandezas envolvidas – espaço-tempo e velocidade-tempo – sem perceber, entretanto, a diferença na relação entre elas, informação essencial para resolver a questão corretamente.

No segundo cenário, dois participantes (E e C), por falta de atenção na leitura do enunciado da segunda situação do problema, confundiram a grandeza velocidade com espaço e a resolveram como se envolvesse uma relação diretamente proporcional, resultando em 64 Km (Figura 10).

Figura 10 – Da esquerda para a direita, resolução dos participantes E e C à segunda situação da questão 2.



Fonte: dados da pesquisa.

Contudo, esclarecido o equívoco durante a entrevista, foi-lhes perguntando se percebem a diferença entre as duas situações, para o que respondem que uma envolvia uma relação diretamente proporcional (espaço-tempo) e a outra uma situação inversamente proporcional (velocidade-tempo) (KoT – Fenomenologia e aplicações), usando a justificativa

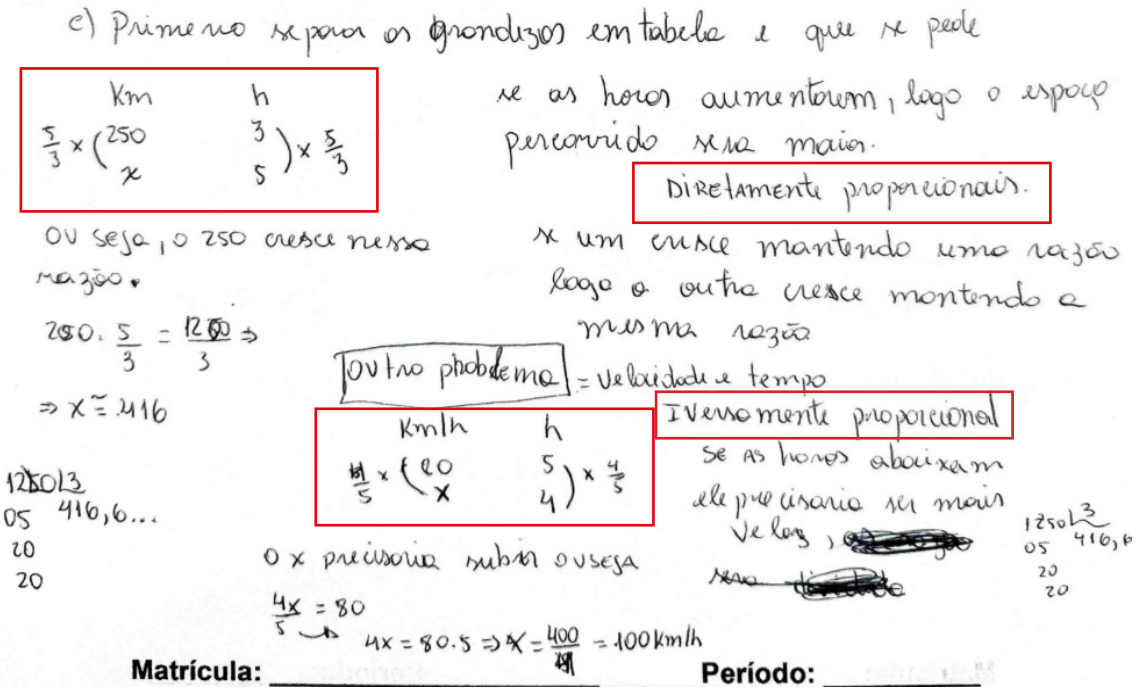
que se o tempo diminuiu, a velocidade vai ter que aumentar. No entanto, apesar dessa percepção, ambos afirmaram que isso não impactaria na sua forma de resolução, apenas que a unidade de medida mudaria para Km/h na resposta final.

> **Pesquisadora:** Ele disse que a 80 Km/h ele levará 5 horas pra percorrer um trajeto. Aí ele quer saber qual é a velocidade que ele teria que usar para percorrer esse mesmo trajeto em 4 horas. Ou seja, ele quer percorrer em menos tempo.
> **Participante (C):** Sim.
> **Pesquisadora:** A velocidade vai aumentar.
> **Participante (C):** Vai.
> **Pesquisadora:** Mas... tu achas que mudaria alguma coisa na tua resolução? Se tu tivesses visto certo a informação, tu achas que mudaria algo, ou não?
> **Participante (C):** Eu acho que não, porque mesmo se eu não percebesse antes, né, eu ia continuar botando isso aqui nos quilômetros e isso aqui nas horas, do jeito que eu fiz [apontando para a regra de três que utilizou].

Um ponto a destacar foi a falta de uma atitude crítica diante do resultado encontrado, pois, apesar de ambos verificarem que, como o tempo para percorrer o trecho diminuiu, então a velocidade terá de aumentar, nenhum questionou o fato de 64 Km/h, a velocidade encontrada, ser menor que 80 Km/h (a velocidade que consta no enunciado do problema). Essa ausência de questionamento demonstra a importância de estimular nos estudantes uma postura crítica, conforme destacam Allevato e Onuchic (2021), para que não apenas apliquem procedimentos mecânicos, mas reflitam sobre a coerência e plausibilidade dos resultados, desenvolvendo um entendimento mais profundo e significativo do problema.

O terceiro cenário é composto por um único participante (A) o qual, além de perceber a diferença entre as relações proporcionais presentes nas duas situações (KoT – Definição), resolveu-as corretamente. Durante a resolução, o participante A completou sua resposta sobre a identificação se o problema envolvia ou não uma relação proporcional (KoT – Fenomenologia e aplicações), justificou o porquê de esta ser diretamente ou inversamente proporcional, e qual o impacto disso na sua estratégia de resolução em ambas as situações (KoT – Propriedades e fundamentos) (Figura 11). Além disso, ele foi o único que não fez uso de regra de três para resolver a situação, mas sim da estratégia escalar (Spinillo, 1994) – proveniente da sua conceitualização de proporcionalidade citada anteriormente – através do qual descobriu o fator escalar, isto é, por quanto o valor inicial de uma grandeza foi multiplicado para chegar **à** nova quantidade, que será o mesmo valor pelo qual ele vai multiplicar (ou dividir, quando inversamente proporcional) o valor inicial da outra grandeza a fim de determinar o valor de (KoT – Procedimentos). No caso deste participante, na segunda situação, ao invés de multiplicar 80 por 5/4 para determinar o valor de , ele fez algo equivalente, que foi multiplicar o por 4/5 para chegar a 80, e sua justificativa para esse procedimento foi saber que o valor de seria maior que 80.

Figura 11 – Resolução do participante A à questão 1.

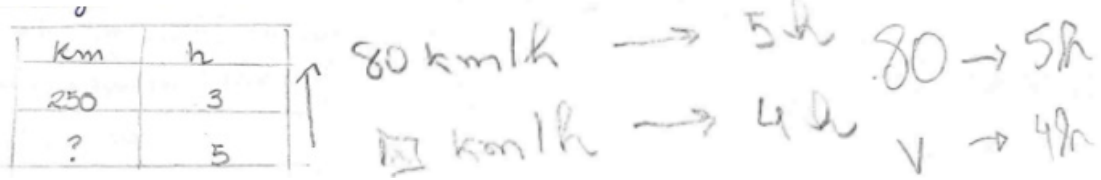


Fonte: dados da pesquisa.

Por fim, vale destacar que há diferentes modos de representação para relações proporcionais entre grandezas, como tabelas, gráficos, símbolos, desenhos e diagramas (Galvão; Souza; Poggio, 2015). Dito isso, chama-se a atenção para o esquema utilizado pelo participante A para expressar a relação proporcional entre as grandezas envolvidas (Figura 11), o qual é comumente empregado na resolução de problemas envolvendo proporcionalidade, consistindo em uma estrutura tabular simplificada, sem as linhas de grade, a qual na primeira linha contém as siglas das grandezas ou de suas respectivas unidades de medida, e, abaixo delas, os valores correspondentes (KoT – Registros de representação). A participante G representou as grandezas de maneira semelhante, porém mantendo a unidade de medida ao lado das quantidades, não em uma linha separada (KoT – Registros de representação). A participante C recorreu ao mesmo esquema, porém elaborando uma tabela mais estruturada (Figura 12), a qual também se configura como uma das formas de representação mais recorrentes para expressar relações proporcionais entre grandezas, por meio do ordenamento sistemático de seus valores (KoT – Registros de representação).

O registro dos demais participantes aproxima-se mais de um diagrama por conta do uso de setas para representar as relações entre as grandezas (KoT – Registros de representação), apesar de a maioria deles apresentarem-se incompletos visto a falta da unidade de medida de uma das grandezas, quando não das duas (Figura 12). Segundo Brabo (2020), o uso de setas para representar a variação entre grandezas em tarefas que envolvem proporcionalidade constitui um obstáculo didático, frequentemente reproduzido por professores que ainda não superaram essa prática nem desenvolveram formas mais adequadas de comunicar o conceito. Isso ocorre porque os estudantes tendem a associar as setas aos valores numéricos, e não às grandezas que elas representam.

Figura 12 – Da esquerda para a direita, esquemas da participante C e dos participantes D e B para a questão 2.



Fonte: dados da pesquisa.

Esses resultados sugerem tanto uma familiaridade prévia com certos formatos de representação quanto lacunas no domínio do conhecimento sobre registros matemáticos adequados e completos para o tratamento de situações envolvendo proporcionalidade. No Quadro 2 a seguir, apresentamos uma síntese dos conhecimentos especializados relacionados às categorias do KoT revelados a partir das respostas dos participantes do estudo a uma avaliação diagnóstica no contexto da proporcionalidade.

Quadro 2 – Conhecimento especializado revelado pelos participantes ao responderem a uma avaliação diagnóstica no contexto de proporcionalidade

Categorias do KoT	Indicadores de conhecimento	Participante						
		A	B	C	D	E	F	G
Definição, propriedades e fundamentos	Definição de proporcionalidade, proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa.	X						
	Por que duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais, e qual o impacto disso na estratégia de resolução.	X						
Fenomenologia e aplicações	Reconhecer a diferença entre situações proporcionais e não proporcionais;	X		X^i	X^i	X^i	X^i	
	Reconhecer situações que envolvem relações diretamente e inversamente proporcionais.	X		X^i		X^i		
Procedimentos	Estratégia escalar (E); Algoritmo de "regra de três" (R).	E	R	R	R	R	R	R
Registros de representação	Representação dos valores das grandezas em estrutura tabular simplificada (S). Representação dos valores em tabela (T). Representação dos valores em diagrama (D).	S	D	T	D	D	D	S

Fonte: elaborado pelos autores.

A maioria dos participantes revela um conhecimento predominantemente algorítmico com respeito à proporcionalidade. Apenas um deles fez uso de uma estratégia que não fosse a aplicação da regra de três, sendo este também o único que conseguiu identificar corretamente o tipo de relação proporcional presente em cada uma das duas situações que compunham a questão 2, justificando suas afirmações e a estratégia escolhida. Esse resultado vai ao encontro de Spinillo (1994) quando afirma que o nível de entendimento demonstrado pelos sujeitos ao utilizar essas estratégias varia: enquanto a estratégia escalar costuma ser aplicada com compreensão, a regra de três, embora amplamente ensinada no ambiente escolar, é muitas vezes empregada de maneira mecânica, sem a devida compreensão das relações que a fundamentam.

Além disso, não podemos afirmar com certeza que os participantes, com exceção de A, mobilizaram o conhecimento que os permite identificar uma situação proporcional, além de diferenciar situações que envolvem relações diretamente ou inversamente proporcio-

nais, visto suas definições incompletas e justificativas insuficientes. Por fim, mobilizaram o conhecimento de registros de representação tabular e diagramático para expressar os valores das grandezas envolvidas.

Por fim, identificamos algumas dificuldades encontradas pelos participantes com relação à proporcionalidade, que incluem: definição de proporcionalidade, proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa; relevância da constante de proporcionalidade; reconhecer situações diretamente e inversamente proporcionais; e variedade de estratégias que podem ser mobilizadas em problemas que envolvem proporcionalidade. Além disso, importante destacar a dificuldade dos participantes em justificar suas afirmações e o passo a passo de suas estratégias de resolução.

CONCLUSÕES

Esse estudo visa apresentar os resultados de uma avaliação diagnóstica realizada com professores de matemática em formação inicial, a fim de identificar o conhecimento matemático especializado revelado acerca do tópico proporcionalidade. De forma ampla, a aplicação deste questionário diagnóstico teve como objetivo investigar o conhecimento dos participantes com relação à resolução de diferentes categorias de problemas que dão sentido ao conceito de proporcionalidade. Além disso, buscamos reconhecer as variadas estratégias por eles utilizadas nesse processo, assim como verificar se os participantes revelam uma postura reflexiva ao selecionar abordagens adequadas para cada situação apresentada.

De modo geral, os dados evidenciam que o conhecimento dos participantes sobre proporcionalidade apresenta um caráter predominantemente algorítmico, tendo, em sua maioria, recorrido à regra de três para resolver o problema proposto. Dessa forma, nota-se uma baixa variedade de estratégias de resolução para problemas envolvendo proporcionalidade, salvo um dos participantes que fez uso da estratégia escalar para resolver tanto a situação que envolvia grandezas diretamente proporcionais quanto a que envolvia grandezas inversamente proporcionais. Além disso, apesar de problemas do tipo valor omisso serem os mais recorrentes quando se trata de proporcionalidade, todos os participantes que recorreram à regra de três enganaram-se durante resolução da segunda situação da questão 2, visto que não identificaram tratar-se de uma relação inversamente proporcional, ou seja, uma aplicação mecânica do algoritmo, sem uma análise prévia da relação entre as grandezas, impactou no sucesso da solução dos participantes.

Além disso, pôde-se observar que, com exceção de um dos participantes, os demais não apresentaram evidências claras de domínio conceitual que lhes permitisse identificar corretamente situações de proporcionalidade, bem como distinguir entre relações de proporcionalidade direta e inversa, o que ficou evidente pelas definições imprecisas e justificativas insuficientes apresentadas. Quanto aos esquemas para representar os valores das grandezas envolvidas e a relação entre elas, os participantes mobilizaram conhecimentos dos registros de representação tabular (formato completo e simplificado) e diagramático.

Quanto **à**s dificuldades observadas, as mais recorrentes referem-se à definição de proporcionalidade (direta e inversa), à compreensão da importância da constante de proporcionalidade para caracterizar uma relação proporcional, ao reconhecimento de diferen-

tes tipos de situações que envolvem proporcionalidade e à utilização de distintas estratégias para resolução de problemas desse campo, predominando métodos mecânicos e que não implicam uma compreensão conceitual da relação entre as grandezas envolvidas. Destaca-se também a fragilidade dos sujeitos ao justificar suas respostas e detalhar os procedimentos adotados durante a resolução das questões, expressando falas confusas ou incoerentes.

O recorte do questionário diagnóstico analisado neste estudo mostrou-se adequado para revelar o conhecimento matemático pertencente ao KoT dos professores em relação à proporcionalidade, mais especificamente com respeito a seu conhecimento conceitual e sobre estratégias de resolução de problemas do tipo valor omisso. Como encaminhamento para pesquisas futuras, recomenda-se investigar as dificuldades identificadas, visando desenvolver contextos formativos que promovam o desenvolvimento desse conhecimento matemático especializado e a superação das fragilidades aqui apontadas.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM) por meio do "Programa de Apoio à Pós-Graduação Stricto Sensu Posgrad/Fapeam/2024-2025".

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. O experimento de Pitágoras com o monocórdio: uma abordagem histórico-didática. CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS, 4., 2019, Campina Grande. **Anais**... Campina Grande: Realize Editora, 2019. p. 1-12. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57030. Acesso em: 20 mai. 2025.

ALLEVATO, Norma Suely; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2021.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BEN-CHAIM, David; KERET, Yaffa; ILANY, Bat-Sheva. Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Springer Netherlands, v. 10, p. 333-340, 2007. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-007-9052-x. Acesso em: 10 jun. 2025.

BIANCHINI, Barbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro de. **O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. 3. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2023.

BOYD, Donald J.; GROSSMAN, Pamela L.; LANKFORD, Hamilton; LOEB, Susanna; WYCKOFF, James. Teacher preparation and student achievement. **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 31, n. 4, p. 416–440, 2009.

BRABO, Madson Sanches. Obstáculos didáticos no ensino de regra de três: refletindo a prática docente. CONGRESSO ONLINE NACIONAL DE ENSINO DE QUÍMICA, FÍSICA, MATEMÁTICA E BIOLOGIA, 1., 2020, Goiânia. **Anais**... Goiânia: Cientus Educação, 2020. p. 1-3.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 jun. 2025.

BURGOS, María; BELTRÁN-PELLICER, Pablo; GIACOMONE, Belén; GODINO, Juan. Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. **Educação e Pesquisa**, v. 44, n. e182013, 2018. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; MONTES, Miguel; CONTRERAS, Luis; FLORES-MEDRANO, Eric, ESCUDERO-ÁVILA, Dinazar; VASCO, Diana; ROJAS, Nielka; FLORES, Pablo; AGUILAR-GONZÁLEZ, Álvaro; RIBEIRO, Miguel; MUÑOZ-CATALÁN, María Cinta. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

COSTA, Manoel dos Santos; ALLEVATO, Norma Suely. Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da Resolução de Problemas. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14., 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais**… República Dominicana: IACME, 2015, p. 141-152. Disponível em: https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/439/203. Acesso em: 04 out. 2025.

COSTA, Sara; PONTE, João Pedro da. O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico. **Revista da Educação**, v. 16, n. 2, p. 65-100, 2008. Disponível em: https://repositorio.ulisboa.pt/handle/10451/4074. Acesso em: 26 mai. 2025.

DARLING-HAMMOND, Linda. Teacher quality and student achievement. **Education Policy Analysis Archives**, v. 8, n. 1, 2000. https://doi.org/10.14507/epaa.v8n1.2000

FALVO, Silvia Rocha; JUCÁ, Rosineide Sousa. O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos anos iniciais. **Com a Palavra, o Professor**, v. 7, n. 18, p. 135-152, 2022. Disponível em: http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/article/view/816. Acesso em: 10 jun. 2025.

ESCUDERO, Isabel María; GAVILÁN, José María; SÁNCHEZ-MATAMOROS, Gloria. Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 1, p, 7-32, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/260944281_Una_aproximacion_a_los_cambios_en_el_discurso_matematico_generados_en_el_proceso_de_definir. Acesso em: 08 out. 2025.

FUENTES LEAL, Christian Camilo**. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la proporcionalidad: un estudio de caso**. 2020. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias y Filosofía). Departamento de Didácticas Integradas, Universidad de Huelva, Huelva, 2020. Disponível em: https://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/

handle/10272/19324/El_conocimiento_especializado_del_profesor.pdf?sequence=2. Acesso em: 10 jun. 2025.

GALVÃO, Maria Elisa; SOUZA, Vera Helena; POGGIO, Ana Maria. Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14., 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais**… República Dominicana: IACME, 2015, p. 175-186.

HILL, Heather C.; CHIN, Mark. Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. **American Educational Research Journal**, v. 55, n. 5, p. 1076-1112, 2018. https://doi.org/10.3102/0002831218769614

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma crítica da crítica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 18, n. 24, p. 1-30, 2005. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10510/6913. Acesso em: 10 jun. 2025.

LAMON, Susan J. Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In: LESTER, F. (Ed.) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Volume 1.** Information AGE, 2016. p. 629-667.

LAMON, Susan J. **Teaching fractions and ratios for understanding:** essential content knowledge and instructional strategies for teacher. New York: Routledge, 2012. https://doi.org/10.4324/9781003008057

LESH, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.) **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118. Disponível em: https://www.yumpu.com/pt/document/read/34041654/lesh-post-behr-raciocinio-proporcional-pt-pdf. Acesso em: 10 jun. 2025.

LIMA, Elon Lages. Grandezas Proporcionais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1987, PUC-São Paulo. **Anais**... São Paulo: Atual Editora LTDA, 1988. p. 27-44. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/eneml.pdf. Acesso em: 22 mai. 2025.

MA, Liping. **Knowing and teaching elementary mathematics**: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999. Disponível em: https://www.academia.edu/12089767/Knowing_and_Teaching_Elementary_Mathematics. Acesso em: 04 out. 2025.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; SPINILLO, Alina Galvão; LAUTERT, Sintria Labres. Raciocínio multiplicativo discutido a partir da resolução e formulação de problemas. REMATEC, v. 15, n. 36, p. 78-94, 2020. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/83. Acesso em: 09 mai. 2025.

MARANHÃO, Cristina; MACHADO, Silvia. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, v. 27, n. 1, p. 141-156, 2011. https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400010

MENDUNI-BORTOLOTI, R. D.; BARBOSA, J. C. A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 59, p. 947-967, 2017. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

OLIVEIRA, Laís Maria; CYRINO, Márcia Cristina. Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores de matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais**… Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 79-102, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/279495445_As_Diferentes_Personalidades_do_Numero_Racional_Trabalhadas_atraves_da_Resolucao_de_Problemas. Acesso em: 04 out. 2025.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely. Proporcionalidade através da resolução de problemas no curso superior de licenciatura em matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis, Brasil. **Anais**… Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.

POST, Thomas; BEHR, Merlyn; LESH, Richard. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

RODRIGUES, Síntia Paola; FRANÇA, Maria Eduarda; RODRIGUES, Renata Viviane. Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2024, Natal. **Anais**... Natal: SBEM, 2024. p. 1-15. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/498/341. Acesso em: 12 jun. 2025.

SCHELLER, Morgana; BONOTTO, Danusa. Estratégias de resolução de situação problema de modelagem matemática e o pensamento proporcional: um estudo com estudantes de pedagogia. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 16, n. 36, p. 197-223, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/7704/6331. Acesso em: 10 jun. 2025.

SCHLIEMANN, Analucia D.; CARRAHER, David. W. **Razões e Proporções na vida diária e na escola**. Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37, 1997. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/313846666_Razoes_e_proporcoes_na_via_diaria_e_na_escola. Acesso em: 10 jun. 2025.

SILVESTRE, Ana Isabel.; PONTE, João Pedro da. Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. **Interacções**, v. 8, n. 20, p. 70-97, 2012. Disponível em: https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/6556/1/12-Silvestre-Ponte%2520INTERACCOES.pdf. Acesso em: 10 jun. 2025.

SPINILLO, Alina Galvão. Raciocínio proporcional em crianças: considerações acerca de alternativas educacionais. **Revista Pro-Posições**, v. 5, n. 1, p. 109-114, 1994. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644341/11760. Acesso em: 10 jun. 2025.

STAKE, Robert Edward. **Pesquisa qualitativa:** estudando como as coisas funcionam. Tradução: Karla Reis. Porto Alegre: Penso, 2011.

STAKE, Robert Edward. **Qualitative case studies**. New York: Oxford University Press, 2005.

TINOCO, Lúcia A. A. **Razões e proporções**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática/UFRJ, 1996.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H. E CONFREY, J. (Ed.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59. Disponível em: https://archive.org/details/isbn_9780791417638. Acesso em: 10 jun. 2025.

Histórico

Recebido: 24 de junho de 2024.
Aceito: 04 de outubro de 2024.
Publicado: 06 de novembro de 2025.

Como citar – ABNT

RODRIGUES, Roberta dos Santos. Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de Matemática sobre o tópico proporcionalidade. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**, Belém/PA, n. 53, e2025018, 2025. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2025.n53.e2025018.id767

Como citar – APA

Sobrenome, A. A. (2025). Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de Matemática sobre o tópico proporcionalidade. ***Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC***, (53), e2025018. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2025.n53.e2025018.id767

CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO MOBILIZADO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO PENSAMENTO PROPORCIONAL

SPECIALIZED MATHEMATICAL KNOWLEDGE MOBILIZED IN SOLVING PROPORTIONAL THINKING PROBLEMS

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO MOVILIZADO EM LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DEL PENSAMIENTO PROPORCIONAL

Roberta dos Santos Rodrigues*
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9903-7644
Lattes: http://lattes.cnpq.br/8331834229348772

Francisco Eteval da Silva Feitosa**
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0913-3427
Lattes: http://lattes.cnpq.br/1820343517767978

RESUMO

A proporcionalidade constitui um conceito central da matemática escolar, articulando diferentes conceitos e estando presente em múltiplos contextos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Apesar de sua relevância, pesquisas indicam que estudantes e professores apresentam dificuldades persistentes tanto na identificação de situações proporcionais quanto na compreensão das relações entre grandezas envolvidas. Diante desse cenário, este estudo tem como objetivo investigar o conhecimento matemático mobilizado por licenciandos em Matemática na resolução de problemas do pensamento proporcional. A pesquisa, de abordagem qualitativa, baseia-se na análise de uma avaliação diagnóstica composta por problemas construídos a partir das tipologias propostas por Lesh, Post e Behr, enfatizando diferentes aspectos do pensamento proporcional. As estratégias de resolução e os conhecimentos evidenciados foram analisados à luz do modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), com foco no domínio Knowledge of Topics (KoT). Os resultados mostram que o reconhecimento da proporcionalidade esteve fortemente condicionado à familiaridade com problemas de valor omisso, enquanto situações com outras configurações apresentaram maiores índices de erro. Observou-se a predominância de estratégias procedimentais, especialmente a regra de três, indicando fragilidades na compreensão relacional da proporcionalidade. Os achados reforçam a necessidade de ampliar, na formação inicial, o repertório de situações e abordagens sobre proporcionalidade.

Palavras-chave: Formação Inicial de Professores. MTSK. Diagnóstico. Proporcionalidade. Estratégias.

ABSTRACT

Proportionality is a central concept in school mathematics, articulating different mathematical ideas and appearing in multiple everyday contexts as well as in other areas of knowledge. Despite its relevance, research indicates that both students and teachers experience persistent difficulties in identifying proportional situations and in understanding the relationships between the involved quantities. In this context, this study aims to investigate the mathematical knowledge mobilized by pre-service mathematics teachers when solving proportional thinking problems. This qualitative research is based

* Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Discente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM/UFAM), Manaus, Amazonas, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Genebra, 4, Qd. 25, bairro Planalto, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69045-380. E-mail: roberta.rodrigues@ufam.edu.br.

** Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM/UFAM), Manaus, Amazonas, Brasil. Endereço para correspondência: Av. das Oliveiras, 9, Novo Israel, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69039-205. E-mail: sfeitosa@ufam.edu.br.

on the analysis of a diagnostic assessment composed of problems constructed according to the typologies proposed by Lesh, Post, and Behr, emphasizing different aspects of proportional reasoning. The resolution strategies and the knowledge evidenced were analyzed through the lens of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model, with a focus on the Knowledge of Topics (KoT) domain. The results show that the recognition of proportionality was strongly conditioned by familiarity with missing-value problems, whereas situations with other configurations presented higher error rates. A predominance of procedural strategies, especially the rule of three, was observed, indicating weaknesses in the relational understanding of proportionality. These findings reinforce the need to broaden, in initial teacher education, the range of situations and approaches related to proportionality.

Keywords: Initial Teacher Instruction. MTSK. Diagnostic Assessment. Proportionality. Problem-Solving Strategies.

RESUMEN

La proporcionalidad constituye un concepto central de la matemática escolar, ya que articula distintos conceptos y está presente en múltiples contextos de la vida cotidiana y de otras áreas del conocimiento. A pesar de su relevancia, las investigaciones indican que estudiantes y profesores presentan dificultades persistentes tanto en la identificación de situaciones proporcionales como en la comprensión de las relaciones entre las magnitudes involucradas. En este contexto, el presente estudio tiene como objetivo investigar el conocimiento matemático movilizado por futuros profesores de Matemática en la resolución de problemas del pensamiento proporcional. La investigación, de enfoque cualitativo, se basa en el análisis de una evaluación diagnóstica compuesta por problemas construidos a partir de las tipologías propuestas por Lesh, Post y Behr, enfatizando distintos aspectos del pensamiento proporcional. Las estrategias de resolución y los conocimientos evidenciados fueron analizados desde el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), con énfasis en el dominio Knowledge of Topics (KoT). Los resultados muestran que el reconocimiento de la proporcionalidad estuvo fuertemente condicionado por la familiaridad con problemas de valor faltante, mientras que las situaciones con otras configuraciones presentaron mayores índices de error. Se observó una predominancia de estrategias procedimentales, especialmente la regla de tres, lo que indica debilidades en la comprensión relacional de la proporcionalidad. Los hallazgos refuerzan la necesidad de ampliar, en la formación inicial, el repertorio de situaciones y enfoques relacionados con la proporcionalidad.

Palabras clave: Formación Inicial del Profesorado. MTSK. Evaluación Diagnóstica. Proporcionalidad. Estrategias de Resolución de Problemas.

1 INTRODUÇÃO

O pensamento proporcional constitui um eixo central da Educação Matemática, pois sustenta a compreensão de conceitos fundamentais, como razão, porcentagem, escalas e funções lineares, e desempenha papel relevante em aplicações em diferentes áreas das ciências. Trata-se de um conhecimento conceitualmente complexo, que envolve a coordenação de relações multiplicativas, a interpretação de razões em distintos registros de representação e a mobilização de variadas estratégias de resolução (Oliveira, 2009).

Nesse sentido, Lesh, Post e Behr (1988) evidenciam que o pensamento proporcional se manifesta por meio de distintos tipos de problemas: valor omisso, comparação, transformação, média, conversão, envolvendo unidades de medida e números e translação. Tais classes de

problemas destacam diferentes dimensões da proporcionalidade e das formas de mobilização do pensamento proporcional (Falvo; Jucá, 2022) e exigem mais do que a aplicação de procedimentos, demandando a compreensão da relação multiplicativa subjacente entre as grandezas envolvidas, componente crítica das situações proporcionais (Cramer; Post; Currier, 1993).

Contudo, apesar de sua relevância e complexidade, pesquisas apontam que a proporcionalidade é frequentemente ensinada de forma mecanizada, privilegiando procedimentos em detrimento da compreensão conceitual (Lamon, 2020). Ser capaz de realizar operações com proporções não implica necessariamente compreender o pensamento proporcional subjacente, pois "não podemos definir um pensador proporcional como alguém que simplesmente conhece como construir e resolver uma proporção" (Cramer; Post; Currier, 1993, p. 2). Essa ênfase procedimental também se reflete na predominância de problemas de valor omisso nas práticas de ensino e avaliação, o que pode levar à substituição do pensamento proporcional por manipulações mecânicas, sem garantia de compreensão das ideias subjacentes (Hoffer, 1988; Lesh; Post; Behr, 1988).

Além disso, estudos indicam que tais dificuldades não se restringem aos estudantes, mas também estão presentes entre professores em formação e em exercício (Burgos et al., 2018), decorrente da frequente aplicação automática e sem reflexão de procedimentos algorítmicos, sem refletir sobre sua adequação à situação em questão (Post; Behr; Lesh, 1995), comprometendo tanto a aprendizagem quanto o desenvolvimento profissional docente. Dito isso, considerando que o professor exerce papel central na aprendizagem dos estudantes (Hill; Chin, 2018), torna-se essencial investigar como futuros professores mobilizam seus conhecimentos sobre proporcionalidade, bem como identificar as concepções e lacunas que ainda se manifestam nesse processo.

Diante desse cenário, o presente estudo busca responder a seguinte questão: Que conhecimentos matemáticos especializados revelam professores de Matemática em formação inicial a partir de uma avaliação sobre proporcionalidade. Para tanto, delineamos como objetivo analisar as estratégias de resolução empregadas pelos participantes em diferentes tipos de problemas no âmbito da proporcionalidade, identificando tanto os conhecimentos evidenciados quanto as dificuldades conceituais que emergem durante a resolução das tarefas.

2 REFERÊNCIAL TEÓRICO

Nesta seção, apresentamos uma visão geral o modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018), que será utilizado como ferramenta para a análise dos conhecimentos manifestados pelos professores participantes desta pesquisa. Além disso, articulamos o objeto matemático foco do estudo com o modelo, de modo a situá-lo na perspectiva do MTSK e a evidenciar as relações entre o conceito e o subdomínio do conhecimento docente investigado.

O MTSK é um modelo teórico-analítico sobre o conhecimento profissional que é específico de professores de Matemática e possui três domínios: *Mathematical Knowledge* (MK), que trata do conhecimento da matemática como uma disciplina científica dentro de um contexto educacional, *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), constituído pelos conhecimentos do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo matemático e *Beliefs*, que compreende as crenças a respeito da Matemática e de seu ensino e aprendizagem.

Em função do recorte assumido neste estudo, a discussão concentra-se exclusivamente no subdomínio KoT, o qual diz respeito ao domínio aprofundado do conteúdo matemático propriamente dito, envolvendo a compreensão de seus significados, com um grau de profundidade, organização e estruturação superior àquele esperado dos estudantes (Ma, 2010). Esse subdomínio é constituído por quatro categorias, as quais são descritas a seguir.

A categoria *Definições, propriedades e fundamentos* refere-se ao conhecimento do professor acerca de como escolher conjuntos apropriados de propriedades para caracterizar e definir os objetos matemáticos (Carrillo et al., 2018). Nesse sentido, envolve conhecer, por exemplo, as diferentes formas de apresentar a proporcionalidade: como uma razão constante entre duas partes; como uma igualdade entre razões, ou como relações cujos elementos de um conjunto pudessem corresponder respectivamente aos elementos de outro conjunto, multiplicados ou divididos por uma constante (Menduni-Bortoloti; Barbosa, 2017).

A categoria *Fenomenologia e aplicações* diz respeito à capacidade do professor de reconhecer e mobilizar diferentes contextos nos quais a proporcionalidade pode ser explorada, favorecendo a compreensão do conceito e a atribuição de sentido às ideias matemáticas envolvidas, inclusive aquelas vinculadas à sua construção histórica e conceitual (Carrillo et al., 2018). Isso inclui, por exemplo, o conhecimento sobre os diferentes tipos de problemas que dão sentido à proporcionalidade (Lesh; Post; Behr, 1988). Além disso, essa categoria envolve o domínio das possibilidades de aplicação desse conteúdo, como na Física.

A categoria *Registros de representação* refere-se ao conhecimento acerca das múltiplas formas de expressar ideias matemáticas, processos e procedimentos, por meio de diferentes sistemas de representação, tais como expressões algébricas, aritméticas, gráficas, diagramas,

tabelas e linguagem verbal. Esse domínio inclui, ainda, o uso adequado da notação matemática e da terminologia associada a cada tipo de registro (Carrillo et al., 2018). Nesse sentido, contempla a habilidade de expressar uma razão utilizando distintos registros, como frações, representações tabulares ou gráficas.

A categoria *Procedimentos* refere-se ao conhecimento do professor sobre diferentes algoritmos, tanto usuais quanto alternativos, incluindo sua execução, adequação às situações propostas e os princípios matemáticos que os sustentam, em articulação com definições e propriedades dos conceitos envolvidos (Carrillo et al., 2018). Nessa categoria, insere-se, por exemplo, a capacidade de discernir a estratégia mais adequada a ser adotada em função das configurações do problema apresentado.

3 METODOLOGIA

Este estudo é um recorte de uma pesquisa maior no nível de mestrado acadêmico desenvolvida sob uma perspectiva qualitativa (Stake, 2011) com um enfoque teórico interpretativo sobre a mobilização do conhecimento matemático especializado de professores de matemática em Formação Inicial. Além disso, trata-se de estudo de caso instrumental (Stake, 2005), visto que o caso foi escolhido com a expectativa de que contribua para uma melhor compreensão de um contexto mais amplo, isto é, o conhecimento matemático especializado do professor para o ensino de proporcionalidade.

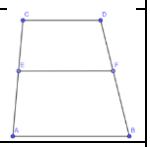
Os participantes deste estudo foram sete professores de matemática em formação inicial, cursando o 3º período (2º ano) da Licenciatura em Matemática em uma universidade pública no Amazonas. Todos são bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID e estagiam em escolas da rede pública de ensino da capital do estado, quatro em turmas de 7º e 8º ano (12 e 13 anos) e três em turmas de Ensino Médio (15 a 17 anos). Todos os participantes assinaram o TCLE e a pesquisa foi aprovada no Comitê de Ética sob o número 7.338.059.

Esse recorte foi desenvolvido em dois encontros. No primeiro, com duração de três horas, aplicamos um questionário exploratório com o objetivo de aceder ao conhecimento do professor sobre o tópico de proporcionalidade, atentando, principalmente, à dimensão do KoT dos futuros professores, e o usaremos para obter um panorama desses conhecimentos antes de a fim de estabelecer um ponto de partida para as discussões a serem efetuadas futuramente. No segundo encontro, para enriquecer nossas análises, fizemos uso de entrevista semiestruturada (Minayo, 2014) tendo em vista o aprofundamento das respostas e o esclarecimento de dúvidas,

contribuindo, dessa forma, para uma visão mais ampla do fenômeno estudado, isto é, o conhecimento do professor.

O questionário era composto por nove questões, sendo uma conceitual enquanto as demais eram problemas formulados segundo as sete categorias de problemas envolvendo o pensamento proporcional (Lesh; Post; Behr, 1988). Cada uma das questões possui uma intencionalidade específica relacionada com determinados conhecimentos que compõem as categorias do subdomínio KoT, o qual buscamos investigar. Neste trabalho são analisados sete problemas (Quadro 1), os quais estão descritos abaixo.

Quadro 1 - Problemas do Questionário Diagnóstico analisadas neste recorte.

Problema
1. Um canavial tem a forma de um quadrado com 60 metros de lado e um lavrador consegue ceifá-lo em 4 dias. Em quantos dias o mesmo lavrador ceifaria um canavial quadrado com 100 metros de lado?
2. Dona Iraci foi à feira comprar tucumã para o seu restaurante de café regional. Na primeira banca, 3 kg de tucumã saem por R$ 210,00, enquanto na segunda banca, 8 kg saem por R$ 640,00. Qual é a proposta de compra mais vantajosa para Dona Iraci?
3. A receita de cookies de dona Irlane pede 4 xícaras de farinha para fazer 24 cookies. O cozinheiro em treinamento contou errado e acabou colocando 5 xícaras na intenção de fazer 32 cookies. Ele colocou farinha demais ou de menos nos seus cookies?
4. Considere o trapézio ABDC de base maior com medida 6cm e base menor com medida 4cm. Qual é a medida do seguimento EF se os trapézios ABFE e EFDC são semelhantes? 
5. Dado que a razão entre o número de torcedores do boi caprichoso e o número de torcedores do boi garantido no Bumbódromo de Parintins é de 15 para 12, os torcedores do boi caprichoso representam que fração do número de torcedores presentes no Bumbódromo?
6. Uma lancha faz o percurso Itacoatiara – Manaus com uma velocidade média de 20 m/s. Se a distância percorrida pela lancha entre os dois municípios é de cerca de 216 km, depois de quantas horas da partida do porto de Itacoatiara a lancha aportará em Manaus?
7. Mateus tem o costume de fazer caminhadas no parque próximo a sua casa todo final de semana. Sabendo que ele caminha 9 quilômetros em 3 horas, qual a razão, nessa situação, entre quilômetro e hora? (Expresse essa razão de pelo menos duas formas distintas).

Fonte: Produção do autor.

Para podermos acessar uma maior gama de manifestações do conhecimento dos participantes, para cada um dos problemas seguintes, eles foram orientados a: identificar as grandezas envolvidas na situação; dizer se há uma situação de proporcionalidade envolvida e, se houver, justificar o porquê; resolver o problema proposto, explicando o seu raciocínio e descrevendo o processo que usaram para resolver o problema através de esquemas, palavras, cálculos etc.

O problema 1 (Lima, 2006), pertence à categoria Problema de Valor Omisso (Lesh; Post; Behr, 1988) e visa aceder ao conhecimento da distinção entre situações proporcionais e não proporcionais (KoT – Fenomenologia e aplicações), visto que a correspondência

$$\text{(medida do lado)} \mapsto \text{(número de dias)}$$

não representa uma situação de proporcionalidade. Na verdade, a proporcionalidade está presente na relação entre o número de dias para a ceifa e a área de plantação, que no caso seriam 3.600m² e 10.000m². Além disso, almejamos aceder também ao conhecimento das diferentes estratégias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos), como por exemplo, a busca pelo valor unitário (KoT – Procedimentos), ou seja, descobrir quantos dias o lavrador leva para ceifar 1m² de plantação, para então descobrir quantos dias ele levaria para ceifar os 10.000m² necessários à situação.

O segundo problema pertence à categoria Problema de comparação (Lesh; Post; Behr, 1988) e visa aceder ao conhecimento das diferentes estratégias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos), nesse caso, por exemplo, o de usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade (KoT – Procedimentos) e o de fazer comparações numéricas – envolvendo os números racionais – e não numéricas (KoT – Procedimentos).

O problema 3 pertence à categoria Problema de transformação (Lesh; Post; Behr, 1988) e visa aceder ao conhecimento de usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade ao trabalhar com proporcionalidade (KoT – Procedimentos), de fazer comparações numéricas – envolvendo os números racionais – e não numéricas (KoT – Procedimentos), do uso da ideia de covariação (KoT – Propriedades) e das diferentes estratégias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos), além de investigar também o conhecimento a respeito dos contextos que possuem a proporcionalidade como característica intrínseca (KoT – Fenomenologia e aplicações), como é o caso de receitas culinárias, cujas quantidades de ingredientes variam proporcionalmente.

O problema 4 (Bianchini; Lima, 2023) pertence à categoria Problema de média (Lesh; Post; Behr, 1988) e visa aceder ao conhecimento de usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade ao trabalhar com proporcionalidade (KoT – Procedimentos) e da estratégia Obtenção do valor médio (Scheller; Bonotto, 2020) utilizada para resolver esse tipo de problema envolvendo proporcionalidade (KoT – Procedimentos). Além disso, visa investigar também o conhecimento a respeito dos contextos que envolvem a proporcionalidade dentro da própria matemática, como quando a situação envolve figuras semelhantes (KoT – Fenomenologia e aplicações).

O quinto problema pertence à categoria Problema de conversão (Lesh; Post; Behr, 1988) e visa aceder ao conhecimento de, ao trabalhar com proporcionalidade, fazer comparações numéricas – envolvendo os números racionais – e não numérica e de outras diferentes estratégias (KoT - Procedimentos), como a estratégia *Between* (comparação entre razões parte-

parte) e *Within* (comparação entre razões parte-todo), conforme descritas por Noelting (1980).

O sexto problema pertence à categoria Problemas envolvendo unidades de medida e números (Lesh; Post; Behr, 1988) e visa aceder ao conhecimento, além da relação entre os números, da relação entre as unidades m/s e km/h, de usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade ao trabalhar com proporcionalidade (KoT – Procedimentos) e de outras diferentes estratégias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos).

O problema 7 (Bianchini; Lima, 2023) pertence à categoria Problemas de translação (Lesh; Post; Behr, 1988) e visa aceder ao conhecimento das diferentes formas de representar uma razão (KoT – Registros de representação), de usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade ao trabalhar com proporcionalidade (KoT – Procedimentos) e do uso da ideia de covariação (KoT – Propriedades).

Os dados foram analisados por meio da técnica de análise de conteúdo (Bardin, 2011), desenvolvida em três etapas: pré-análise, com organização do corpus e leitura flutuante das produções escritas e entrevistas; exploração do material, envolvendo codificação e categorização dos dados a partir de categorias teóricas do KoT; e tratamento, inferência e interpretação, em que os resultados foram analisados à luz dos objetivos da pesquisa, visando identificar padrões e lacunas no conhecimento matemático especializado dos participantes.

4 ANÁLISE E RESULTADOS

Nesta seção, são discutidos os resultados da avaliação diagnóstica realizada com os participantes, com ênfase nos conhecimentos relacionados à proporcionalidade. A análise dos dados, fundamentada nas categorias propostas por Lesh, Post e Behr (1988) e nas categorias do KoT, evidencia diferentes manifestações do pensamento proporcional.

Com relação a identificação das grandezas envolvidas na relação proporcional em cada problema, o Quadro 2 permite observar uma diversidade de respostas que evidenciam o nível de compreensão de cada participante (os quais estão indicados por uma letra do alfabeto de A a G).

Quadro 2 – Resposta dos participantes à identificação das grandezas em cada problema.

Participante	**Grandezas identificadas**						
	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**
A	Espaço e tempo	Massa e dinheiro	Quantidade de farinha e	-	-	Velocidade e tempo	-

			quantidade de cookies				
B	-	-	-	-	-	-	-
C	Metros e dias	Quilos e reais	Xícaras e cookies	Bases	-	-	Quilômetro e hora
D	-	-	-	-	-	-	-
E	Metros e dias	Relação entre Kg de tucumã e o valor dele	Xícaras e cookies	-	-	Quilômetro e hora	-
F	Canavial	Tucumãs	-	-	-	-	-
G	-	-	-	-	-	-	-
Resposta correta	Área (m²) e tempo (dias)	Massa (kg) e valor (R$)	Quantidade de farinha (xícaras) e quantidade de cookies (un)	Comprimento dos segmentos (cm)	Quantidade de torcedores (un)	Distância (km) e tempo (h)	Distância (km) e tempo (h)

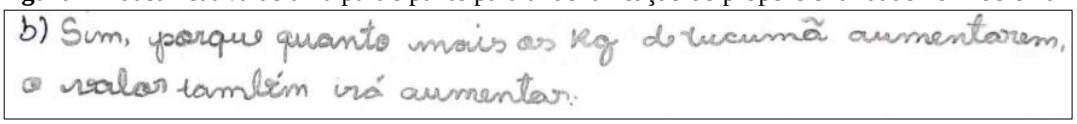
Fonte: Dados da pesquisa.

De modo geral, a análise da identificação das grandezas ao longo dos diferentes problemas revela fragilidades conceituais recorrentes entre os participantes. Em vários problemas, os participantes demonstraram desconhecimento do próprio conceito de grandeza ou confundiram-no com unidades de medida, recorrendo a termos como metros, dias, quilos, reais, quilômetros ou horas em lugar das grandezas correspondentes. Também foram frequentes respostas baseadas em elementos contextuais ou termos genéricos, sem explicitação das relações quantitativas, o que revela dificuldades na compreensão conceitual dos objetos matemáticos subjacentes às situações de proporcionalidade. Esses resultados se articulam aos achados de Rodrigues, França e Rodrigues (2024), ao apontarem que dificuldades dessa natureza tendem a persistir na resolução de diferentes tipos de problemas envolvendo proporcionalidade.

Além disso, observaram-se equívocos na distinção entre grandezas fundamentais e derivadas, como nos casos em que a velocidade foi tratada como grandeza independente, quando, sob a perspectiva do pensamento proporcional, atua como constante de proporcionalidade no contexto do respectivo problema. As informações do quadro permitem observar ainda que as dificuldades na identificação das grandezas se intensificam nos problemas associados a categorias menos exploradas em sala de aula e, consequentemente, menos familiares aos participantes. De modo geral, a identificação inadequada das grandezas comprometeu não apenas a compreensão das relações envolvidas, mas também o reconhecimento do caráter proporcional das situações, como descreveremos a seguir.

Com respeito à identificação se os problemas envolviam ou não uma relação proporcional, a análise das respostas evidencia fragilidades recorrentes, associadas principalmente a uma compreensão restrita do conceito, fortemente ancorada em procedimentos algorítmicos. Em diversos problemas, os participantes afirmaram a existência de proporcionalidade com base em um raciocínio de caráter qualitativo (Vergara; Estrella; Vidal-Szabó, 2020), isto é, o crescimento de uma das grandezas acarretaria o crescimento da outra (Figura 1), o que revela uma compreensão limitada do conceito, uma vez que a simples covariação não caracteriza, por si só, uma relação proporcional.

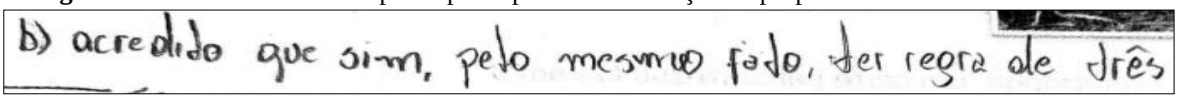
Figura 1 – Justificativa de uma participante para a identificação de proporcionalidade no Problema 2.



Fonte: Dados do estudo.

Em outros casos, afirmaram a presença da proporcionalidade com base na possibilidade de aplicação da regra de três (Figura 2), invertendo a relação de causalidade entre conceito e procedimento, ou seja, o critério utilizado para caracterizar a proporcionalidade não se apoia na análise das grandezas e de sua variação, mas exclusivamente na familiaridade com um método algorítmico.

Figura 2 – Justificativa de uma participante para a identificação de proporcionalidade no Problema 1.



Fonte: Dados do estudo.

Observa-se ainda que as dificuldades se tornam mais evidentes à medida que os problemas se afastam da estrutura convencional dos problemas de valor omisso: "A/B = C/D no qual três valores são conhecidos (incluindo um par completo) e o objetivo é encontrar a parte omissa da segunda (e equivalente) razão" (Lesh; Post; Behr, 1988, p. 4). Nos casos de comparação de razões, razões internas ou situações envolvendo conversão entre unidades de medidas, a proporcionalidade foi negada pelos participantes justamente por eles não apresentarem a estrutura típica de problema de valor omisso, o que revela uma associação quase exclusiva do conceito à equivalência direta entre razões formalizadas. Todos esses posicionamentos indicam fragilidades no KoT – Fenomenologia e aplicações, uma vez que o reconhecimento da proporcionalidade não se apoia na análise da natureza da relação entre as

grandezas, mas na familiaridade com formatos e métodos tradicionalmente trabalhados em sala de aula.

Nesses contextos, mesmo quando os participantes mobilizam estratégias características do pensamento proporcional – como a comparação de valores unitários ou a equivalência entre razões –, nem sempre reconhecem a situação como proporcional. Em contrapartida, em poucos casos, como no Problema 7, nota-se um avanço conceitual no raciocínio de um participante, no qual a proporcionalidade passa a ser identificada a partir da igualdade entre razões, ainda que fortemente apoiada em procedimentos simbólicos (Quadro 3). Esse movimento sugere uma ampliação progressiva, embora incipiente, do KoT – Fenomenologia e aplicações, ao passo que os participantes passam a atribuir significado à estrutura relacional das situações, mesmo sem explicitá-la plenamente em termos das grandezas envolvidas.

Quadro 3 – Justificativa do participante à presença de proporcianalidade no Problema 7.

Ah, por causa que eu simplifiquei aqui, ó. Tá vendo que eu simplifiquei a primeira razão [9/3]. Aí ela deu 1 sobre 3 certinho [1/3]. Aí eu falei, "pô...". Aí foi quando eu tava já começando a entender mais ou menos, se eu simplifiquei aqui e deu isso aqui, então é proporcionalidade, porque uma razão é igual a outra.

Fonte: Dados do estudo.

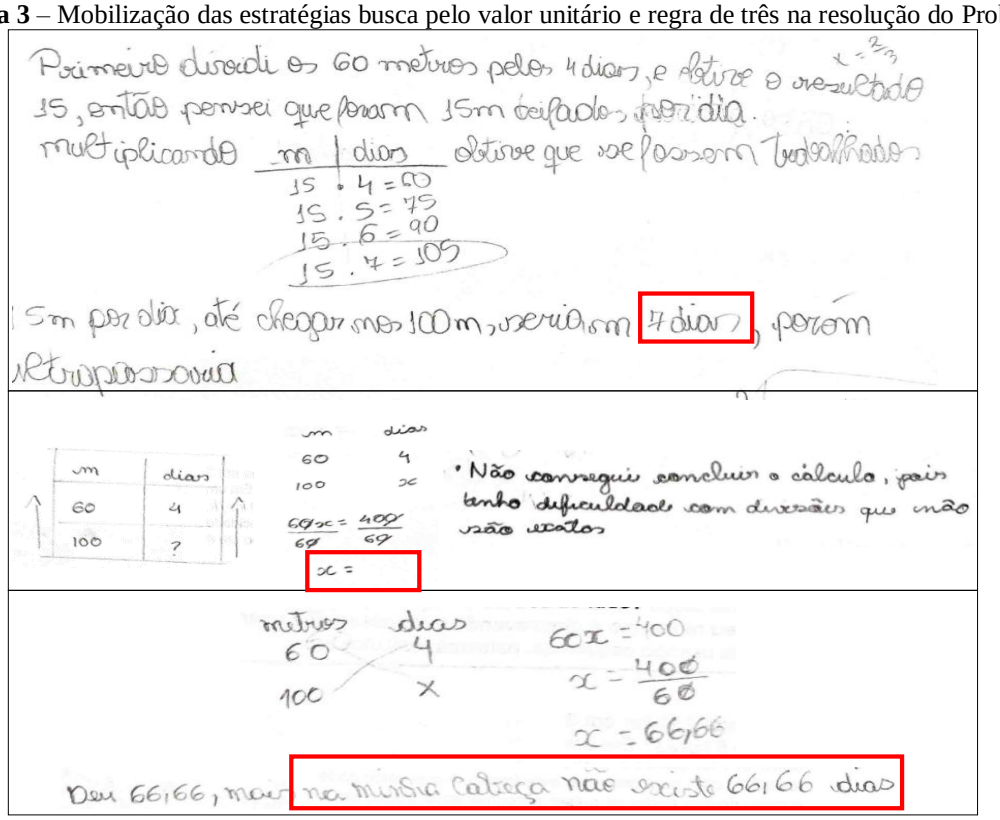
Na análise das resoluções apresentadas, procurou-se examinar como os participantes mobilizam seus conhecimentos na resolução dos diferentes tipos de problemas que atribuem significado ao conceito de proporcionalidade, bem como as estratégias adotadas nesse processo (Oliveira, 2009). Buscou-se, ainda, verificar em que medida os participantes demonstram discernimento na seleção de procedimentos e abordagens condizentes com as características de cada situação investigada (Burgos et al., 2018).

No Problema 1, nenhum dos participantes apresentou uma resolução correta, resultado diretamente associado à escolha inadequada das grandezas consideradas na relação proporcional. De modo geral, todos tomaram o comprimento do lado do canavial como variável proporcional ao tempo de ceifa, desconsiderando que a quantidade de trabalho envolvida depende da área a ser ceifada, o que evidencia uma fragilidade no KoT – Fenomenologia e aplicações, especialmente no que se refere à distinção entre situações proporcionais e não proporcionais.

Apesar dessa identificação incorreta das grandezas, a análise das resoluções revela a mobilização de diferentes estratégias. Um participante recorreu à *busca pelo valor unitário* (KoT – Procedimentos), enquanto cinco estabeleceram proporções e utilizaram a *regra de três* (KoT – Procedimentos) na tentativa de resolver o problema (Figura 3). Dentre eles, dois

organizaram os dados em tabelas, mobilizando adequadamente o raciocínio multiplicativo e conhecimentos relacionados ao KoT – Registros de Representação.

Figura 3 – Mobilização das estratégias busca pelo valor unitário e regra de três na resolução do Problema 1.

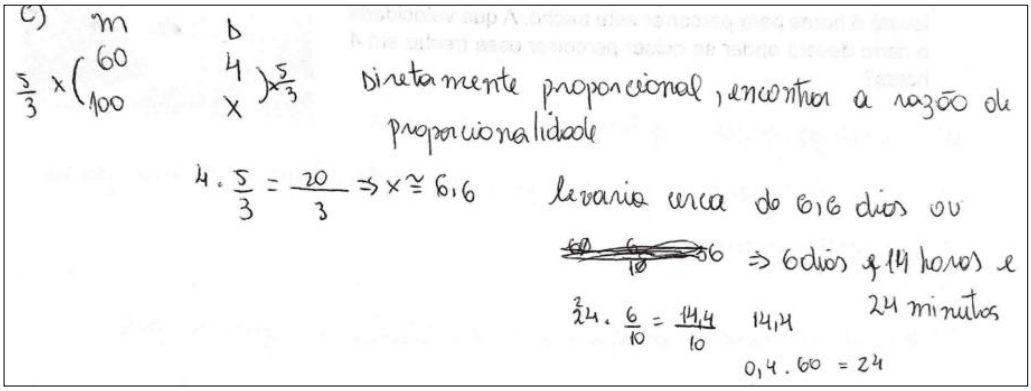


Fonte: Dados do estudo.

Observou-se, contudo, uma dificuldade recorrente no tratamento da divisão quando o quociente resultava em uma quantidade não inteira. Os participantes apresentaram insegurança, interrupção do cálculo ou rejeição do resultado obtido, questionando, inclusive, a legitimidade de valores decimais para grandezas contínuas como o tempo. Esse conjunto de evidências aponta para fragilidades persistentes no uso da divisão, operação central da estrutura multiplicativa, já amplamente discutidas na literatura (Castro et al., 2016; Lautert; dos Santos; Merlini, 2018).

Por fim, apenas um participante reconheceu explicitamente a natureza diretamente proporcional da situação (KoT – Definição) e mobilizou a *estratégia escalar* (Spinillo, 1994), identificando o fator de proporcionalidade (KoT – Procedimentos). Diferentemente dos demais, esse participante aceitou a legitimidade de uma quantidade não inteira de tempo e procedeu à sua conversão para uma medida composta, expressando o resultado em dias, horas e minutos (Figura 4). Tal ação evidencia a mobilização do pensamento proporcional e a compreensão de propriedades fundamentais de grandezas contínuas (KoT – Propriedades e fundamentos).

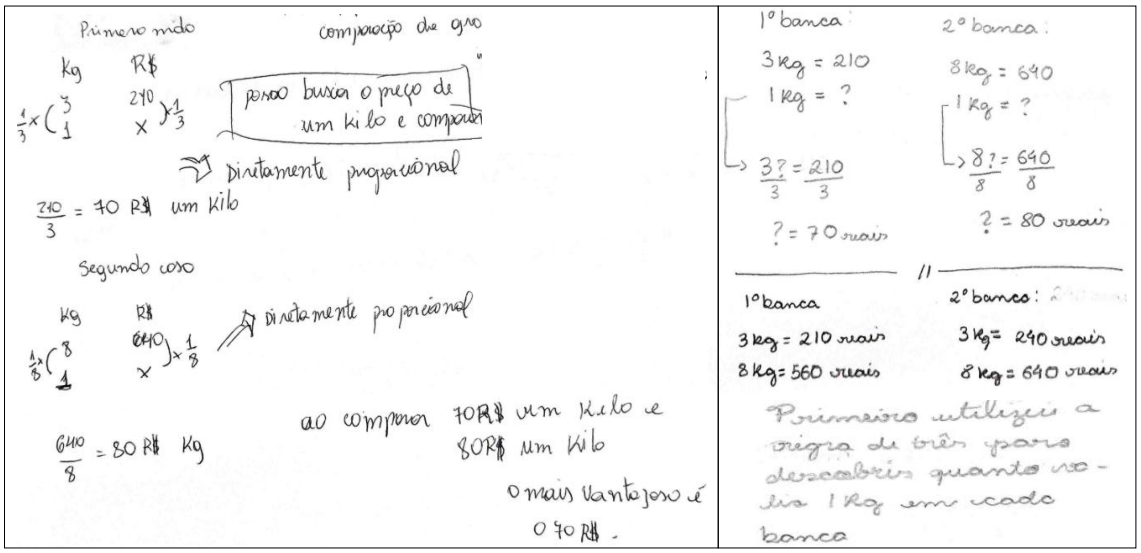
Figura 4 – Mobilização da estratégia escalar na resolução do Problema 1.



Fonte: Dados do estudo.

No Problema 2, a estratégia mais utilizada pelos participantes foi a *busca pelo valor unitário* (KoT – Procedimentos), na qual se determina inicialmente o valor correspondente a uma unidade para, a partir dele, resolver a situação proposta (Oliveira, 2009). Entre os participantes que recorreram a essa estratégia, observam-se dois encaminhamentos distintos: dois conseguiram mobilizá-la adequadamente, por meio da *estratégia escalar* ou da *regra de três* (KoT – Procedimentos), alcançando a resposta correta (Figura 5).

Figura 5 – Mobilização da estratégia escalar e da regra de três na resolução do Problema 2.

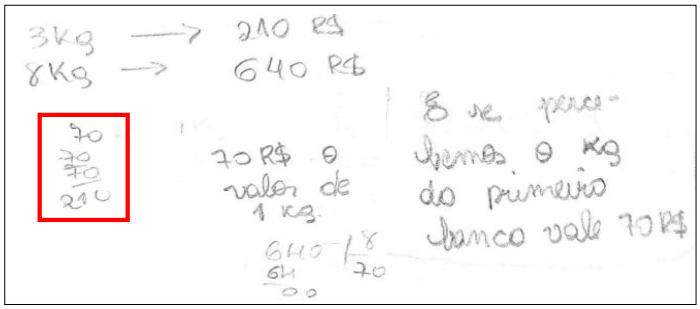


Fonte: Dados do estudo.

Os outros dois participantes, embora tenham adotado o mesmo procedimento inicial, não obtiveram êxito. Um deles cometeu um equívoco na operação de divisão, concluindo que o valor cobrado era o mesmo nas duas bancas; contudo, em sua resolução, observou-se a mobilização da *estratégia aditiva* (Oliveira, 2009), evidenciada pela utilização da soma

sucessiva (70 + 70 + 70) para reconstruir o valor referente a 3 kg de tucumã, necessário à comparação (KoT – Procedimentos) (Figura 6). O outro participante associou a noção de proporcionalidade à exigência de igualdade entre razões, o que o impediu de avançar na resolução, uma vez que, nesse contexto, a proporcionalidade se manifesta no interior de cada razão, por meio da determinação de razões equivalentes (como a razão unitária), e não na igualdade entre as razões obtidas. O procedimento requerido, portanto, consiste na comparação dessas razões distintas, a fim de identificar a proposta mais vantajosa.

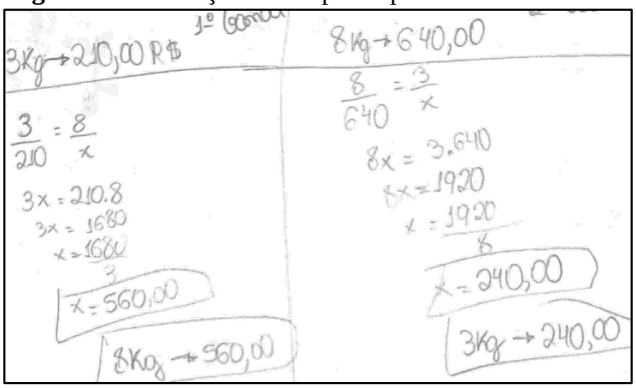
Figura 6 – Mobilização da estratégia aditiva na resolução do Problema 2.



Fonte: Dados do estudo.

Os dois últimos participantes utilizaram a *regra de três* (KoT – Procedimentos). Um deles igualou as quantidades de tucumã para fins de comparação, calculando o custo de 8 kg na primeira banca e de 3 kg na segunda, confrontando corretamente os valores obtidos (Figura 7). O outro, por sua vez, utilizou como critério a diferença entre os valores calculados (valor de 10 kg de tucumã em cada banca) e os valores iniciais apresentados no enunciado (700 − 210 e 800 − 640), o que revela uma fragilidade conceitual e de interpretação da situação proposta. Observa-se ainda que um dos participantes, a partir dessa questão, não apresentou novas tentativas de resolução nos problemas subsequentes.

Figura 7 – Resolução de um participante ao Problema 2.

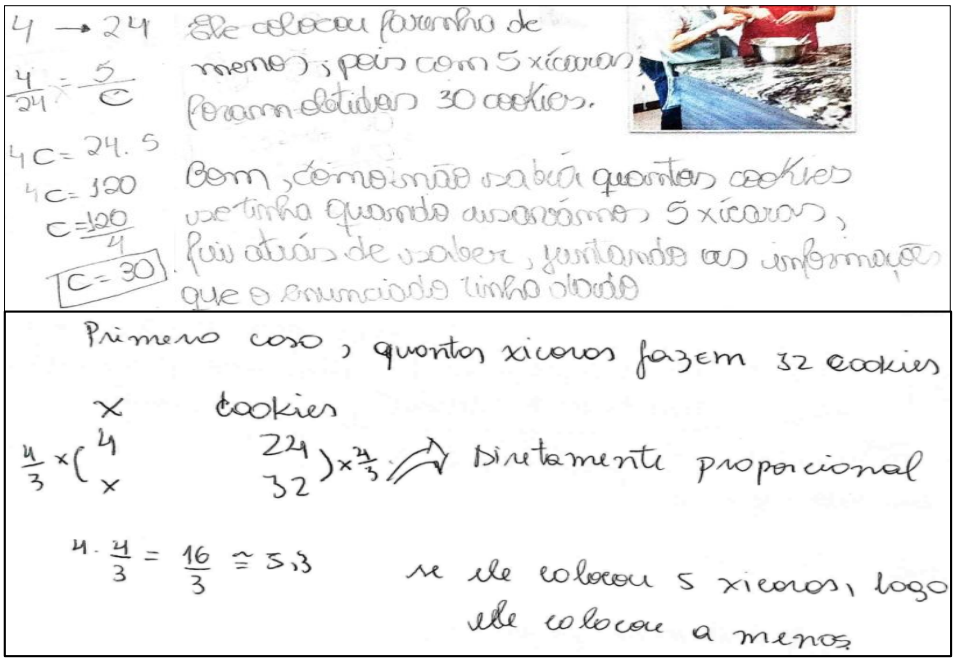


Fonte: Dados do estudo.

Dando continuidade às análises, segundo a literatura, os problemas do tipo 3 ao 7 têm sido negligenciados no ensino norteado pelo currículo e na pesquisa em educação matemática (Lesh; Post; Behr, 1988), o que vai ao encontro dos resultados desta pesquisa visto que foram os problemas em que os estudantes mais tiveram dificuldades.

No Problema 3, quatro participantes chegaram à resposta correta, enquanto dois apresentaram conclusões equivocadas em decorrência de interpretações incorretas dos resultados obtidos. Entre aqueles que resolveram corretamente a questão, observa-se dois procedimentos distintos (KoT – Procedimentos) – *regra de três* e *estratégia escalar* (Figura 8) – mobilizados de duas maneiras: dois participantes determinaram quantos cookies seriam produzidos com 5 xícaras de farinha (30 cookies), enquanto outros dois calcularam a quantidade de farinha necessária para produzir 32 cookies (5,3… xícaras). A partir da comparação desses resultados com a receita original de dona Irlane, todos concluíram que o cozinheiro utilizou uma quantidade insuficiente de farinha na preparação dos cookies.

Figura 8 –Mobilização da regra de três e da estratégia escalar na resolução do Problema 3.

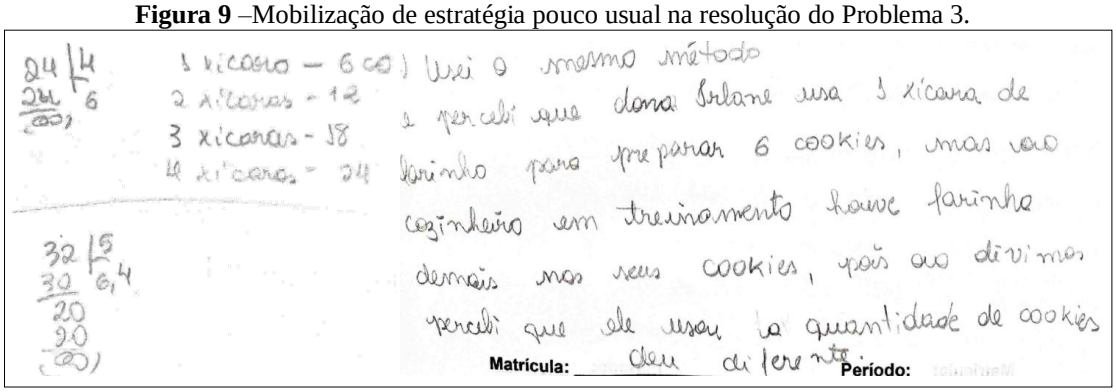


Fonte: Dados do estudo.

Entre os participantes que chegaram à resposta incorreta, um recorreu à *regra de três* (KoT – Procedimentos) para determinar a quantidade de xícaras de farinha necessária à produção de 32 cookies a partir da receita original. No entanto, interpretou que o cozinheiro em treinamento teria utilizado 5,2 xícaras de farinha quando deveria ter utilizado apenas 5, interpretação oposta à correta, na qual se reconhece que foram utilizadas 5 xícaras de farinha em vez de aproximadamente 5,3. O outro participante mobilizou a estratégia de *busca pelo*

valor unitário (KoT – Procedimentos), organizando os dados em uma tabela (KoT – Registros de Representação), e calculou os fatores de proporcionalidade das razões 4:24 e 5:32, obtendo, respectivamente, 6 e 6,4 cookies por xícara de farinha (Figura 9). Ao comparar esses valores, concluiu, de forma equivocada, que o cozinheiro utilizou farinha em excesso.

Figura 9 –Mobilização de estratégia pouco usual na resolução do Problema 3.

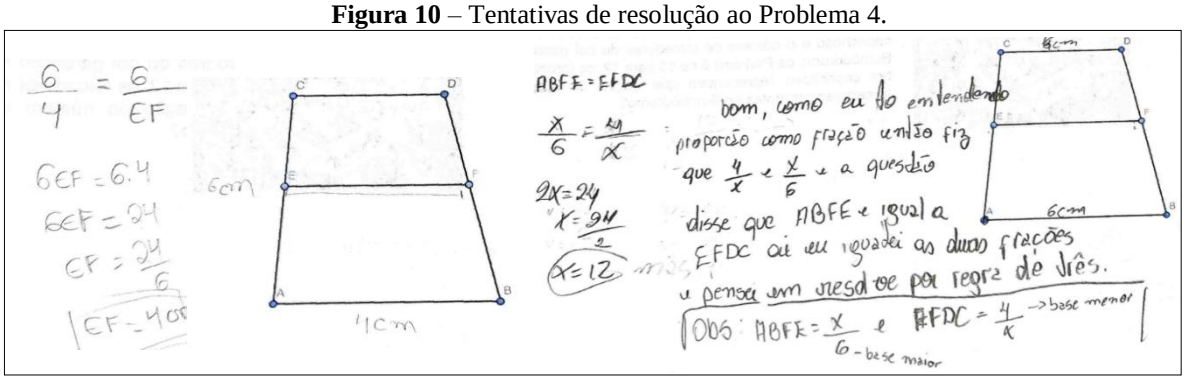


Fonte: Dados do estudo.

Esse erro não decorre dos cálculos realizados, mas da interpretação do fator de proporcionalidade, uma vez que um valor maior indica maior rendimento produtivo, isto é, menor quantidade de farinha por cookie. A estratégia adotada, baseada na comparação entre fatores de proporcionalidade, menos usual nesse tipo de situação, evidencia originalidade, mas também uma fragilidade no KoT – Fenomenologia e aplicações, relacionada à atribuição de significado contextual à constante de proporcionalidade, em consonância com os achados de Costa e Allevato (2015).

No Problema 4, nenhum dos participantes que tentaram resolvê-lo apresentou uma solução correta (Figura 10). Uma participante construiu a proporção de forma inadequada em decorrência da identificação incorreta das bases do trapézio ABDC. A outra, embora aparentasse reconhecer a existência de uma relação algébrica entre os segmentos, revelou, em entrevista, confusão conceitual entre figuras semelhantes e congruentes. Além disso, a construção da proporção não se fundamentou na identificação de lados homólogos entre trapézios semelhantes, mas em critérios visuais e posicionais, o que compromete a validade da relação estabelecida. Ademais, a participante cometeu um erro ao resolver o produto $x.x$, escrevendo $2x$ no lugar de x^2, revelando dificuldades tanto na manipulação algébrica quanto na compreensão da estrutura multiplicativa subjacente à proporcionalidade geométrica (KoT – Procedimentos).

Figura 10 – Tentativas de resolução ao Problema 4.



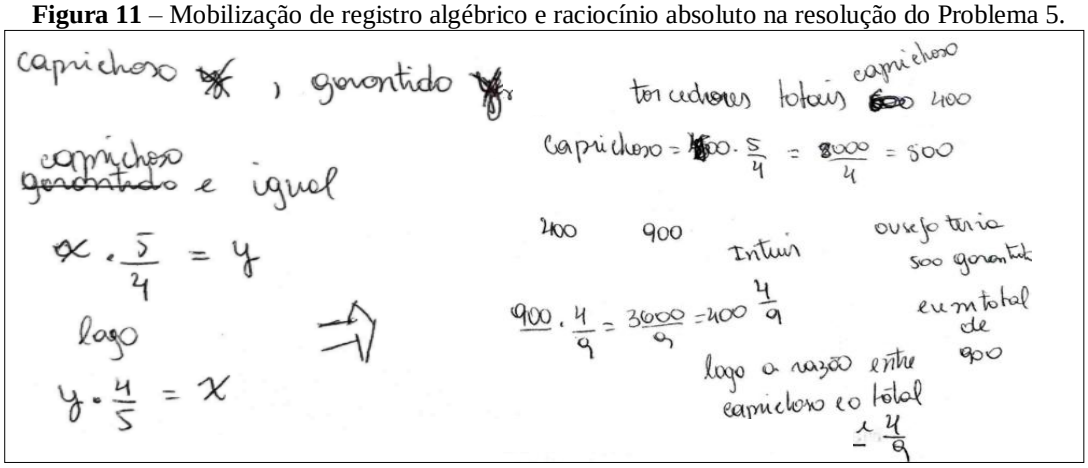
Fonte: Dados do estudo.

Tais fragilidades podem ser parcialmente compreendidas à luz do contexto formativo dos participantes, visto que nenhum havia cursado a disciplina de Geometria Plana até o momento da aplicação do questionário. Esse aspecto contribui para explicar a baixa mobilização de conhecimentos relacionados à semelhança de figuras e reforça que as dificuldades observadas não se restringem a procedimentos algorítmicos, mas envolvem também a interpretação do contexto geométrico como um campo legítimo de aplicação da proporcionalidade (KoT – Fenomenologia e aplicações).

No Problema 5, apenas dois participantes apresentaram tentativas de resolução. As estratégias mobilizadas evidenciam diferentes níveis de apropriação do pensamento proporcional, especialmente no que se refere à articulação entre relações parte–parte e parte–todo (KoT – Procedimentos).

Um participante iniciou a resolução por meio da simplificação da razão parte–parte entre os torcedores dos bois, obtendo a razão 5:4, e representou as quantidades por meio de incógnitas (KoT – Registros de Representação). No entanto, ao buscar a fração correspondente ao número de torcedores do boi caprichoso em relação ao total, recorreu à atribuição de valores absolutos às incógnitas para viabilizar os cálculos (Figura 11). Esse procedimento revelou dificuldades em operar diretamente com quantidades relativas, próprias do pensamento proporcional, levando a uma confusão entre as incógnitas e, consequentemente, à identificação incorreta da fração solicitada. Embora tenha mobilizado conhecimentos algébricos consolidados, a resolução evidencia a predominância do pensamento absoluto, o que comprometeu a interpretação da relação parte-todo (KoT – Fenomenologia e aplicações).

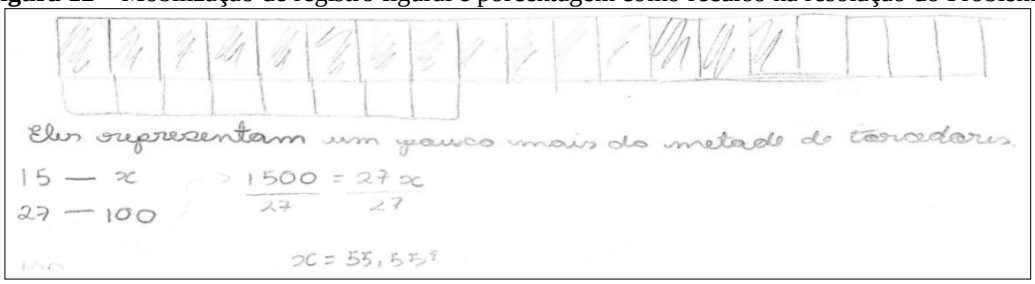
Figura 11 – Mobilização de registro algébrico e raciocínio absoluto na resolução do Problema 5.



Fonte: Dados do estudo

O outro participante, por sua vez, organizou a situação por meio de um registro figural (KoT – Registros de Representação) e realizou inicialmente uma análise qualitativa da razão, utilizando o referencial de *metade* (Spinillo, 1994) para avaliar a proporção envolvida (Figura 12). Em seguida, quantificou essa relação recorrendo ao conhecimento de porcentagem (KoT – Procedimentos), estabelecendo uma proporção parte–todo que conduziu ao resultado correto. Essa abordagem evidencia uma mobilização mais consistente do pensamento proporcional, ao operar diretamente com relações relativas e atribuir significado contextual à situação, sem depender da fixação prévia de valores absolutos.

Figura 12 – Mobilização de registro figural e porcentagem como recurso na resolução do Problema 5.



Fonte: Dados do estudo

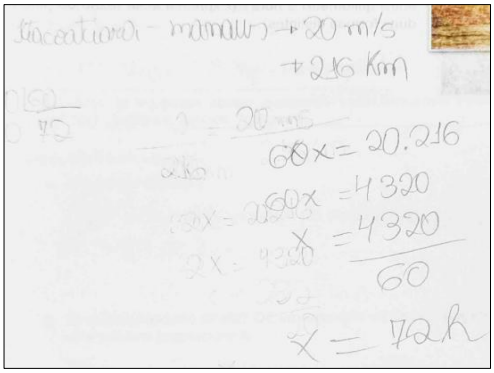
De modo geral, as resoluções indicam contrastes entre estratégias baseadas no pensamento absoluto e aquelas sustentadas pelo pensamento relativo, reforçando que as dificuldades observadas não decorrem da ausência de conhecimentos matemáticos, mas de fragilidades na atribuição de significado às relações proporcionais no contexto proposto.

No Problema 6 buscou-se analisar a mobilização de procedimentos multiplicativos e de divisão (KoT – Procedimentos) em um contexto de movimento uniforme, privilegiando o estabelecimento de relações proporcionais em detrimento do uso mecânico de fórmulas. Contudo, as resoluções evidenciam o predomínio de procedimentos formais pouco articulados

à compreensão conceitual das grandezas envolvidas. Um participante utilizou diretamente a fórmula da velocidade média sem realizar a conversão prévia da unidade da velocidade, o que resultou em erro. Em entrevista, demonstrou reconhecer a necessidade dessa conversão, sugerindo que a dificuldade não decorre da ausência de conhecimento procedimental, mas da fragilidade na coordenação entre unidades de medida no contexto do problema.

Dois participantes recorreram a tentativas de conversão e ao uso da *regra de três*, mas não obtiveram o resultado correto. Um deles revelou dificuldades na interpretação das relações entre as grandezas, estruturando proporções por tentativa e erro e confundindo unidades de tempo ao relacionar 1 hora a 60 minutos, em vez de 3600 segundos, unidade compatível com a velocidade expressa em metros por segundo (Figura 13). Tal comportamento indica fragilidade no pensamento proporcional, marcada pela priorização de procedimentos algorítmicos em detrimento da compreensão da relação multiplicativa subjacente.

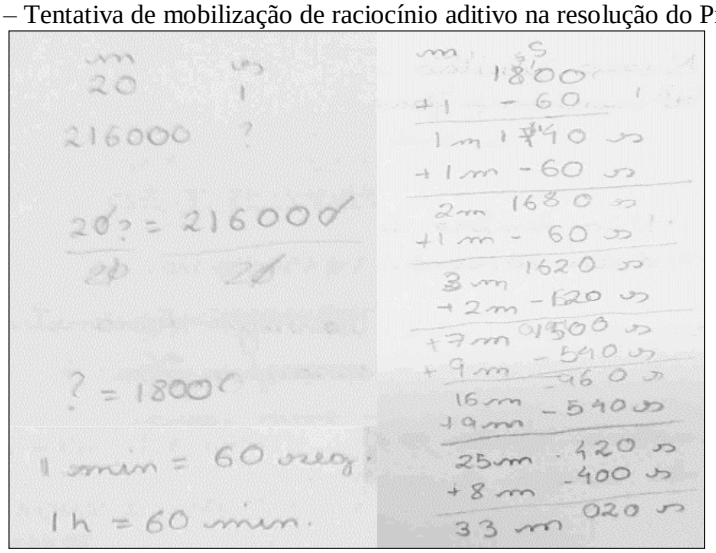
Figura 13 – Tentativa de construção de uma proporção na resolução do Problema 5.



Fonte: Dados do estudo.

O outro participante iniciou a resolução com a conversão correta da distância para metros e utilizou a *regra de três* para determinar o tempo em segundos (KoT – Procedimentos). Contudo, ao converter esse tempo para horas, recorreu a subtrações sucessivas de 60 em 60 segundos, associando cada grupo a um minuto (Figura 14). Essa ação evidencia um raciocínio aditivo e a predominância do pensamento absoluto em detrimento do pensamento relativo, característico da proporcionalidade. Embora esse procedimento pudesse levá-la à resposta correta, um erro na resolução inicial da proporção comprometeu o resultado final.

Figura 14 – Tentativa de mobilização de raciocínio aditivo na resolução do Problema 5.



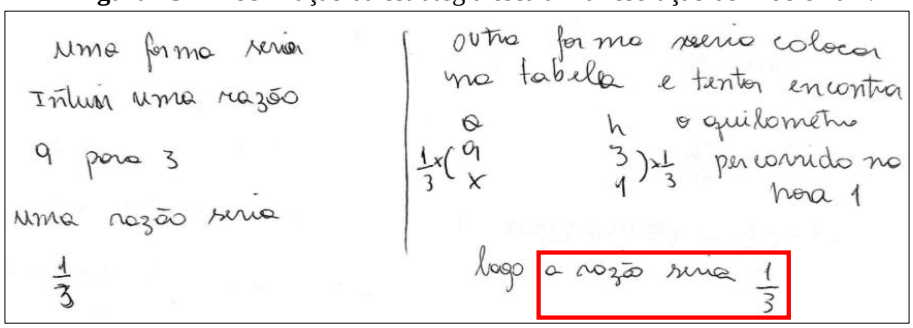
Fonte: Dados do estudo.

De modo geral, observa-se que, embora conhecimentos procedimentais relevantes tenham sido mobilizados, a compreensão das relações proporcionais entre distância, tempo e velocidade permaneceu fragilizada, especialmente no que se refere à coordenação entre unidades de medida e à atribuição de significado às relações multiplicativas, em consonância com a discussão de Oliveira (2016) sobre a prevalência do pensamento absoluto.

Por fim, Bianchini e Lima (2023) descrevem três possíveis formas de solucionar o Problema 7: (i) recorrer à razão expressa na linguagem natural, parafraseando o enunciado; (ii) utilizar outro sistema de representação; e (iii) recorrer à equivalência entre razões, estabelecendo a igualdade 9/3 = (x quilômetros) / (1 hora), obtendo-se novamente a razão de 3 quilômetros por hora. Isso posto, considerando o conjunto das resoluções, evidencia-se que os participantes mobilizaram procedimentos corretos para a obtenção da razão unitária, tanto por meio da *estratégia escalar* quanto da *regra de três* (KoT – Procedimentos).

No entanto, observou-se uma dificuldade recorrente na interpretação contextual da razão, especialmente quanto à orientação entre as grandezas envolvidas. Em diferentes resoluções, a razão foi organizada no sentido inverso ao solicitado (hora por quilômetro), ainda que o valor numérico correspondente estivesse corretamente determinado (Figura 15).

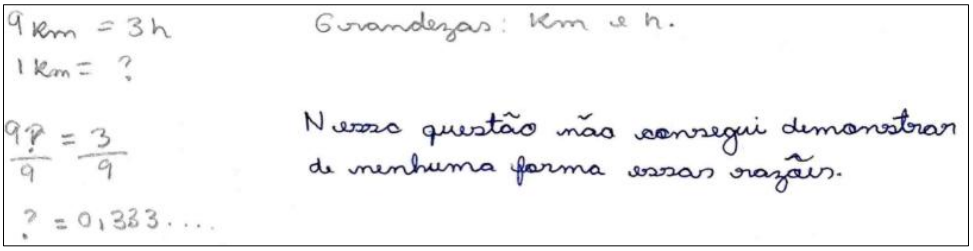
Figura 15 – Mobilização da estratégia escalar na resolução do Problema 7.



Fonte: Dados do estudo

Além disso, em alguns casos, o resultado foi apresentado de forma descontextualizada, sem a explicitação da unidade associada, o que comprometeu a interpretação do número obtido como uma razão entre grandezas (Figura 16). Embora tenham sido mobilizados registros adequados, como linguagem natural e notação fracionária (KoT – Registros de Representação), tais representações nem sempre foram acompanhadas de uma atribuição de significado coerente com o contexto do problema.

Figura 16 – Dificuldade em atribuir significado ao valor obtido no Problema 7.



Fonte: Dados do estudo

De modo geral, os resultados indicam que a principal fragilidade não reside na execução dos procedimentos matemáticos, mas na articulação entre o cálculo da razão unitária e sua interpretação contextual, evidenciando dificuldades no KoT – Fenomenologia e aplicações, apesar da presença de pensamento proporcional.

5 CONSIDERAÇÕES

O presente estudo teve como foco analisar o conhecimento matemático especializado de professores de Matemática em formação inicial, a partir de uma avaliação diagnóstica envolvendo situações de proporcionalidade. A análise das resoluções permitiu examinar as estratégias mobilizadas pelos participantes em diferentes tipos de problemas, bem como

identificar os conhecimentos matemáticos manifestados e as principais dificuldades conceituais evidenciadas ao longo da resolução das tarefas.

As análises evidenciaram que uma das principais dificuldades dos participantes esteve relacionada à identificação das grandezas envolvidas nas situações propostas. Observou-se que muitos não conseguiam conceituar adequadamente essas grandezas, frequentemente confundindo-as com unidades de medida ou recorrendo a termos genéricos e elementos contextuais, sem explicitação das relações quantitativas subjacentes. Essa fragilidade conceitual impactou diretamente tanto o reconhecimento do caráter proporcional das situações quanto as estratégias de resolução adotadas, o que é particularmente relevante, uma vez que a proporcionalidade se define justamente como uma relação entre grandezas.

Além disso, observou-se que o reconhecimento da proporcionalidade esteve fortemente condicionado à configuração dos problemas, especialmente à estrutura típica dos problemas de valor omisso. Como consequência, à medida que as situações se afastavam desse formato, aumentavam os equívocos na caracterização da relação proporcional, indicando que a análise dos participantes era orientada mais pela familiaridade com procedimentos algorítmicos do que pela natureza da relação entre as grandezas. Esse resultado aponta para uma compreensão restrita do conceito, frequentemente associada à simples covariação ou à aplicabilidade da regra de três, revelando fragilidades no KoT – Fenomenologia e aplicações.

No que se refere às estratégias mobilizadas na resolução dos problemas, observou-se que, embora os participantes tenham recorrido a diferentes abordagens e raciocínios, predominaram a estratégia escalar, a busca pelo valor unitário e, sobretudo, a regra de três, esta última amplamente utilizada ao longo das resoluções. Esse resultado evidencia a mobilização do KoT – Procedimentos, indicando familiaridade com métodos algorítmicos tradicionalmente associados à proporcionalidade. Identificou-se também a presença de conhecimentos relacionados ao KoT – Registros de Representação, manifestados por meio da organização dos dados em tabelas, da explicitação de razões em linguagem natural ou notação fracionária, bem como do uso de registros algébricos como recurso de resolução.

Em contrapartida, os conhecimentos vinculados ao KoT – Definições, propriedades e fundamentos mostraram-se menos evidentes, uma vez que a caracterização das situações proporcionais se apoiou predominantemente em critérios qualitativos ou na possibilidade de aplicação da regra de três. Além disso, em alguns casos, observou-se a mobilização de um raciocínio de natureza absoluta, em detrimento do raciocínio relativo, este último inerente ao pensamento proporcional.

As evidências produzidas por este estudo indicam que as fragilidades identificadas no conhecimento matemático especializado dos participantes no âmbito da proporcionalidade refletem lacunas estruturais na formação inicial de professores de Matemática. Tais resultados reforçam a necessidade de ampliar, nos contextos formativos, o repertório de situações e abordagens relacionadas a esse tópico, de modo a favorecer a mobilização integrada dos diferentes subdomínios do KoT, superando uma compreensão predominantemente procedimental e algorítmica do conceito.

Como encaminhamento para pesquisas futuras, aponta-se a pertinência de investigar e desenvolver propostas formativas que promovam o aprofundamento conceitual sobre relações proporcionais e diferentes configurações de problemas que dão sentido a elas, contribuindo para o desenvolvimento de um conhecimento matemático especializado mais articulado e consistente para o ensino da proporcionalidade.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM) por meio do "Programa de Apoio à Pós-Graduação Stricto Sensu Posgrad/Fapeam/2024-2025".

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2011.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. (Org.). **O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. 3. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2023.

BURGOS, M.; BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACOMONE, B.; GODINO, J. Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. **Educação e Pesquisa**, v. 44, n. e182013, 2018. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L.; FLORES-MEDRANO, E., ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, 2018, p. 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

CASTRO, J. B.; SOUZA, D. C.; MEDEIROS, D. M; SOUZA, M. S. M. X.; DIAS, A. C. A. M.; FILHO, J A. C. Análise de desempenho e de estratégias de estudantes do 6° ano do ensino fundamental em situações de proporção simples. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática.** Anais do XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4602_4113_ID.pdf. Acesso em: 24 jan. 2026.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da Resolução de Problemas. In: **XIV Conferencia Interamericana ee Educación Matemática**. Anais do XIV CIAEM – Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2015. Disponível em: https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/439/203. Acesso em: 24 jan. 2026.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and teaching ratio and proportion: research implications. In: OWENS, D. T. (ed.). **Research ideas for the classroom:** middle grades Mathematics. New York: Macmillan, 1993.

FALVO, S R.; JUCÁ, R. S. O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos anos iniciais. **Com a Palavra, o Professor**, v. 7, n. 18, 2022, p. 135-152. https://doi.org/10.23864/cpp.v7i18.816

HILL, H. C.; CHIN, M. Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. **American Educational Research Journal**, v. 55, n. 5, 2018, p. 1076-1112. https://doi.org/10.3102/0002831218769614

HOFFER, A. Ratios and proportional thinking. In: POST, T. (ed.). **Teaching mathematics in grades K–8: Research based methods**. Boston: Allyn & Bacon, 1988.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teacher. 4. ed. New York: Routledge, 2020. https://doi.org/10.4324/9781003008057

LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M.; MERLINI, V. L. Resolução de problemas de divisão de proporção simples por estudantes do 3º e 5º anos. In: **VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Anais do VII SIPEM – Seminário Internacional de Educação Matemática, 2018.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (ed.) **Number concepts and operations in the middle grades.** Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. https://doi.org/10.4324/9781003726777-6

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e Problemas Elementares.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics**: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US. 2. ed. New York, NY: Routledge, 2010. Disponível em: https://www.academia.edu/12089767/Knowing_and_Teaching_Elementary_Mathematics. ACesso em: 24 jan. 2026.

MENDUNI-BORTOLOTI, R. D.; BARBOSA, J. C. A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 59, p. 947-967, 2017. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

MINAYO, M. C. de S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 14. ed. São Paulo: Hucitec, 2014.

NOELTING, R. The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I – Differentiation of stages. **Educational Studies in Mathematics**, v. 11, 1980, p. 217-253. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/3481919. Acesso em: 24 jan. 2026.

OLIVEIRA, I. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 34, p. 57-79, 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/279478494_Proporcionalidade_estrategias_utilizadas_na_Proporcionalidade_estrategias_utilizadas_na_Fundamental_no_Quebec. Acesso em: 24 jan. 2026.

OLIVEIRA, L. M. C. P. Raciocínio proporcional em um problema envolvendo relações de proporcionalidade: aspectos evidenciados na CoP-PAEM. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Anais do XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7314_3371_ID.pdf. Acesso em: 24 jan. 2026.

POST, R. T.; BEHR, J. M.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (ed.). **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

RODRIGUES, S. P.; FRANÇA, M. E. V.; RODRIGUES, R. V. R. Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória. In: **IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Anais do IX SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2024. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/498/341. Acesso em: 24 jan. 2026.

SCHELLER, M.; BONOTTO, D. Estratégias de resolução de situação problema de modelagem matemática e o pensamento proporcional: um estudo com estudantes de pedagogia. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 16, n. 36, 2020, p. 197-223. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/7704/6331. Acesso em: 24 jan. 2026.

SPINILLO, A. G. Raciocínio proporcional em crianças: considerações acerca de alternativas educacionais. **Revista Pro-Posições**, v. 5, n. 1, 1994, p. 109-114. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644341/11760. Acesso em: 24 jan. 2026.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa: estudando como as coisas funcionam**. Tradução: Karla Reis. Porto Alegre: Penso, 2011.

STAKE, R. E. **Qualitative case studies**. New York: Oxford University Press, 2005.

VERGARA, A.; ESTRELLA, S.; VIDAL-SZABÓ, P. Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de deciciones. **Revista**

Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa, v. 23, n. 1, 2020, p. 7-36.
https://doi.org/10.12802/relime.20.2311

Conhecimento Matemático Especializado Mobilizado em um Contexto Formativo no Âmbito da Proporcionalidade

Roberta dos Santos Rodrigues[1] • Francisco Eteval da Silva Feitosa[2]

RESUMO

A proporcionalidade constitui um eixo estruturante da matemática escolar, embora persistam dificuldades relacionadas à sua compreensão conceitual e ao reconhecimento dos diferentes tipos de situações que a envolvem, inclusive na formação docente. Este estudo tem como objetivo analisar os conhecimentos matemáticos especializados mobilizados e desenvolvidos por futuros professores de matemática ao resolver e discutir problemas envolvendo pensamento proporcional em um contexto formativo. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso instrumental, cujos dados foram produzidos a partir dos registros escritos e das gravações das discussões coletivas acerca das resoluções de uma Tarefa para Formação fundamentada nas categorias de problemas propostas por Lesh, Post e Behr. A análise foi realizada à luz do modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), com foco no Knowledge of Topics (KoT), articulado à Teoria das Situações Didáticas (TSD), que orientou a organização das tarefas e das interações. Os resultados indicam que os participantes mobilizam estratégias variadas para resolver problemas de proporcionalidade; contudo, revelam dificuldades na identificação estrutural de diferentes classes de problemas, ancorando frequentemente suas justificativas no contexto ou no procedimento adotado. Evidencia-se, ainda, que a organização formativa inspirada na TSD favoreceu a problematização, a explicitação e a circulação dos conhecimentos, contribuindo para seu aprofundamento e para o desenvolvimento do conhecimento especializado docente.

Palavras-chave: Formação Inicial de Professores; MTSK; Teoria das Situações Didáticas; Tarefa para Formação; Tipos de Problemas.

Specialized Mathematical Knowledge Mobilized in a Teacher Education Context about Proportionality

ABSTRACT

Proportionality constitutes a structuring axis of school mathematics; however, persistent difficulties remain regarding its conceptual understanding and the recognition of the different types of situations it involves, including in teacher education. This study aims to analyze the specialized mathematical knowledge mobilized and developed by prospective mathematics teachers when solving and discussing problems involving proportional thinking in a formative context. This qualitative research adopts an instrumental case study design. Data were produced from written records and audio recordings of collective discussions concerning the solutions to a Tasks for Teacher Education grounded in the problem categories proposed by Lesh, Post, and Behr. Data analysis was conducted in light of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model, focusing on the Knowledge of Topics (KoT), articulated with the Theory of Didactical Situations (TDS), which guided the organization of tasks and interactions. The results indicate that participants mobilized a variety of strategies to solve proportionality problems; however, they revealed difficulties in structurally identifying different classes of problems, frequently grounding their justifications in the context or in the procedure adopted. Furthermore, the formative organization inspired by the TDS fostered the problematization, explicitation, and circulation of knowledge, contributing to its deepening and to the development of specialized teacher knowledge.

Keywords: Initial Teacher Instruction; MTSK; Theory of Didactical Situations; Tasks for Teacher Education; Types of Problems.

Conocimiento Matemático Especializado Movilizado en un Contexto Formativo en el Ámbito de la Proporcionalidad

RESUMEN

La proporcionalidad constituye un eje estructurante de la matemática escolar; sin embargo, persisten dificultades relacionadas con su comprensión conceptual y con el reconocimiento de los diferentes tipos de situaciones que la involucran, incluso en la formación docente. Este estudio tiene como objetivo analizar el

[1] Universidade Federal do Amazonas • Manaus, AM — Brasil • ✉ roberta.rodrigues@ufam.edu.br • Orcid https://orcid.org/0000-0001-9903-7644

[2] Universidade Federal do Amazonas • Manaus, AM — Brasil • ✉ sfeitosa@ufam.edu.br • Orcid https://orcid.org/0000-0003-0913-3427

conocimiento matemático especializado movilizado y desarrollado por futuros profesores de matemáticas al resolver y discutir problemas que involucran el pensamiento proporcional en un contexto formativo. Se trata de una investigación cualitativa, de tipo estudio de caso instrumental. Los datos fueron producidos a partir de los registros escritos y de las grabaciones de las discusiones colectivas acerca de las resoluciones de una Tarea para la Formación fundamentada en las categorías de problemas propuestas por Lesh, Post y Behr. El análisis se realizó a la luz del modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), con foco en el Knowledge of Topics (KoT), articulado con la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), que orientó la organización de las tareas y de las interacciones. Los resultados indican que los participantes movilizan estrategias variadas para resolver problemas de proporcionalidad; no obstante, evidencian dificultades en la identificación estructural de diferentes clases de problemas, fundamentando con frecuencia sus justificaciones en el contexto o en el procedimiento adoptado. Asimismo, la organización formativa inspirada en la TSD favoreció la problematización, la explicitación y la circulación de los conocimientos, contribuyendo a su profundización y al desarrollo del conocimiento especializado docente.
Palabras clave: Formación Inicial del Profesorado; MTSK; Teoría de las Situaciones Didácticas; Tarea para la Formación; Tipos de Problemas.

INTRODUÇÃO

A proporcionalidade constitui uma das noções centrais da matemática, tanto por sua ampla aplicabilidade em situações cotidianas quanto por articular diferentes áreas do pensamento matemático. Para Onuchic e Allevato (2015), trata-se de um conceito unificador, pois estabelece relações com ideias como razão, porcentagem, taxa, escala, semelhança, funções lineares e razões trigonométricas, entre outras.

Apesar de sua relevância, persistem dificuldades na compreensão e na utilização da proporcionalidade ao longo da escolaridade (Fuentes Leal, 2020). Estudos apontam baixo engajamento e obstáculos na resolução de problemas que envolvem identificação de relações multiplicativas, seleção de razões equivalentes, comparação de razões, o trabalho com escalas, gráficos e tabelas de razão, bem como atividades de construção e medida (Oliveira; Lins; Pereira, 2019). Observa-se, ainda, a tendência dos estudantes a se orientarem pela estrutura superficial das tarefas, frequentemente organizadas como problemas de valor omisso, em detrimento da relação proporcional subjacente (Lesh; Doerr, 2003).

Revisões sistemáticas evidenciam obstáculos recorrentes, tais como a confusão entre raciocínio aditivo e multiplicativo, dificuldades com a constante de proporcionalidade, fragilidades na interpretação de grandezas e unidades e a predominância de um ensino mecanizado, com pouca compreensão conceitual (Rodrigues; Feitosa, 2025b). Silvestre e Ponte (2012) associam a rigidez do pensamento proporcional à limitada diversidade de tarefas propostas em sala de aula, enquanto Silva et al. (2018) afirmam que tais dificuldades também se relacionam ao modo como os problemas são explorados pedagogicamente, privilegiando um tratamento essencialmente operacional, baseado na resolução repetitiva de exercícios, em detrimento da compreensão do conceito e de suas múltiplas articulações com outros conteúdos matemáticos e com situações externas à Matemática.

Partindo desse cenário, a fim de que habilidades sejam desenvolvidas nos estudantes e essas dificuldades sejam superadas, é necessário que o professor tenha um conhecimento profundo acerca de qualquer tópico que se predisponha a ensinar, nesse caso em específico, da proporcionalidade. Nesse sentido, Paula, Pazuch e Mazzi (2023) destacam entre os desafios da Licenciatura em Matemática na atualidade que ações têm sido feitas tendo em vista a mobilização de conhecimentos próprios da docência na formação inicial de professores de matemática?

Tendo isso em vista, este estudo buscou ampliar a investigação acerca dos conhecimentos matemáticos especializados mobilizados por futuros professores em um contexto formativo sobre proporcionalidade a partir de três categorias distintas de problemas propostas por Lesh, Post e Behr (1988) e que tratam de diferentes aspectos do pensamento proporcional: problemas de conversão entre razões, taxas e frações; problemas envolvendo unidades de medida e números; e problemas de translação entre diferentes sistemas de representação. Busca-se compreender como os licenciandos mobilizam o pensamento ao operar com mudanças de registro, explicitar o significado das unidades envolvidas e reinterpretar uma mesma relação proporcional sob diferentes formas.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK

Nas últimas décadas, a centralidade do conhecimento do professor para a qualidade do ensino impulsionou o desenvolvimento de modelos teóricos que buscam compreender como se desenvolve e como desenvolver o conhecimento do professor de e que ensina matemática. Dentre esses, destaca-se o Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (Carrillo et al., 2018), que considera o conhecimento do professor como sendo especializado e o organiza em três domínios: Mathematics Knowledge (MK), referente ao conhecimento matemático do professor; Pedagogical Content Knowledge (PCK), relacionado ao ensino e à aprendizagem do conteúdo matemático; e Beliefs, que compreende as crenças e concepções sobre a matemática e seu ensino.

No âmbito do MK, o modelo contempla três subdomínios, entretanto, considerando os objetivos deste estudo, o foco analítico recai sobre o Knowledge of Topics (KoT), que se refere ao conhecimento aprofundado de um tópico matemático específico e se organiza em quatro categorias, descritas a seguir.

A categoria Definições, propriedades e fundamentos refere-se ao conhecimento das características que tornam um objeto matemático definível, incluindo diferentes formas de

defini-lo e as propriedades que o estruturam. No caso da proporcionalidade, envolve, por exemplo, reconhecer a invariância da razão como critério definidor de uma relação proporcional.

A categoria Fenomenologia e aplicações diz respeito, por um lado, ao conjunto de situações que conferem sentido ao conceito, e, por outro, ao conhecimento de seus usos e aplicações em diferentes contextos. No âmbito da proporcionalidade, abrange reconhecer os diferentes tipos de problemas que dão sentido ao pensamento proporcional (Lesh; Post; Behr, 1988).

A categoria Registros de representação refere-se às diferentes formas de representar um conceito, processo ou procedimento (gráfica, algébrica, aritmética, pictórica ou em linguagem natural), bem como ao domínio da notação e do vocabulário associados. No caso da proporcionalidade, inclui conhecer como coordenar diferentes registros de representação de uma mesma relação proporcional.

Por fim, a categoria Procedimentos abrange o conhecimento de algoritmos convencionais e alternativos, suas condições de uso e seus fundamentos matemáticos. No contexto da proporcionalidade, envolve saber quando e por que utilizar estratégias do raciocínio multiplicativo, como estratégia escalar ou a chamada "regra de três", compreendendo os princípios que as justificam.

Embora o MTSK ofereça uma lente para investigar os conhecimentos especializados mobilizados pelos professores, este estudo busca não apenas revelá-los, mas também desenvolvê-los. Assim, conceberam-se tarefas essa intencionalidade formativa, uma vez que o conhecimento especializado para a docência não se desenvolve apenas pela prática letiva, mas requer apoio formativo orientado a essa finalidade (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013).

Tarefa para Formação

Considerando que a prática matemática do professor se sustenta na implementação de tarefas, as quais devem assumir papel central também em sua formação (Flôres; Gusmão, 2022), optou-se pela utilização de Tarefas para a Formação (TpF) (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021). Essas tarefas são concebidas a partir de tópicos reconhecidamente problemáticos para estudantes e professores (neste estudo, a proporcionalidade) com o objetivo de acessar e desenvolver o Conhecimento Interpretativo e Especializado. Como o foco desta investigação recai sobre o Conhecimento Especializado, as questões propostas foram elaboradas com essa intencionalidade específica.

A TpF integra a chamada Tarefa Formativa (TF), juntamente com o Documento do Professor e o Documento do Formador, que orientam sua implementação de modo coerente

com os fundamentos teóricos que a sustentam (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021). Contudo, neste estudo, a análise concentra-se na própria Tarefa para a Formação.

Estruturalmente, a TpF parte de uma tarefa para o aluno (indicada dentro de um retângulo) que seja passível de os estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental resolverem e serve de motivação para desenvolver o conhecimento dos professores em uma perspectiva mais ampla do que somente discutir como poderia ser implementada em sala de aula (Almeida; Ribeiro, 2021). Em seguida encontram-se algumas questões especificamente desenhadas para o professor a fim de promover a discussão das dimensões matemáticas relacionada ao tópico de estudo (no caso desta pesquisa, proporcionalidade), visando desenvolver seu conhecimento especializado (Silva; Ribeiro, 2023).

METODOLOGIA

O presente estudo constitui um recorte de uma pesquisa de mestrado acadêmico e adota abordagem qualitativa, caracterizando-se como descritivo (Gil, 2022) e configurado como estudo de caso instrumental (Stake, 2005), uma vez que o caso investigado é tomado como meio para compreender um fenômeno mais amplo: a mobilização do conhecimento matemático especializado de futuros professores no ensino de proporcionalidade.

Participaram do estudo quatro licenciandos em Matemática, cursando o terceiro período de uma universidade pública do estado do Amazonas, todos bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e atuando em escolas públicas da capital, os quais, para resguardar sua identidade, foram identificados pelas letras A, B, C e E.

O contexto formativo foi estruturado segundo as tipologias da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986) — ação, formulação, validação e institucionalização — com o propósito de observar e favorecer a mobilização do conhecimento especializado dos participantes. Os dados foram produzidos a partir da aplicação de uma Tarefa para Formação (TpF), complementada por observação participante, registros em diário de campo e gravações em áudio e vídeo, posteriormente transcritas integralmente (Schoenfeld, 2000).

Em relação à escolha da atividade formativa, utilizamos a estratégia de ofertar uma oficina de curta duração composta por três encontros de três horas cada. Neste artigo, analisa-se exclusivamente a TpF aplicada no terceiro encontro, após etapas prévias de institucionalização nos encontros anteriores, nas quais os participantes haviam sido formalmente apresentados a aspectos conceituais da proporcionalidade e às seguintes classes de problemas envolvendo o pensamento proporcional: valor omisso, comparação, transformação e média.

A tarefa analisada foi estruturada a partir de três situações que compõem a "tarefa do aluno", pertencentes às classes de problemas: conversão, unidades de medida e números e translação (Lesh; Post; Behr, 1988), que enfatizam diferentes manifestações da proporcionalidade (Quadro 1). A seguir, apresentam-se as situações e uma síntese das expectativas analíticas associadas a cada uma, de modo a explicitar sua estrutura matemática e as demandas cognitivas impostas aos futuros professores, elementos fundamentais para a análise da mobilização do KoT.

Quadro 1 – Situações propostas na tarefa.

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Categoria</th></tr>
<tr><td>Hoje o professor Francisco divulgou as notas da avaliação final da disciplina de Geometria I na turma de Licenciatura em Matemática. Sabendo que a razão entre a quantidade de aprovados e a quantidade de reprovados é de 20 para 8, a quantidade de reprovados representa que fração da quantidade total de estudantes dessa turma?</td><td>Problema de Conversão</td></tr>
<tr><td>A vazão média do Rio Amazonas é de 209.000 m³/s quando chega a sua foz no Oceano Atlântico. Quantos litros de água o Rio Amazonas despeja no oceano a cada hora?</td><td>Problema envolvendo unidades de medida e números</td></tr>
<tr><td>A tabela abaixo apresenta a quantidade de bananas compradas por dona Socorro na feira da Manaus Moderna e os respectivos preços:
A partir dessa tabela:
<table><tr><th>Massa (Kg)</th><th>Preço (R$)</th></tr><tr><td>2</td><td>20</td></tr><tr><td>4</td><td>40</td></tr><tr><td>6</td><td>60</td></tr></table>a) Represente graficamente a relação entre a quantidade de bananas e o preço pago.
b) Descreva algebricamente a relação entre as duas grandezas.
c) Quanto custaria 7,5 kg de banana?
d) Se dona Socorro pagou R$ 90, quantos kg ela comprou?
e) Essa relação se mantém se houver promoção, como "leve 3kg pelo preço de 2kg"?</td><td>Problema de Translação</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração própria (2025).

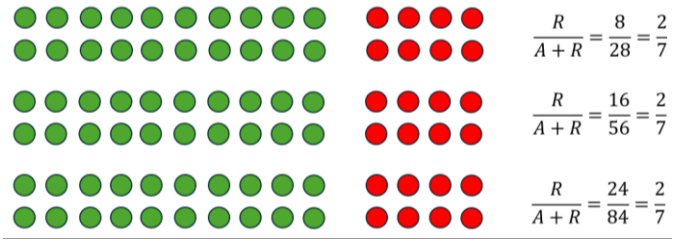
A Situação 1 enquadra-se na categoria de *problemas de conversão* (Lesh; Post; Behr, 1988), envolvendo a articulação entre razões do tipo parte–parte e parte–todo (Noelting, 1980). Trata-se de uma tarefa que exige a transformação de uma razão expressa na forma 20:8 em uma fração representativa da relação entre uma das partes e o todo, sem alteração da relação proporcional subjacente.

Do ponto de vista analítico, a situação permite observar a mobilização de diferentes dimensões do subdomínio KoT, especialmente no que se refere à fenomenologia da proporcionalidade, aos procedimentos de recomposição e simplificação de razões e aos registros de representação utilizados para explicitar tais relações. A resolução demanda o reconhecimento do significado relacional da razão, compreendendo que os valores

apresentados não indicam quantidades absolutas fixas, mas expressam uma relação constante entre aprovados e reprovados.

Nesse sentido, a tarefa possibilita analisar se os participantes interpretam a razão como expressão de covariância e invariância entre grandezas, reconhecendo que a relação entre as partes se preserva independentemente do número total de estudantes. A Figura 1 apresenta um esquema em linguagem figural, bem como sua correspondente tradução em linguagem algébrica, por meio de representações figurais e algébricas, essa estrutura relacional, servindo como suporte para examinar a articulação entre diferentes registros e a compreensão conceitual da proporcionalidade.

Figura 1 – Representação figural e algébrica de possível solução para a Situação 1.

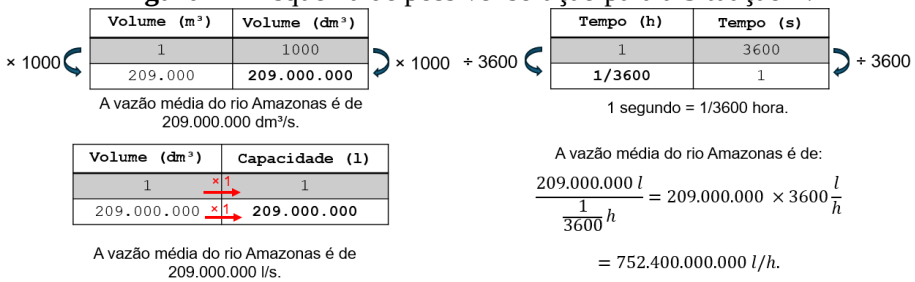


Fonte: Elaboração própria (2025).

A Situação 2 insere-se na categoria *de problemas envolvendo unidades de medida e números* (Lesh; Post; Behr, 1988), uma vez que envolve não apenas uma relação proporcional entre grandezas, mas também a compreensão e a coordenação entre diferentes unidades de volume e de tempo. A tarefa exige que a vazão seja interpretada como uma taxa expressa em metros cúbicos por segundo, implicando a conversão simultânea das unidades de volume (m^3 para litros) e de tempo (segundos para horas).

Desse modo, a mobilização do pensamento proporcional não se restringe à manipulação numérica, mas envolve o entendimento do significado das unidades associadas às grandezas em jogo, bem como das relações entre elas. A situação demanda, portanto, conhecimentos relacionados ao KoT – Fenomenologia e aplicações, ao reconhecer o contexto físico da vazão, e ao KoT – Procedimentos, no que diz respeito às estratégias de conversão de unidades e ao uso adequado de fatores de proporcionalidade (Figura 2).

Figura 2 – Esquema de possível solução para a Situação 2.



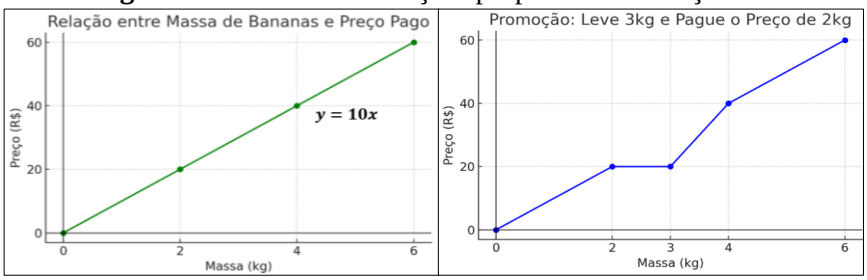
Fonte: Elaboração própria (2025).

A Situação 3 enquadra-se na categoria de *problemas de translação* (Lesh; Post; Behr, 1988), pois requer a manutenção de uma mesma relação proporcional ao longo de diferentes sistemas de representação. Diferentemente das Situações 1 e 2, o foco desloca-se das conversões entre razões ou unidades para a coordenação entre representações tabular, gráfica e algébrica de uma relação funcional.

Ao longo dos itens propostos, os participantes são demandados a: representar graficamente os dados da tabela; explicitar a lei de formação da relação por meio de uma expressão algébrica; realizar processos de interpolação e extrapolação; e analisar a manutenção, ou ruptura, da proporcionalidade em um contexto modificado (promoção comercial). Tal estrutura permite examinar a mobilização do subdomínio KoT, especialmente no que se refere aos Registros de Representação, ao exigir a conversão e coordenação entre diferentes formas de expressão da mesma relação, e aos Procedimentos, ao mobilizar estratégias como a identificação do valor unitário e a modelagem por meio de uma função do tipo y=kx.

A Figura 3 apresenta representação gráfica da relação entre massa e preço configura-se como uma semirreta com origem no ponto (0,0), evidenciando proporcionalidade direta entre as grandezas. A partir dos dados da tabela, infere-se uma função linear cujo coeficiente k corresponde ao preço por quilograma, interpretação que fundamenta a determinação de valores não explicitados na tabela, conforme solicitado nos itens (c) e (d). O item (e) amplia o escopo conceitual da situação ao introduzir a promoção “leve 3 kg pelo preço de 2 kg”. Nesse caso, o gráfico deixa de preservar a invariância da razão entre preço e massa, evidenciando a ruptura da proporcionalidade (Figura X). A análise dessa modificação possibilita investigar conhecimentos relacionados às definições e propriedades das relações proporcionais, bem como à sua fenomenologia, ao exigir que o participante avalie se as condições do contexto mantêm ou não a estrutura multiplicativa característica da proporcionalidade.

Figura 3 – Gráfico das relações propostas na Situação 3.



Fonte: Elaboração própria (2025).

A partir das situações propostas na "Tarefa do aluno" que compõe a TpF, os professores deveriam responder a três questões: (1) Resolva as situações por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino); (2) Para resolver os três problemas, é utilizada a mesma forma de pensar ou formas diferentes? Justifique; (3) Crie um problema que envolva o mesmo raciocínio matemático, mas matematicamente distinto dos três problemas dados, e resolva-o. O que leva os quatro problemas a serem distintos?

Cada uma dessas questões foi concebida para acessar dimensões específicas do subdomínio KoT, especialmente no que se refere a procedimentos, registros de representação e fenomenologia da proporcionalidade. A Questão 1 buscou analisar as estratégias mobilizadas na resolução das situações, com ênfase nas estratégias adotadas (KoT – Procedimentos) e nos registros de representação utilizados (KoT – Registros de Representação), investigando se os participantes evidenciavam compreensão das relações proporcionais para além da aplicação algorítmica.

As Questões 2 e 3 focalizaram a dimensão fenomenológica do KoT. Enquanto a Questão 2 enfatizou a compreensão das estruturas dos diferentes tipos de problemas, ao demandar o reconhecimento de distintas manifestações da proporcionalidade, a Questão 3 deslocou o foco para a produção de uma nova situação pertencente a uma classe de problemas distinta, permitindo analisar se os participantes compreendiam como a proporcionalidade pode assumir diferentes configurações estruturais e contextuais.

A análise dos dados será realizada por meio da metodologia da Análise de Conteúdo de Bardin (2011), a partir das categorias pré-definidas pertencentes ao KoT. No Quadro 2, apresentamos uma síntese dos conhecimentos que se esperava que fossem mobilizados e/ou desenvolvidos pelos participantes ao longo da implementação e discussão da TpF.

Quadro 2 – Conhecimentos esperados dos participantes na resolução da tarefa

Categoria	**Descritor**
KoT – Definição,	Reconhecer a razão como uma relação entre grandezas, e não como uma quantidade absoluta

propriedades e fundamentos	Reconhecer a invariância da razão como critério definidor de uma relação proporcional
KoT – Procedimentos	Mobilizar estratégias procedimentais de simplificação e recomposição de razões
	Converter razões parte-parte em razões parte-todo, preservando a proporcionalidade
	Mobilizar estratégias de conversão de unidades de medida preservando a proporcionalidade
	Mobilizar a estratégia "Busca pelo valor unitário"
	Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade
	Construir a expressão algébrica de uma relação proporcional a partir do valor unitário
	Usar a expressão algébrica da relação proporcional como ferramenta para calcular valores correspondentes entre grandezas.
KoT – Fenomenologia e aplicações	Reconhecer uma situação em que as quantidades são relativas, não absolutas
	Reconhecer que em uma situação proporcional existe uma relação constante entre as quantidades (invariância)
	Reconhecer que em uma situação proporcional as quantidades variam em conjunto (covariância)
	Reconhecer o contexto proporcional ao lidar com grandezas físicas
	Distinguir situações proporcionais e não proporcionais
	Reconhecer distintas classes de problemas que envolvem o pensamento proporcional
KoT – Registros de representação	Coordenar diferentes registros de representação de uma mesma relação proporcional
	Expressar uma relação proporcional por meio de representações gráficas
	Expressar relações proporcionais por meio de representações algébricas

Fonte: Elaboração própria (2025).

A tarefa foi implementada à luz das dialéticas da Teoria das Situações Didáticas (TSD), compreendendo que tarefas, isoladamente, não garantem aprendizagem, mas dependem do modo como são exploradas e institucionalizadas em sala de aula (Brocardo; Santos, 2014). A adoção da TSD possibilitou estruturar a implementação da TpF de modo a acompanhar, problematizar e sistematizar as produções dos licenciandos, articulando-as a ideias matemáticas relevantes à tarefa. Ademais, considerando que o conhecimento especializado docente não se desenvolve apenas pela prática espontânea (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013), a TSD mostrou-se pertinente por oferecer um enquadramento teórico-metodológico intencional para promover a mobilização e o aprofundamento do conhecimento matemático revelado. Além disso, estudos recentes também apontam seu potencial formativo na exploração do conhecimento especializado de futuros professores de Matemática (Silva Feitosa; Rodrigues, 2025; Rodrigues; Feitosa, 2025a).

Dessa forma, com a implementação dessa tarefa, buscou-se ampliar a investigação acerca dos conhecimentos matemáticos especializados mobilizados e/ou desenvolvidos pelos participantes no contexto formativo sobre proporcionalidade a partir de três categorias

distintas de problemas. O objetivo foi analisar como os licenciandos mobilizam o pensamento proporcional quando precisam operar com mudanças de registro, explicitar o significado das unidades envolvidas e reinterpretar uma mesma relação proporcional sob diferentes formas.

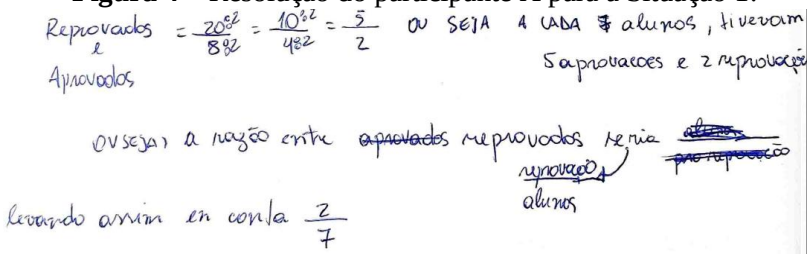
ANÁLISES E RESULTADOS

Para a organização dos resultados, inicialmente, são examinadas as resoluções individuais dos participantes para cada uma das três situações; em seguida, analisa-se a resposta sistematizada pelo grupo; e, posteriormente, discutem-se as respostas às questões reflexivas da tarefa. As análises fundamentam-se nos dados produzidos ao longo das etapas da Teoria das Situações Didáticas, contemplando as produções escritas individuais (etapa da ação), as explicações orais apresentadas durante a socialização das estratégias (etapa da formulação) e a solução construída coletivamente (etapa da validação). Ao final, apresenta-se um quadro-síntese com os conhecimentos evidenciados pelos participantes, de modo a oferecer uma visão integrada dos aspectos do MTSK mobilizados na tarefa.

Pergunta 1

Na Situação 1, os participantes A e E adotaram procedimentos semelhantes: simplificaram inicialmente a razão parte–parte entre aprovados e reprovados e, em seguida, reorganizaram-na como razão parte–todo, relacionando a quantidade de reprovados ao total de estudantes (KoT – Procedimentos) (Figura 4).

Figura 4 – Resolução do participante A para a Situação 1.

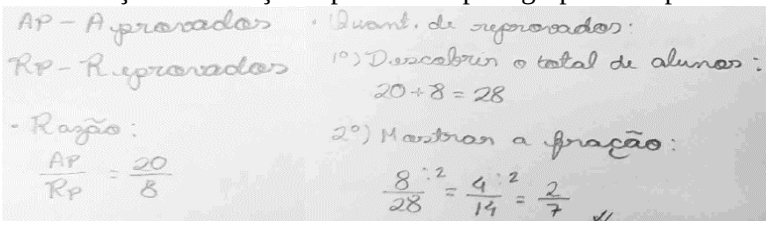


Fonte: Dados do estudo (2025).

Ao explicitar que “a cada 7 alunos, tiveram 5 aprovações e 2 reprovações”, o participante A converte a expressão simbólica em uma formulação verbal estruturada, evidenciando articulação entre registros semióticos (KoT – Registros de Representação) e compreensão da razão como relação invariável entre grandezas, e não como quantidade fixa (KoT – Definições, propriedades e fundamentos). Tal movimento indica domínio do significado relacional da razão no contexto da proporcionalidade (KoT – Fenomenologia).

A participante B não apresentou resolução, revelando dificuldade em identificar as relações necessárias à estruturação do problema. Já a participante C, cuja produção foi selecionada para a etapa de validação (Figura 5), partiu da razão entre aprovados e reprovados, determinou o total representado por essa relação e, posteriormente, estabeleceu a fração correspondente à quantidade de reprovados (KoT – Procedimentos), mobilizando procedimentos equivalentes aos dos participantes A e E.

Figura 5 – Resolução da Situação 1 presentada pelo grupo na etapa da validação.

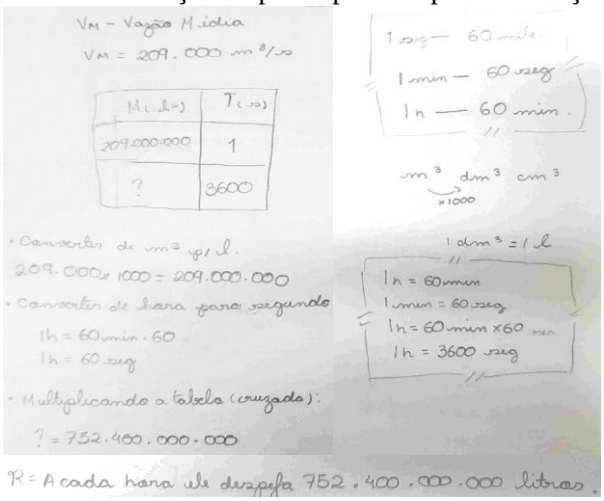


Fonte: Dados do estudo (2025).

Observa-se que os participantes A, C e E mobilizam essencialmente os mesmos conhecimentos matemáticos para resolver a Situação 1, distinguindo-se, sobretudo, pela ordem dos procedimentos adotado. Tais diferenças não indicam compreensões matemáticas distintas, mas modos diversos de organizar os procedimentos envolvidos na resolução do problema. Além disso, salienta-se a profundidade conceitual do conhecimento do participante A com respeito ao significado da razão como uma relação entre grandezas e não uma quantidade absoluta.

A análise das resoluções da Situação 2 indicou que as principais dificuldades dos participantes não estavam diretamente relacionadas à estrutura proporcional do problema, mas a fragilidades conceituais relativas às grandezas envolvidas e às conversões de unidades. Esse achado encontra respaldo em Oliveira (2025), que evidencia a persistência de dificuldades conceituais sobre unidades de medida e conversões ao longo da escolarização, inclusive no ensino superior. Após intervenções pontuais, todos conseguiram concluir a resolução (Figura 6), mobilizando multiplicação e conversões de unidades como estratégias centrais (KoT – Procedimentos), sugerindo que os obstáculos se vinculavam mais à compreensão do significado das unidades e do conceito de vazão do que ao uso do pensamento proporcional.

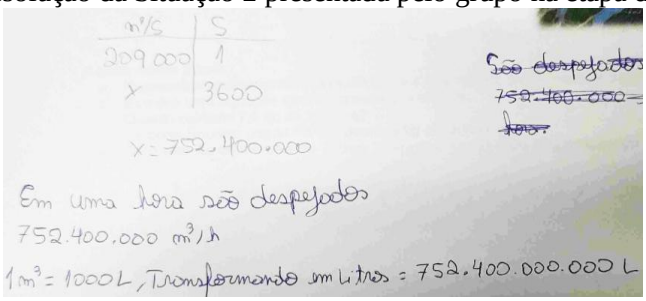
Figura 6 – Resolução da participante C para a Situação 2.



Fonte: Dados do estudo (2025).

Nessa situação, B e C iniciaram pela conversão de metros cúbicos para litros, enquanto A e E converteram inicialmente a unidade de tempo, organizando as grandezas em tabelas para explicitar as relações envolvidas (KoT – Registros de Representação), sendo a resolução deste último a escolhida para ser apresentada na etapa da validação (Figura 7). Apesar das diferenças na sequência dos procedimentos, as resoluções evidenciam domínio operatório na articulação entre fatores multiplicativos e equivalências de unidades.

Figura 7 – Resolução da Situação 2 presentada pelo grupo na etapa da validação.

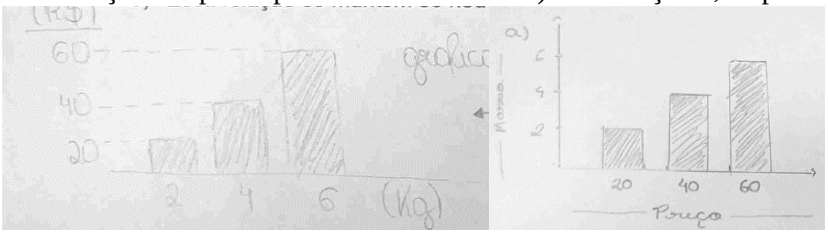


Fonte: Dados do estudo (2025).

Observando as figuras, evidencia-se fragilidades recorrentes no controle do significado dimensional dos resultados. Registros com unidades incompletas ou combinadas de forma inadequada, bem como dificuldades em avaliar a plausibilidade do valor obtido, indicam dissociação entre o tratamento numérico e a interpretação das grandezas envolvidas. Tais indícios sugerem que, embora os participantes tenham acionado corretamente procedimentos proporcionais (KoT – Procedimentos), apresentaram limitações na compreensão conceitual das unidades e de suas relações (KoT – Fenomenologia e aplicações), resultado que se alinha às evidências apresentadas por Oliveira (2025) acerca da persistência dessas dificuldades ao longo da escolarização.

No item (a) da Situação 3, observou-se que as participantes B e C representaram a relação por meio de gráficos de colunas (Figura 8). Embora essa escolha preserve a correspondência entre os valores da tabela, ela não explicita adequadamente a natureza funcional, contínua e proporcional da relação, dificultando a visualização da covariação e da invariância da razão. Tal opção evidencia fragilidades no KoT – Registros de Representação, especialmente quanto à adequação do tipo de gráfico à natureza da variável envolvida. Conforme destacam Guimarães, Gitirana e Roazzi (2001) e Fernandes, Batanero e Gea (2019), a escolha do registro gráfico condiciona a clareza comunicativa e a interpretação das relações entre variáveis, sendo fundamental considerar o tipo de fenômeno representado.

Figura 8 – Solução das participantes B e C ao item a) da Situação 3, respectivamente.



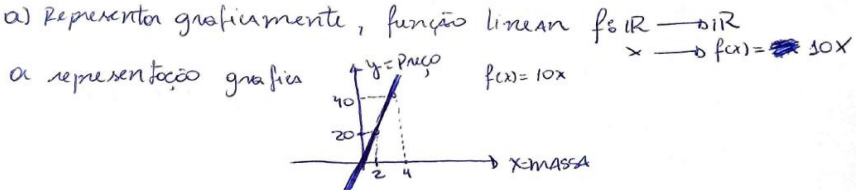
Fonte: Dados do estudo (2025).

O participante E, por sua vez, descreveu verbalmente o gráfico como uma reta passando pela origem e por pontos coerentes com a relação proporcional. Embora a descrição revele compreensão conceitual da proporcionalidade direta, a ausência da representação efetiva limita a análise do KoT – Registros de Representação, pois não permite observar elementos estruturais do registro gráfico.

Já o participante A, cuja resolução foi a apresentada pelo grupo na etapa da validação, modelou a situação por meio da função f(x)=10x, articulando linguagem algébrica, representação gráfica e interpretação verbal (Figura 9). Essa resolução evidencia domínio do KoT – Registros de Representação, ao transitar entre diferentes formas semióticas, e do KoT – Fenomenologia e aplicações, ao compreender a relação proporcional como modelo funcional de um fenômeno cotidiano. O prolongamento da reta para além do domínio contextual não compromete a identificação da proporcionalidade, mas indica certa fragilidade na adequação do modelo às restrições da situação concreta, aspecto discutido na institucionalização.

> **Participante (A)***: Eu representei graficamente uma função linear que vai de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$*, onde a lei de associação é 10x, que é uma função linear. Então, tecnicamente eu botei o preço em função da massa, então a minha f de x seria 10x.*

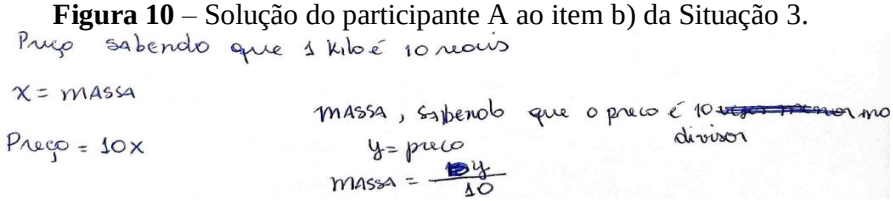
Figura 9 – Resolução do item a) da Situação 3 apresentada pelo grupo na etapa da validação.



Fonte: Dados do estudo (2025).

No item (b), os participantes A, C e E expressaram corretamente a relação entre massa e preço por meio de uma igualdade do tipo y=10x, ainda que com variações na notação adotada, sendo a resolução de E a apresentada na etapa da validação. As produções evidenciam a compreensão da proporcionalidade como relação funcional, em que o coeficiente 10 atua como constante de proporcionalidade, articulando as duas grandezas envolvidas. Observa-se, nesse processo, a mobilização do KoT – Registros de Representação, na passagem do registro tabular ao algébrico, e do KoT – Procedimentos, ao identificar o valor unitário e utilizá-lo na construção da expressão multiplicativa. Destaca-se a resolução do participante A (Figura 10), que manipulou algebricamente a expressão, explicitando relações equivalentes, o que indica maior coordenação entre representações e compreensão mais elaborada da estrutura funcional.

Figura 10 – Solução do participante A ao item b) da Situação 3.



Fonte: Dados do estudo (2025).

A participante B, por sua vez, registrou a equação $5x^2+4x+20=120$, incompatível com a relação proporcional esperada. A ausência de justificativa ou validação da expressão impede a reconstrução de seu percurso cognitivo, mas sinaliza fragilidade na identificação da natureza linear da relação entre as variáveis. Tal aspecto foi retomado na institucionalização, quando se discutiu coletivamente a adequação das representações algébricas à estrutura proporcional da situação.

Nos itens c) e d) da Situação 3, os participantes foram convidados a mobilizar conhecimentos relativos à mesma relação proporcional entre preço e quantidade de bananas, porém a partir de demandas inversas. No item c), solicitou-se a determinação do valor correspondente a 7,5 kg, aproximando-se do uso direto da razão. Já no item d), exigiu-se a identificação da quantidade de bananas associada a um valor monetário dado, implicando a

inversão da relação ou um pensamento funcional mais explícito, conforme discute Lamon (2012). Embora ambos os itens pudessem ser resolvidos a partir da expressão algébrica construída no item b), as resoluções evidenciaram diferentes modos de mobilização dos conhecimentos relacionados à proporcionalidade.

No item c), o participante A utilizou a estratégia escalar a partir do valor unitário, obtendo corretamente R$ 75,00. A participante C construiu uma tabela (KoT – Registro de representação) e afirmou ter utilizado a estratégia de busca pelo valor unitário, multiplicando R$ 10,00 por 7,5 (Figura 11). Ainda que não tenha recorrido explicitamente à expressão algébrica previamente construída, seu procedimento estabelece uma relação funcional entre as variáveis, sendo matematicamente equivalente ao uso da expressão.

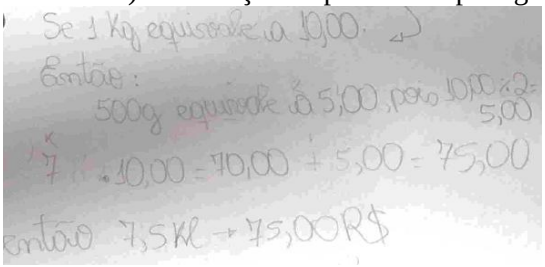
Figura 11 – Solução dos participantes A e C ao item c) da Situação 3, respectivamente.



Fonte: Dados do estudo (2025).

O participante E resolveu o problema por dois caminhos: por meio de tabela e regra de três e também substituindo o valor na expressão algébrica. A duplicidade de procedimentos evidencia flexibilidade estratégica. A participante B, que não havia formalizado corretamente a relação no item b), mobilizou uma estratégia escalar menos formalizada (KoT – Procedimentos), determinando o valor unitário e decompondo 7,5 kg em 7 kg + 0,5 kg. Embora menos sintético, seu procedimento revela raciocínio multiplicativo consistente, sendo inclusive selecionado para a etapa de validação (Figura 12).

Figura 12 – Resolução do item c) da Situação 3 apresentada pelo grupo na etapa da validação.

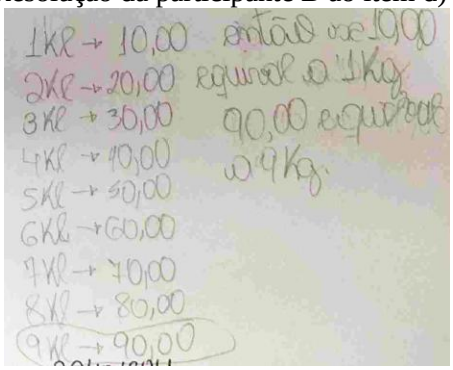


Fonte: Dados do estudo (2025).

No item d), a inversão da relação tornou mais evidente a diferença entre operar numericamente e mobilizar uma generalização algébrica. O participante A novamente utilizou estratégia escalar. Os participantes C (resolução apresentada na etapa da validação)

e E construíram tabelas (KoT – Registro de representação) e recorreram à regra de três para determinar a quantidade correspondente a R$ 90,00. A participante B, por sua vez, adotou procedimento iterativo (Figura 13), multiplicando sucessivamente o valor correspondente a 1 kg até atingir o montante desejado.

Figura 13 – Resolução da participante B ao item d) da Situação 3.



Fonte: Dados do estudo (2025).

Esse último procedimento sugere dificuldade em generalizar a relação proporcional, coerente com o desempenho apresentado no item b). A regularidade é reconhecida, mas não formalizada simbolicamente, indicando fragilidades nas categorias KoT – Registro de representação e KoT – Definição, propriedades e fundamentos.

De modo geral, a análise conjunta dos itens c) e d) revela que, embora a expressão algébrica tenha sido construída corretamente no item b), ela não foi mobilizada como ferramenta operatória nas resoluções subsequentes. Predominou o uso de estratégias numéricas e proporcionais, sugerindo que a produção de uma expressão algébrica não implica, necessariamente, sua utilização funcional. Tal evidência aponta para uma compreensão da álgebra ainda dissociada das estratégias aritméticas consolidadas, resultado alinhado a estudos que indicam dificuldades na coordenação entre registros e na atribuição de significado operacional às expressões algébricas em contextos proporcionais (Costa; Allevato, 2015).

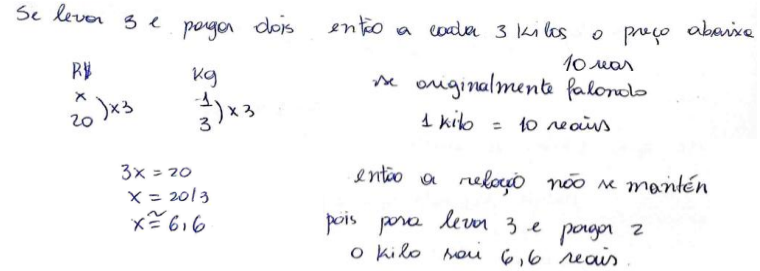
Assim, mesmo em situações que favorecem uma abordagem algébrico-funcional, o raciocínio dos participantes permaneceu predominantemente ancorado na proporcionalidade aritmética, o que dificulta o reconhecimento da função linear como expressão formal da fenomenologia da proporcionalidade.

Por fim, item e) da Situação 3 não induz diretamente a um erro de proporcionalidade, mas cria condições para evidenciar a aplicação indevida de esquemas proporcionais previamente consolidados. Ao confrontarem o resultado obtido com o novo contexto, os participantes são levados a perceber que o invariante multiplicativo é rompido. Assim, o

item e) atua como dispositivo de problematização conceitual, favorecendo a reflexão sobre os limites de validade da proporcionalidade e explicitando processos de supergeneralização.

Observa-se que todos os participantes reconheceram que a relação proporcional não se mantém no contexto da promoção (KoT – Fenomenologia e aplicações). O participante A recorreu à estratégia de busca pelo valor unitário para determinar a nova razão – 3 kg por R$ 20,00 – e a comparou com a razão inicial (KoT – Procedimentos) (Figura 14). Ao estabelecer essa comparação, mobiliza explicitamente a invariância da razão como critério para decidir sobre a manutenção da proporcionalidade (KoT – Definição, propriedades e fundamentos).

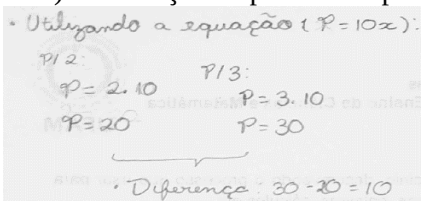
Figura 14 – Resolução do participante A ao item e) da Situação 3.



Fonte: Dados do estudo (2025).

A participante C, cuja solução foi apresentada na etapa de validação (Figura 15), utilizou a expressão algébrica construída no item b) para calcular os valores correspondentes a 2 kg e 3 kg, identificando uma diferença de R$ 10,00 entre eles. Concluiu, então, que a proporcionalidade não se mantém, pois, na promoção, não há variação de preço entre essas quantidades. Ao testar valores por meio da expressão algébrica (KoT – Procedimentos), articula os registros algébrico e numérico (KoT – Registros de representação), utilizando a relação funcional como ferramenta de análise.

Figura 15 – Resolução do item e) da Situação 3 apresentada pelo grupo na etapa da validação.



Fonte: Dados do estudo (2025).

O participante E, embora não tenha realizado cálculos explícitos, afirmou que a proporcionalidade não se manteria, evidenciando compreensão conceitual do princípio da constância da razão (KoT – Definição, propriedades e fundamentos). Já a participante B, ainda que sem explicitação formal, identificou a igualdade de preço para quantidades

distintas como elemento central da situação, o que indica reconhecimento intuitivo da ruptura do invariante proporcional (KoT – Fenomenologia e aplicações).

De modo geral, o item e) favoreceu a mobilização da invariância da razão como critério definidor das relações proporcionais. As diferentes estratégias – comparações numéricas, uso da expressão algébrica e argumentos conceituais sem apoio em cálculos – evidenciam distintos níveis de formalização desse conhecimento e a capacidade dos participantes de reconhecer os limites da aplicação automática da proporcionalidade em contextos que rompem tal invariante.

Pergunta 2

Embora as três situações envolvessem o pensamento proporcional, cada uma demandava formas distintas de mobilização desse conhecimento: a Situação 1 centrava-se na conversão entre razões, taxas e frações; a Situação 2 exigia articulação entre unidades de medida; e a Situação 3 envolvia translação entre diferentes registros de representação. Reconhecer tais diferenças relaciona-se à categoria KoT – Fenomenologia e aplicações.

As respostas dos participantes indicam que todos perceberam que as situações não requeriam exatamente o mesmo tipo de raciocínio. Entretanto, suas justificativas permaneceram predominantemente vinculadas às estratégias empregadas, e não à estrutura matemática subjacente. A conversão de unidades, associada à Situação 2, foi o principal elemento mobilizado para explicar as diferenças, como evidenciado nas falas que destacam "unidades diferentes" ou a necessidade de "lembrar da conversão".

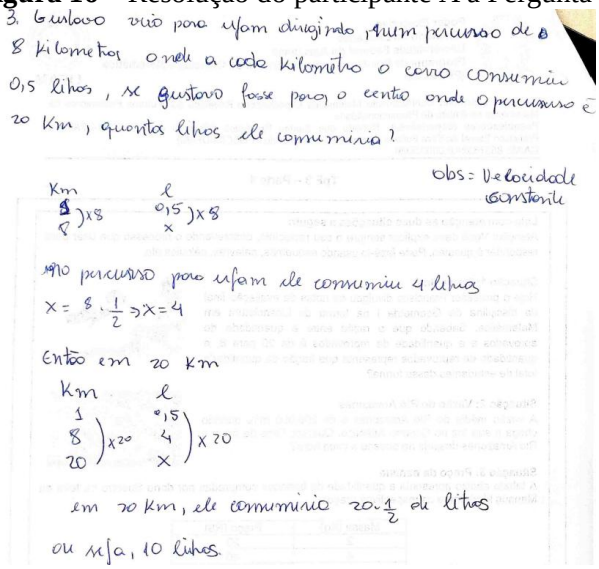
Apesar desse reconhecimento inicial, não houve explicitação de que a conversão entre unidades se sustenta em relações proporcionais, tampouco foram diferenciadas as classes de problemas do pensamento proporcional envolvidas em cada situação. Assim, observa-se que os participantes identificam variações no "modo de resolver", mas ainda não articulam de forma explícita o tipo de relação proporcional mobilizado em cada contexto. Esse resultado indica um conhecimento situado no âmbito do KoT – Fenomenologia e aplicações, porém ainda pouco formalizado, marcado pelo reconhecimento de diferenças contextuais sem explicitação das estruturas matemáticas que as fundamentam.

Pergunta 3

A Pergunta 3 solicitava a elaboração de um problema matematicamente distinto dos três apresentados, mas que mobilizasse o pensamento proporcional. Para isso, era necessário reconhecer as características estruturais das diferentes classes de problemas discutidas ao

longo das TpF e formular uma nova situação pertencente a outra classe. Entretanto, apenas o participante o participante A conseguiu propor um problema, o qual pertence à classe *problema de valor omisso* (Lesh; Post; Behr, 1988), resolvendo-o por meio de estratégia escalar (Figura 16). Observa-se que a situação elaborada retoma precisamente a classe de problemas com a qual estudantes e professores tendem a demonstrar maior familiaridade, possivelmente em razão de sua ampla presença em livros didáticos e nas aulas de matemática, quando comparada às demais classes, bem como de sua recorrência nas pesquisas sobre pensamento proporcional (Lesh; Post; Behr, 1988).

Figura 16 – Resolução do participante A à Pergunta 3.



Fonte: Dados do estudo (2025).

Esse resultado sugere que, embora consigam reconhecer diferenças entre problemas quando estes lhes são apresentados, os participantes ainda não se apropriaram das distintas classes como organizadoras conceituais do pensamento proporcional. A dificuldade em produzir uma situação pertencente a outra classe indica uma apropriação ainda incipiente do KoT – Fenomenologia e aplicações, especialmente no que se refere à identificação e mobilização consciente das diferentes estruturas de problemas proporcionais.

No Quadro 3, sintetizamos os conhecimentos manifestados por todos os participantes durante a resolução da Tarefa, oferecendo, dessa forma, um panorama geral.

Quadro 3 – Conhecimento revelado pelos participantes em relação à problemas de conversão, de unidades de medida e números e de translação no âmbito da proporcionalidade.

Categoria	Descritor	Participante
	Reconhecer a razão como uma relação entre grandezas, e não como quantidade absoluta	A

KoT – Definição, propriedades e fundamentos	Reconhecer a invariância da razão como critério definidor de uma relação proporcional	A, B, C e E
KoT – Procedimentos	Mobilizar estratégias procedimentais de simplificação e recomposição de razões	A, C e E
	Converter razões parte-parte em razões parte-todo, preservando a proporcionalidade	A, C e E
	Mobilizar estratégias de conversão de unidades de medida preservando a proporcionalidade	A, B, C e E
	Mobilizar a estratégia "Busca pelo valor unitário"	A e C
	Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade	A, B, C e E
	Construir a expressão algébrica de uma relação proporcional a partir do valor unitário	A, C e E
	Usar a expressão algébrica da relação proporcional como ferramenta para calcular valores correspondentes entre grandezas.	C e E
	Usar a *estratégia escalar* para resolver problemas de proporcionalidade	A e B
	Usar a *regra de três* para resolver problemas de proporcionalidade	C, E
	Comparar razões unitárias para verificar a manutenção da proporcionalidade	A
KoT – Fenomenologia e aplicações	Reconhecer uma situação em que as quantidades são relativas, não absolutas	A
	Reconhecer que em uma situação proporcional existe uma relação constante entre as grandezas (invariância)	A, B, C e E
	Reconhecer que em uma situação proporcional as grandezas variam em conjunto (covariância)	A
	Distinguir situações proporcionais e não proporcionais	A, B, C e E
	Reconhecer distintas classes de problemas que envolvem o pensamento proporcional	A[3]
KoT – Registros de representação	Coordenar diferentes registros de representação de uma mesma relação proporcional	A
	Expressar uma relação proporcional por meio de representações gráficas	A
	Expressar relações proporcionais por meio de representações algébricas	A, C e E
	Organizar as grandezas e seus respectivos valores em tabelas	A, C e E
	Expressar a razão em linguagem natural	A
	Utilizar representações esquemáticas para conversão de unidades com fator multiplicativo	C
	Utilizar a linguagem funcional para representar uma relação proporcional	A

Fonte: Elaboração própria (2025).

A comparação entre o Quadro 2, de conhecimentos esperados, e o Quadro 3, de conhecimentos efetivamente mobilizados evidencia que a tarefa cumpriu seus objetivos

[2] Apesar de o participante elaborar um problema pertencente a uma classe distinta dos problemas trabalhados na tarefa, não identificou o que leva os quatro problemas a serem distintos.

formativos. A maioria dos descritores previstos foi mobilizada ao longo da tarefa, indicando coerência entre o planejamento e a dinâmica conceitual observada.

No subdomínio KoT – Definição, propriedades e fundamentos, os participantes reconheceram a invariância da razão como critério definidor da proporcionalidade, especialmente nas situações que rompiam essa relação. Contudo, a explicitação da razão como relação entre grandezas, e não apenas como resultado numérico, apareceu de forma menos sistemática, sugerindo diferentes níveis de consolidação conceitual.

No KoT – Procedimentos, praticamente todos os descritores previstos foram mobilizados, como simplificação de razões, busca do valor unitário, conversão de unidades e construção de expressões algébricas. Entretanto, a análise revela distinções entre produzir e mobilizar operativamente certos conhecimentos, como no caso da expressão algébrica, construída por alguns participantes, mas efetivamente utilizada por menos deles. Além disso, emergiram procedimentos não previstos inicialmente, como estratégia escalar e regra de três, ampliando a compreensão sobre os repertórios acionados.

No âmbito da Fenomenologia e aplicações, os participantes distinguiram situações proporcionais e não proporcionais e utilizaram a invariância como critério de validação, atendendo ao que fora proposto pela tarefa. Contudo, a organização conceitual das diferentes classes de problemas não foi explicitada, o que indica que a identificação das situações ainda se apoia mais em critérios operatórios do que em sistematizações teóricas.

Embora nem todos os participantes tenham mobilizado todos os descritores previstos, a dinâmica coletiva, estruturada segundo princípios da Teoria das Situações Didáticas, favoreceu a circulação dos conhecimentos nas etapas de formulação e validação. Assim, mesmo quando determinados descritores aparecem concentrados em participantes específicos, eles passaram a compor o espaço comum de discussão.

Desse modo, a análise comparativa não apenas confirma a eficácia da tarefa na mobilização dos conhecimentos previstos, como também evidencia a emergência de descritores não antecipados e a existência de diferentes níveis de articulação entre os subdomínios do KoT, especialmente quanto à formalização conceitual e à coordenação entre registros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo buscou investigar os conhecimentos matemáticos especializados mobilizados e/ou desenvolvidos por futuros professores ao lidar com problemas que envolvem o pensamento proporcional – problemas de conversão; envolvendo unidades de medida e números; de translação – a partir de uma tarefa intencionalmente construída para

revelar tais conhecimentos. Os resultados evidenciam que os participantes mobilizam um repertório diversificado de estratégias, como busca pelo valor unitário, procedimentos escalares, conversões entre razões e unidades e, em alguns casos, construção de expressões algébricas. Essa diversidade indica a presença de conhecimentos relevantes do pensamento proporcional, especialmente no âmbito procedimental.

Entretanto, a análise revela que tais conhecimentos se distribuem de forma desigual e apresentam distintos níveis de formalização e generalização. Embora os participantes reconheçam quando uma relação proporcional se mantém ou se rompe, mobilizando o princípio da invariância da razão como critério, a organização conceitual das diferentes classes de problemas mostrou-se frágil. Ainda que percebam diferenças entre as situações propostas, essas distinções são justificadas predominantemente com base no contexto ou nas estratégias utilizadas, e não a partir da estrutura matemática subjacente ou do enfoque característico de cada classe de problema. Esse resultado sugere que o reconhecimento fenomenológico das situações não está plenamente articulado a uma compreensão estrutural do pensamento proporcional.

A tarefa foi concebida com a intencionalidade de tornar visíveis os conhecimentos mobilizados pelos participantes; contudo, foi sua organização segundo os princípios da Teoria das Situações Didáticas que potencializou esse processo. As etapas de formulação, validação e institucionalização criaram condições para que os conhecimentos não apenas emergissem, mas fossem explicitados, confrontados e reelaborados coletivamente. A discussão em grupo na fase de formulação favoreceu a explicitação de estratégias e critérios de decisão; a apresentação e problematização das resoluções na etapa de validação ampliaram o repertório compartilhado; e a institucionalização permitiu sistematizar e formalizar os invariantes e estruturas matemáticas subjacentes às situações. Assim, ainda que os descritores tenham sido mobilizados de forma desigual no plano individual, a dinâmica coletiva possibilitou sua circulação e problematização, promovendo um nível de reflexão que dificilmente se constituiria em um trabalho isolado.

A etapa de institucionalização assumiu, nesse processo, papel central, ao permitir a sistematização, o refinamento conceitual e a explicitação das estruturas matemáticas subjacentes às situações discutidas. É nesse momento que estratégias intuitivas podem ser ressignificadas, que dúvidas são problematizadas e que os conhecimentos mobilizados são formalizados e integrados a um corpo mais organizado de saberes.

Os resultados apontam, por fim, para a necessidade de investigações futuras que aprofundem a compreensão das relações entre os conhecimentos pertencentes ao KoT e

aqueles vinculados a outros subdomínios do MTSK, como o KSM (Knowledge of the Structure of Mathematics) e o KPM (Knowledge of Practices in Mathematics). Analisar como os conhecimentos sobre proporcionalidade se articulam com compreensões estruturais mais amplas da matemática e com práticas matemáticas de argumentação, generalização e validação pode contribuir para o desenvolvimento de propostas formativas que promovam um conhecimento especializado mais integrado e consciente.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM) por meio do "Programa de Apoio à Pós-Graduação Stricto Sensu Posgrad/Fapeam/2024-2025".

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Alessandra; RIBEIRO, Miguel. Potencialidades de uma tarefa para promover o conhecimento especializado do professor no tópico frações. **ACERVO-Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, v. 3, p. 1-18, 2021. https://doi.org/10.55928/ACERVO.2675-2646.2021.3.31

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BIANCHINI, Bárbara Lutaif; LIMA, Gabriel Loureiro de. (Org.). **O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. 3. ed. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2023.

BROCARDO, Joana; SANTOS, L. Tarefas matemáticas. **Investigação em Educação Matemática**, p. 3-4, 2014.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques (Revue)**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986. Disponível em: https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/. Acesso em: 28, fev. 2026.

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; MONTES, Miguel; CONTRERAS, Luis; FLORES-MEDRANO, Eric, ESCUDERO-ÁVILA, Dinazar; VASCO, Diana; ROJAS, Nielka; FLORES, Pablo; AGUILARGONZÁLEZ, Álvaro; RIBEIRO, Miguel; MUÑOZ-CATALÁN, María Cinta. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

FERNANDES, José António; BATANERO, Carmen; GEA, María M. Escolha e aplicação de métodos estatísticos por futuros professores dos primeiros anos. *In:* III Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística, **Anais...** III CIVEEST**.** 2019. Disponível em: https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/55213/fernandes_batanero_gea.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 14, fev. 2026.

FLÔRES, Aparecido; GUSMÃO, Tânia Cristina. Processos de pensamentos ativados na resolução de tarefas matemáticas Standards e Não Standards. **Intermaths**, v. 3, n. 1, p. 183-209, 2022. https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10987

FUENTES LEAL, Christian Camilo. **El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la proporcionalidad: un estudio de caso**. 2020. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias y Filosofía) – Departamento de Didácticas Integradas, Universidad de Huelva, Huelva, 2020. Disponível em: https://ariasmontano.uhu.es/rest/api/core/bitstreams/26c5e101-5860-4e46-b91b-5a57edd87526/content. Acesso em: 28, fev. 2026.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. (7. Ed.). São Paulo, SP: Editora Atlas SA, 2022.

GUIMARÃES, Gilda Lisbôa; GITIRANA, Verônica; ROAZZI, Antônio. Interpretando e construindo gráficos. *In:* XXIV Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação GT-Educação Matemática, **Anais...** XXIV Reunião Nacional da ANPEd. 2001. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/interpretando.pdf. Acesso em: 14, fev. 2026.

LESH, Richard; DOERR, Helen. Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. *In:* LESH, Richard; DOERR, Helen M. (Orgs.). **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2003. p. 3-34. https://doi.org/10.4324/9781410607713

LESH, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. Proportional reasoning. *In:* HIEBERT, James; BEHR, Merlyn. (Orgs.). **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118. Disponível em: https://www.yumpu.com/pt/document/read/34041654/lesh-post-behr-raciocinio-proporcional-pt-pdf. Acesso em: 10, jun. 2025.

NOELTING, Gerald. The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I – Differentiation of stages. Educational Studies in Mathematics, v. 11, 1980, p. 217-253. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/3481919. Acesso em: 28, fev. 2026.

OLIVEIRA, Edvanilson; LINS, Abigail; PEREIRA, Patrícia. Raciocínio proporcional: uma discussão com base nas dimensões epistêmicas do saber. *In:* XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, **Anais...** XIII ENEM. 2019.

OLIVEIRA, Wesley Alves de. **As dificuldades no aprendizado de unidades de medidas e seus impactos na vida escolar e acadêmica**. 2025. 47 f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Física) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2025. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/80018. Acesso em: 13, fev. 2026.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Proporcionalidade através da resolução de problemas no curso superior de licenciatura em matemática. *In:* VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, **Anais...** VI SIPEM. 2015.

PAULA, Enio Freire de; PAZUCH, Vinícius; MAZZI, Lucas Carato. Conhecimentos próprios da docência na Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação Matemática**,

v. 20, n. Edição Especial, p. e023090-e023090, 2023. https://doi.org/10.37001/remat25269062v20id366

RIBEIRO, Miguel; ALMEIDA, Alessandra; MELLONE, Maria. Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021. https://doi.org/10.46312/pem.v14i35.13263

RIBEIRO, Miguel; MELLONE, Maria; JAKOBSEN, Arne. Give sense to students' productions: a particular task in teacher education. *In:* XII International Symposium Elementary Maths Teaching, **Proceedings...** XII SEMT. 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258960100_Give_sense_to_students'_productions_a_particular_task_in_teacher_education. Acesso em: 28, fev. 2026.

RODRIGUES, Roberta dos Santos; FEITOSA, Francisco Eteval da Silva Eteval da Silva. Contributos de uma situação didática para o desenvolvimento do conhecimento especializado para o ensino de semelhança de triângulos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (Revemat)**, v. 20, p. 1-25, 2025a. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2025.e103156

RODRIGUES, Roberta dos Santos; FEITOSA, Francisco Eteval da Silva Eteval da Silva. Ensino e aprendizagem de proporcionalidade: algumas reflexões a partir de um mapeamento sistemático. Ensino da Matemática em Debate, [S. l.], v. 12, n. 3, p. 51–74, 2025b. https://doi.org/10.23925/2358-4122.71486

SCHOENFELD, Alan Henry. Models of the Teaching Process. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 18, n. 3, p. 243-261, 2000. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00031-0

SILVA, Angélica da Fountura; LOPES, Sandra Cristina; PIETROPAOLO, Ruy Cesar; CAMPOS, Tânia Maria. Conhecimentos profissionais explicitados por uma professora ao ensinar proporcionalidade. *In:* VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, **Anais...** VII SIPEM. 2018.

SILVA, Caroline; RIBEIRO, Miguel. Conhecimento Interpretativo do professor de matemática no âmbito das transformações geométricas e simetria. *In:* MENEZES, Sandra; RIBEIRO, Miguel. (Orgs.). **Pensar e fazer pesquisa na formação de professores com foco no conhecimento interpretativo e especializado do professor**. Campinas: Cognoscere, 2023. p. 181-195.

SILVA FEITOSA, Francisco Eteval; RODRIGUES, Roberta. Conhecimento especializado de futuros professores de matemática sobre os conceitos de área e perímetro de figuras planas. **Educação Matemática em Revista - RS**, [S. l.], v. 1, n. 26, 2025. https://doi.org/10.37001/EMR-RS-v.1-n.26-2025.4474

SILVESTRE, Ana Isabel; PONTE, João Pedro da. Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. **Interacções**, v. 8, n. 20, p. 70-97, 2012. Disponível em: https://www.academia.edu/39173175/Proporcionalidade_directa_no_6_o_ano_de_escolaridade_Uma_abordagem_explorat%C3%B3ria. Acesso em: 28, fev. 2026.

STAKE, Robert Edward. **Qualitative case studies**. New York: Oxford University Press, 2005.

TRIVILIN, Linéia Ruiz; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, p. 38-59, 2015. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a03

6 METASSÍNTESE

O capítulo anterior apresentou os resultados e as discussões desenvolvidos nos quatro papers que compõem esta dissertação, organizados de forma progressiva, acompanhando o próprio percurso investigativo. Inicialmente, o mapeamento sistemático possibilitou compreender mais profundamente o ensino e a aprendizagem da proporcionalidade, identificando obstáculos e dificuldades recorrentes apontados na literatura. Em seguida, dois artigos de natureza diagnóstica analisaram o conhecimento matemático especializado revelado por licenciandos em Matemática diante de diferentes situações envolvendo pensamento proporcional, permitindo mapear conhecimentos mobilizados e fragilidades presentes antes da intervenção formativa. Por fim, o quarto artigo investigou a mobilização e o desenvolvimento desses conhecimentos no contexto das Tarefas para Formação, evidenciando transformações decorrentes da participação dos futuros professores em um ambiente formativo estruturado.

Desse modo, os estudos apresentados não constituem análises isoladas, mas etapas complementares de um mesmo percurso investigativo, cuja integração é realizada neste capítulo por meio da metassíntese, na qual os achados são retomados, articulados e interpretados de forma conjunta.

A organização deste capítulo segue a lógica das subquestões que orientaram o desenvolvimento da pesquisa, favorecendo a articulação progressiva dos resultados produzidos nos diferentes estudos. Assim, os subcapítulos são estruturados a partir de cada subquestão investigada. Inicialmente, apresenta-se a metassíntese do mapeamento sistemático, destacando os obstáculos e dificuldades relacionados ao ensino e à aprendizagem da proporcionalidade identificados na literatura.

Na sequência, discutem-se de forma integrada os resultados da avaliação diagnóstica, buscando evidenciar tanto as fragilidades quanto os conhecimentos matemáticos especializados revelados pelos futuros professores, em diálogo com as categorias anteriormente identificadas. Essa organização possibilita a construção de uma interpretação articulada dos achados, culminando em uma resposta integrada à questão central da pesquisa.

6.1 SUBQUESTÃO 1 – OBSTÁCULOS E DIFICULDADES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROPORCIONALIDADE

A primeira subquestão desta pesquisa — *O que revelam as pesquisas sobre os obstáculos e dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do tópico proporcionalidade?* — foi investigada por meio de um mapeamento sistemático da literatura, cujo objetivo consistiu em delinear um panorama das pesquisas publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais da área de Educação Matemática acerca do ensino e da aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade. Embora o estudo tenha contemplado diferentes dimensões das investigações analisadas, como referenciais teóricos, teorias de aprendizagem mobilizadas ao se trabalhar com proporcionalidade e recursos pedagógicos comumente utilizados, interessa particularmente, no contexto desta metassíntese, o conjunto de resultados relacionados aos obstáculos e dificuldades recorrentes identificados na literatura, uma vez que tais elementos passaram a orientar tanto a construção da avaliação diagnóstica quanto o planejamento do contexto formativo.

Nesse sentido, a retomada do mapeamento neste capítulo assume caráter interpretativo, buscando evidenciar como as dificuldades identificadas na literatura dialogam com os conhecimentos posteriormente revelados e mobilizados pelos futuros professores participantes da pesquisa. Assim, o foco recai sobre as fragilidades conceituais e didáticas sistematizadas no estudo, compreendidas aqui como referências analíticas para a articulação dos diferentes momentos investigativos que compõem esta dissertação.

A análise do *corpus* investigado possibilitou a organização das dificuldades evidenciadas em seis categorias analíticas (Quadro 11), que sintetizam aspectos recorrentes relacionados ao ensino e à aprendizagem da proporcionalidade. Essas categorias, apresentadas originalmente no artigo do mapeamento, são retomadas a seguir por constituírem o eixo de articulação entre os resultados da literatura e os achados empíricos desta pesquisa.

Quadro 11 – Categorias de obstáculos e dificuldades que emergiram do mapeamento.

Categoria	**Citada em quantos trabalhos**
Confusão entre raciocínio aditivo e multiplicativo	3

Dificuldade com a constante de proporcionalidade	3
Obstáculos relacionados às operações matemáticas e temas prévios e subjacentes ao pensamento proporcional	4
Dificuldades na interpretação de grandezas e tipos de quantidades	3
Ensino mecanizado e falta de compreensão conceitual	5
Engajamento e dificuldades na resolução de problemas	7

Fonte: Adaptado de Rodrigues e Feitosa (2025c).

Os resultados do mapeamento sistemático permitem afirmar que as pesquisas analisadas convergem ao evidenciar que as dificuldades relacionadas à proporcionalidade não se restringem a erros procedimentais pontuais, mas estão associadas a obstáculos conceituais, especialmente aqueles vinculados à distinção entre raciocínio aditivo e multiplicativo, à compreensão de razões e proporções e à interpretação de diferentes registros de representação, que também foram observados entre os participantes dessa pesquisa. Desse modo, a primeira subquestão desta investigação é respondida ao evidenciar um conjunto estruturado de fragilidades recorrentes no ensino e na aprendizagem do tópico, organizadas nas seis categorias de dificuldades e obstáculos identificadas na literatura.

Além disso, conforme discutido nas considerações finais do estudo, os desafios identificados apontam para a necessidade de abordagens que transcendam o ensino mecanizado e favoreçam a construção de sentido sobre as relações proporcionais, uma vez que a forma como os problemas são propostos e explorados em sala de aula exerce impacto significativo na compreensão dos estudantes acerca desse tópico. Tal constatação reforça a importância de investigar não apenas as dificuldades descritas na literatura, mas também os conhecimentos efetivamente mobilizados por futuros professores quando confrontados com diferentes tipos de situações envolvendo o pensamento proporcional.

Desse modo, as dificuldades e obstáculos identificados no mapeamento constituíram o ponto de partida para a elaboração da Parte Preliminar das Tarefas para Formação (Diagnóstico), orientando tanto a seleção das situações-problema quanto os aspectos analíticos privilegiados na investigação empírica. Buscou-se, por meio do diagnóstico, verificar em que medida as fragilidades apontadas na literatura também se manifestariam no conhecimento especializado dos participantes, permitindo identificar se determinados conhecimentos eram efetivamente mobilizados ou se permaneciam como lacunas conceituais.

Nesse processo, as fragilidades evidenciadas nas resoluções foram analisadas à luz das categorias do subdomínio KoT, possibilitando aprofundar a compreensão acerca dos conhecimentos especializados revelados pelos futuros professores. Tal movimento investigativo forneceu, ainda, subsídios para o planejamento das Tarefas para Formação, concebidas com o propósito de enfrentar as fragilidades identificadas e promover a mobilização e o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado no âmbito da proporcionalidade.

Nesse sentido, o diagnóstico constitui o próximo momento investigativo desta pesquisa, no qual se buscou analisar empiricamente os conhecimentos matemáticos especializados revelados pelos participantes à luz das fragilidades identificadas na literatura.

6.2 SUBQUESTÃO 2 – CONHECIMENTOS REVELADOS SOBRE O TÓPICO PROPORCIONALIDADE

A segunda subquestão desta pesquisa — *Que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de matemática sobre o tópico proporcionalidade?* — foi investigada por meio da Parte Preliminar das Tarefas para Formação, concebida como uma avaliação diagnóstica destinada a identificar os conhecimentos prévios dos participantes, bem como as fragilidades associadas à compreensão da proporcionalidade. Embora realizada como uma única atividade composta por nove questões, suas análises foram apresentadas em dois artigos complementares (Rodrigues; Feitosa, 2025a; Rodrigues; Feitosa, no prelo), devido às limitações estruturais das revistas, mas que permitiu explorar especificidades analíticas levemente distintas em cada estudo.

Em Rodrigues e Francisco (2025a) privilegiou-se a dimensão conceitual do conhecimento matemático especializado, focalizando definições, propriedades e fundamentos relacionados à proporcionalidade, especialmente no que se refere à compreensão de razão, proporção e aos significados de proporcionalidade direta e inversa. Já Rodrigues e Francisco (no prelo) ampliou-se a análise para diferentes classes de problemas envolvendo o pensamento proporcional, permitindo examinar estratégias de resolução, formas de reconhecimento das situações proporcionais e aspectos fenomenológicos associados à identificação e interpretação das relações

entre grandezas. Considerados de forma articulada, os dois estudos possibilitam traçar um panorama integrado dos conhecimentos revelados pelos futuros professores, evidenciando tanto saberes já consolidados quanto lacunas conceituais e procedimentais, posteriormente relacionadas às categorias do subdomínio KoT e analisadas à luz das dificuldades apontadas no mapeamento sistemático.

A síntese dos resultados do diagnóstico é apresentada, neste capítulo, a partir das categorias do subdomínio KoT, adotadas como eixo organizador da análise, em consonância com a perspectiva assumida ao longo da pesquisa e com a estrutura posteriormente utilizada na análise das Tarefas para Formação. Inicialmente, são discutidas as fragilidades evidenciadas nas resoluções dos participantes, articulando-as tanto às categorias do KoT quanto às dificuldades identificadas no mapeamento sistemático da literatura, de modo a evidenciar aproximações entre os obstáculos descritos nas pesquisas da área e aqueles manifestados pelos futuros professores investigados.

Em seguida, procede-se à síntese dos conhecimentos matemáticos especializados revelados no diagnóstico, buscando explicitar os saberes mobilizados pelos participantes em cada categoria analisada. Essa organização permite não apenas compreender o estado inicial dos conhecimentos especializados relacionados à proporcionalidade, mas também estabelecer parâmetros analíticos para a interpretação das mobilizações e dos desenvolvimentos observados no contexto formativo, discutidos na seção subsequente.

No que se refere à categoria Definições, propriedades e fundamentos, observou-se a predominância de compreensões de natureza qualitativa acerca da proporcionalidade, frequentemente descrita pelos participantes como situações em que ambas as quantidades aumentam ou diminuem simultaneamente. Embora tal interpretação revele uma percepção intuitiva de covariação entre grandezas, ela evidencia fragilidades conceituais ao não considerar a existência de uma constante de proporcionalidade que caracteriza matematicamente a relação, aspecto que se aproxima da categoria *Dificuldades com a constante de proporcionalidade* (Rodrigues; Feitosa, 2025c).

Além disso, alguns participantes associaram diretamente a proporcionalidade ao uso da regra de três, partindo do procedimento algorítmico para posteriormente inferir a natureza da relação, realizando, assim, um percurso inverso ao esperado do ponto de vista conceitual. Tal movimento pode ser relacionado à categoria *Ensino*

mecanizado e falta de compreensão conceitual (Rodrigues; Feitosa, 2025c), indicando a centralidade de abordagens procedimentais em detrimento da compreensão das relações envolvidas. Observou-se ainda, dentro dessa categoria, a definição de proporcionalidade como uma igualdade entre frações, interpretação que parece derivar da forma simbólica frequentemente apresentada nos contextos escolares imediatamente antes da aplicação da regra de três.

No entanto, apesar das fragilidades evidenciadas nas respostas, foi possível identificar, em um dos participantes, indícios de compreensão mais consistente acerca dos fundamentos da proporcionalidade. Tal compreensão não se manifestou diretamente nas definições apresentadas na questão conceitual do diagnóstico, mas emergiu nas estratégias mobilizadas durante a resolução dos problemas, nas quais o participante distinguiu relações diretamente e inversamente proporcionais e justificou seus procedimentos com base em propriedades características dessas relações. Esse resultado sugere que determinados conhecimentos especializados podem estar parcialmente disponíveis aos participantes, ainda que não sejam explicitados em nível declarativo.

De modo geral, os resultados indicam que, na categoria Definições, propriedades e fundamentos, os participantes demonstram reconhecer manifestações operacionais da proporcionalidade, porém apresentam dificuldades em explicitar seus fundamentos conceituais, especialmente no que se refere à invariância multiplicativa que sustenta a relação proporcional, evidenciando um descompasso entre o conhecimento mobilizado em situações de resolução e aquele expressado em termos conceituais.

Enquanto a categoria anterior evidenciou fragilidades relacionadas à explicitação dos fundamentos conceituais da proporcionalidade, a categoria **Procedimentos** permite observar como tais compreensões, ou sua ausência, se refletem nas estratégias adotadas pelos participantes durante a resolução das situações propostas. Para iniciar, foram observados obstáculos com respeito à mobilização do raciocínio relativo, próprio do pensamento proporcional. Os participantes apresentaram dificuldades para operar diretamente com quantidades relativas, recorrendo à atribuição de valores absolutos para viabilizar a resolução. Tal dificuldade se relaciona à categoria *Confusão entre raciocínio aditivo e multiplicativo* (Rodrigues; Feitosa, 2025).

Além disso, outra fragilidade observada foi que embora os participantes percebessem as relações numéricas envolvidas e conseguissem montar uma proporção ou utilizar algum procedimento para resolver o problema, apresentaram dificuldades em explicar o raciocínio mobilizado. Observou-se também desconhecimento das condições necessárias e suficientes para a utilização dos algoritmos empregados, orientando-se mais pela estrutura do problema (do tipo valor omisso, por exemplo) do que pela análise da relação proporcional.

Tais evidências apontam para um *Ensino mecanizado e da falta de compreensão conceitual* (Rodrigues; Feitosa, 2025c) com respeito à relação entre as grandezas e aos fundamentos das estratégias procedimentais que mobilizaram na resolução dos problemas. Esse tratamento mecanizado às situações foi evidenciado também a partir da falta de uma atitude crítica diante do resultado encontrado ao resolver o problema, o qual, algumas vezes, contrariava as condições da situação.

Por fim, as análises revelaram *obstáculos relacionados às operações matemáticas e a temas subjacentes ao pensamento proporcional* (Rodrigues; Feitosa, 2025c), como dificuldades na realização de divisões, especialmente quando o resultado não era inteiro, e a construção incorreta de uma proporção envolvendo segmentos homólogos de trapézios semelhantes. Nesse último caso, a fragilidade mostrou-se mais associada à ausência de conhecimentos prévios sobre propriedades de figuras semelhantes do que propriamente a lacunas no pensamento proporcional dos participantes.

Com respeito aos conhecimentos mobilizados, observou-se a utilização de diferentes estratégias para a resolução das situações propostas, tais como a estratégia escalar, a busca pelo valor unitário, o uso de referenciais intermediários, como a metade, em problemas envolvendo razões parte-parte e parte-todo, bem como comparações entre razões para estabelecer relações de ordem. Tais evidências indicam que alguns participantes demonstraram mobilizar estratégias coerentes com o pensamento proporcional, ainda que de forma pontual.

Contudo, o procedimento predominante entre a maioria dos participantes foi a regra de três, evidenciando um conhecimento majoritariamente procedimental para a resolução de problemas de proporcionalidade. Observou-se ainda que grande parte dessas estratégias foi mobilizada por um número reduzido de participantes, o que sugere uma distribuição heterogênea dos conhecimentos procedimentais no grupo

investigado, marcada pela coexistência de compreensões mais elaboradas com abordagens essencialmente algorítmicas.

A articulação entre fragilidades e conhecimentos mobilizados nessa categoria evidencia que o conhecimento procedimental dos participantes se apresenta dissociado, em muitos casos, dos fundamentos conceituais que legitimam sua utilização. Embora tenham demonstrado domínio de determinados algoritmos e estratégias operatórias, a análise indica que tais procedimentos foram frequentemente acionados por reconhecimento de padrões formais dos problemas, e não pela compreensão da estrutura multiplicativa que caracteriza as relações proporcionais. Ao mesmo tempo, a presença pontual de estratégias diversificadas revela que alguns participantes já mobilizam elementos do pensamento proporcional de maneira mais flexível, ainda que essas manifestações não se consolidem como conhecimento compartilhado pelo grupo.

Desse modo, os resultados sugerem que, no âmbito da categoria Procedimentos do KoT, o conhecimento especializado manifesta-se de forma desigual, coexistindo abordagens mecanizadas com indícios de raciocínio proporcional mais elaborado, aspecto que reforça a necessidade de contextos formativos que promovam a articulação entre procedimentos, significados matemáticos e análise crítica das soluções produzidas.

Enquanto a categoria Procedimentos evidenciou como os participantes mobilizam estratégias para resolver situações envolvendo proporcionalidade, a categoria Fenomenologia e aplicações permite analisar de que modo eles reconhecem e interpretam a presença de relações proporcionais em diferentes contextos. Nessa dimensão do subdomínio KoT, o foco desloca-se da execução de algoritmos para a compreensão das situações que dão significado ao conceito, envolvendo a análise e identificação das relações estabelecidas entre as grandezas em jogo e o reconhecimento das condições que caracterizam uma situação como proporcional, direta ou inversa.

Assim, esta categoria possibilita investigar em que medida os futuros professores conseguem articular o conhecimento matemático às situações nas quais a proporcionalidade emerge, aspecto fundamental para a compreensão conceitual do pensamento proporcional e para sua mobilização em contextos variados. As análises indicaram que foi justamente nessa dimensão que se concentraram as maiores dificuldades dos participantes, evidenciando desafios significativos no

reconhecimento e na compreensão de situações proporcionais, especialmente quando estas se afastavam de configurações mais familiares.

Pôde-se observar o impacto de um *ensino mecanizado e da falta de compreensão conceitual* (Rodrigues; Feitosa, 2025c) na forma como os participantes reconheciam situações de proporcionalidade. Em diversas ocasiões, inferiam que uma situação envolvia uma relação proporcional por permitir o uso da regra de três, o que caracteriza uma inversão lógica, visto que esse procedimento pode ser utilizado justamente porque há uma relação proporcional entre as grandezas.

Observou-se ainda que, embora mobilizassem estratégias típicas do pensamento proporcional para resolver os problemas, os participantes afirmavam que tais situações não envolviam proporcionalidade, por não estarem estruturadas como problemas de valor omisso, nos quais é possível estabelecer uma igualdade entre razões com três valores conhecidos e um a ser determinado.

Esses resultados parecem relacionar-se à forma como os problemas são explorados em sala de aula, evidenciando um conhecimento fenomenológico fortemente associado à estrutura formal do problema de valor omisso e ao uso mecânico da regra de três, o que dificulta o *engajamento e a resolução de problemas* (Rodrigues; Feitosa, 2025c) que exigem, por exemplo, a comparação entre razões e a análise das relações entre grandezas.

As fragilidades observadas também se relacionam às categorias *dificuldades na interpretação de grandezas e tipos de quantidades* e *dificuldade com a constante de proporcionalidade*. Os participantes demonstraram dificuldades em reconhecer situações de proporcionalidade direta e inversa, afirmando que a diferença entre as situações apresentadas no diagnóstico residia apenas nas grandezas envolvidas, sem perceber a distinção na relação estabelecida entre elas. Observou-se ainda a justificativa da existência de uma relação proporcional baseada apenas na covariação das grandezas, sem referência à constante de proporcionalidade ou à invariância da razão entre essas grandezas.

Tais evidências indicam dificuldades na atribuição de significado à relação entre as grandezas e à constante de proporcionalidade e em sua interpretação contextual em diferentes situações que envolvem relações proporcionais, revelando a predominância de uma leitura qualitativa da variação em detrimento da compreensão da estrutura multiplicativa que caracteriza a proporcionalidade.

As análises evidenciaram também fragilidades relacionadas à compreensão do significado da razão no contexto das situações propostas. Observou-se imprecisão na interpretação das grandezas envolvidas e dificuldades em compreender a orientação da razão expressa nos problemas, o que se manifestou na incapacidade de atribuir sentido às relações estabelecidas entre as quantidades analisadas. Em diferentes momentos, os participantes operaram com razões apenas como resultados numéricos ou etapas procedimentais, sem explicitar o significado relacional que essas expressões assumiam no contexto da situação. Desse modo, ainda que procedimentos adequados tenham sido mobilizados em algumas resoluções, a fragilidade na atribuição de significado à razão evidencia limites na compreensão fenomenológica da proporcionalidade.

Diante dessas fragilidades na interpretação e no reconhecimento das relações proporcionais, torna-se pertinente examinar os conhecimentos que os participantes mobilizaram ao resolver as situações propostas, buscando compreender quais estratégias e formas de raciocínio proporcional emergiram mesmo quando a compreensão fenomenológica da proporcionalidade se mostrou limitada.

No que se refere aos conhecimentos mobilizados, verificou-se que alguns participantes apresentaram indícios de reconhecer diferenças entre situações proporcionais e não proporcionais, bem como de identificar relações diretamente e inversamente proporcionais. Contudo, tais manifestações não ocorreram de forma consistente ou fundamentada, revelando um conhecimento ainda frágil para sustentar explicações conceituais mais elaboradas. De modo semelhante, emergiram referências implícitas à covariação entre grandezas e à invariância da razão, porém tais aspectos foram mobilizados apenas de forma intuitiva e circunstancial, sem explicitação de seu papel como elementos definidores da proporcionalidade.

Esse cenário sugere que os participantes operam com percepções parciais do fenômeno proporcional, construídas sobretudo a partir da familiaridade com procedimentos escolares, mas desvinculadas de uma compreensão teórica mais ampla. Assim, embora certos conhecimentos estejam presentes em nível implícito, eles não se configuram como saberes conceituais sistematizados, revelando limites na consolidação do pensamento proporcional e indicando a permanência de compreensões fragmentadas que dificultam a análise consciente das relações matemáticas envolvidas.

Considerando que a compreensão da proporcionalidade também se manifesta nas formas pelas quais os sujeitos organizam e expressam o pensamento matemático, torna-se necessário analisar os registros de representação mobilizados pelos participantes nas resoluções. No âmbito do subdomínio KoT, a categoria Registros de Representação permite investigar como diferentes formas de representação — numéricas, algébricas, tabulares, gráficas e verbais — são utilizadas para interpretar, comunicar e estruturar relações proporcionais.

Mais do que meios de expressão, esses registros constituem elementos fundamentais para a construção de significado matemático, uma vez que a compreensão conceitual envolve a capacidade de transitar entre representações e reconhecer relações invariantes entre elas. Assim, a análise dessa categoria busca compreender como os participantes mobilizam e articulam diferentes registros ao lidar com situações de proporcionalidade, evidenciando potencialidades e limites em seu raciocínio proporcional.

Nesse sentido, as principais fragilidades observadas relacionam-se ao uso limitado e, por vezes, mecanizado das formas de representação mobilizadas pelos participantes. Destaca-se o emprego recorrente de setas para indicar proporcionalidade direta e inversa, recurso que evidencia a permanência de um obstáculo didático amplamente difundido no ensino escolar, no qual a representação substitui a compreensão das relações matemáticas subjacentes.

Observou-se ainda dificuldade na coordenação entre diferentes registros de representação de uma mesma relação proporcional ou razão, indicando lacunas na articulação entre representações numéricas, algébricas e verbais. De modo geral, verificou-se uma mobilização restrita de registros, predominantemente aqueles necessários à aplicação da regra de três, revelando uma exploração ainda limitada da diversidade representacional associada ao pensamento proporcional.

Com relação aos conhecimentos mobilizados, observou-se que os participantes recorriam frequentemente à organização das grandezas e de seus respectivos valores em tabelas, ainda que estruturadas de maneira mais ou menos elaboradas. Tal prática evidencia a mobilização do registro tabular como forma de organizar os dados do problema, favorecendo a visualização da variação entre as grandezas e servindo de suporte para estratégias como a escalar, a funcional e a regra de três. Essa recorrência indica o reconhecimento do potencial organizador desse registro em situações proporcionais. Contudo, seu uso mostrou-se

predominantemente operacional, sendo empregado mais como instrumento de cálculo do que como recurso para explicitar propriedades matemáticas ou analisar conceitualmente a relação proporcional, revelando limites na articulação entre representação e significado matemático.

Em síntese, a análise dos registros de representação evidencia que, embora os participantes mobilizem formas de organização que favorecem a resolução das situações, especialmente por meio de registros tabulares, essa mobilização ocorre de maneira pouco diversificada e com limitada compreensão conceitual. Tal cenário reforça os resultados observados nas demais categorias do subdomínio KoT, indicando que as dificuldades identificadas no diagnóstico não se restringem a aspectos conceituais ou procedimentais isolados, mas atravessam diferentes dimensões do conhecimento matemático especializado relacionadas à proporcionalidade.

A metassíntese do diagnóstico evidencia que os conhecimentos mobilizados pelos participantes, embora presentes em diferentes dimensões do subdomínio KoT, manifestaram-se de forma fragmentada, frequentemente sustentados por procedimentos estabilizados escolarmente e por compreensões intuitivas ainda pouco sistematizadas. As fragilidades identificadas não indicam ausência de conhecimento, mas revelam limites na articulação entre definições, procedimentos, interpretações fenomenológicas e registros de representação, aspecto que restringe a mobilização flexível do pensamento proporcional em situações variadas.

Nesse sentido, o diagnóstico cumpriu uma dupla função investigativa: ao mesmo tempo em que permitiu caracterizar o conhecimento matemático especializado previamente constituído pelos futuros professores, tornou explícitas as tensões que justificam a necessidade de um contexto formativo intencionalmente estruturado. Assim, a etapa das Tarefas para Formação (TpFs) foi concebida como desdobramento analítico e formativo da investigação, orientada pelas fragilidades evidenciadas e fundamentada na Teoria das Situações Didáticas, com o objetivo de criar condições para que conhecimentos apenas incipientes pudessem ser mobilizados, problematizados e desenvolvidos ao longo das interações formativas.

A adoção de um contexto formativo fundamentado nas TpFs mostra-se particularmente relevante neste estudo por possibilitar a observação do conhecimento matemático especializado em um contexto de interação, superando os limites de uma análise centrada apenas em respostas individuais a atividades diagnósticas. Enquanto

o diagnóstico permitiu identificar conhecimentos já disponíveis e fragilidades persistentes, o ambiente formativo das TpFs cria condições para a emergência de processos negociação de significados, explicitação e confrontação de raciocínios e validação coletiva de conhecimentos, elementos essenciais para o desenvolvimento profissional docente.

Nesse sentido, as TpFs constituem não apenas um instrumento de coleta de dados, mas um espaço intencionalmente estruturado para promover a mobilização reflexiva dos conhecimentos dos participantes, permitindo analisar como esses conhecimentos se transformam quando os futuros professores são confrontados com situações didáticas que exigem argumentação, justificativa e reconstrução conceitual no âmbito do pensamento proporcional.

6.3 SUBQUESTÃO 3 – CONHECIMENTOS REVELADOS SOBRE O TÓPICO PROPORCIONALIDADE

A partir das fragilidades e dos conhecimentos revelados na etapa diagnóstica, foi estruturada a terceira etapa da investigação, constituída por um contexto formativo composto por Tarefas para Formação (TpFs). Enquanto o diagnóstico permitiu identificar o conjunto de conhecimentos já mobilizados pelos participantes, bem como lacunas em diferentes dimensões do conhecimento matemático especializado relacionadas à proporcionalidade, as TpFs foram concebidas com o propósito de criar condições para que tais conhecimentos pudessem ser problematizados, mobilizados e desenvolvidos em situações de aprendizagem intencionalmente planejadas.

Nesse sentido, esta etapa da pesquisa buscou responder à seguinte questão: *Que conhecimentos matemáticos especializados são mobilizados e/ou desenvolvidos por futuros professores de matemática a partir da participação em um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade?* Para isso, as tarefas foram organizadas com base nas tipologias da Teoria das Situações Didáticas (ação, formulação, validação e institucionalização), buscando promover momentos de exploração, discussão e sistematização das ideias matemáticas emergentes nas interações entre os participantes.

Ao todo, foram elaboradas e aplicadas três TpFs, cada uma composta por situações envolvendo diferentes categorias de problemas relacionados ao

pensamento proporcional. A TpF1 contemplou problemas do tipo valor omisso e comparação; a TpF2 envolveu situações de transformação e média; e a TpF3 reuniu um problema de conversão, uma situação envolvendo unidades de medida e números, além de um problema de translação entre diferentes sistemas de representação, totalizando os sete tipos de problemas descritos que envolvem o pensamento proporcional descritos por Lesh, Post e Behr (1988).

A análise desenvolvida neste subcapítulo segue a mesma organização adotada na metassíntese do diagnóstico, sendo estruturada a partir das categorias do subdomínio KoT. Em cada categoria, são discutidos os conhecimentos e as fragilidades observados ao longo das três tarefas formativas, buscando evidenciar possíveis deslocamentos, avanços ou permanências no conhecimento mobilizado pelos participantes ao longo do contexto formativo.

A primeira categoria analisada corresponde a Definições, propriedades e fundamentos, dimensão do subdomínio KoT relacionada à compreensão conceitual das ideias que estruturam a proporcionalidade, tais como razão, proporção, proporcionalidade direta e inversa, bem como as propriedades que caracterizam essas relações. Considerando que o diagnóstico revelou fragilidades importantes na explicitação conceitual desses elementos, a investigação nesta etapa volta-se a observar se, e de que modo, o contexto formativo favoreceu a mobilização mais consistente desses conhecimentos durante a resolução e discussão das situações propostas nas TpF1, TpF2 e TpF3.

Nesta categoria, observou-se o desenvolvimento de conhecimentos relacionados à compreensão dos fundamentos da proporcionalidade. Entre eles, destacou-se o reconhecimento da invariância da razão como critério definidor de uma relação proporcional. Nas análises do diagnóstico, essa característica intrínseca da proporcionalidade ainda não havia sido mobilizada pelos participantes, que tendiam a justificar a relação proporcional apenas pela covariação das grandezas, frequentemente por meio de um raciocínio qualitativo.

Além disso, um dos participantes apresentou indícios de evolução ao mobilizar, de forma menos intuitiva e mais sistematizada do que no diagnóstico, o conhecimento de reconhecer a razão como uma relação entre grandezas, e não como uma quantidade absoluta, não sendo necessário recorrer a um raciocínio aditivo para interpretar a situação. Esse mesmo participante também reafirmou o conhecimento

relativo à distinção entre variáveis diretamente e inversamente proporcionais, agora mobilizando um raciocínio de natureza tanto qualitativa quanto quantitativa.

Uma fragilidade observada em uma das participantes refere-se à dificuldade em generalizar uma relação proporcional por meio de uma expressão algébrica. Em sua resolução, não houve mobilização de um raciocínio funcional que permitisse representar a relação diretamente proporcional na forma de uma função linear, o que indicaria a compreensão da proporcionalidade como uma relação geral entre as grandezas envolvidas. Tal limitação evidencia dificuldades em expressar e comunicar a estrutura da relação proporcional em termos algébricos, uma vez que a representação por meio de funções constitui uma das formas de definir e comunicar relações proporcionais (Menduni-Bortoloti; Barbosa, 2017).

Em síntese, as análises indicam que o contexto formativo favoreceu a mobilização de conhecimentos relacionados às propriedades estruturantes da proporcionalidade, especialmente no que se refere ao reconhecimento da invariância da razão, à covariação entre grandezas e à distinção entre relações diretamente e inversamente proporcionais. Em comparação ao diagnóstico, observa-se que tais elementos passaram a ser mobilizados de forma mais explícita e articulada durante as discussões das situações propostas nas TpFs.

No entanto, embora esses conhecimentos tenham emergido com maior clareza, sua mobilização ainda se mostrou, em alguns momentos, marcada por um caráter parcial ou pouco formalizado, evidenciando dificuldades na generalização e na explicitação conceitual das relações proporcionais. Desse modo, os resultados sugerem que os participantes passaram a reconhecer e utilizar diferentes propriedades associadas à proporcionalidade, porém ainda enfrentam desafios para sistematizar esses conhecimentos em definições matematicamente mais estruturadas, capazes de expressar de forma generalizada a natureza dessas relações.

A análise da categoria Definições, propriedades e fundamentos evidenciou avanços na mobilização de conhecimentos conceituais relacionados à estrutura da proporcionalidade, ainda que tais compreensões nem sempre tenham sido plenamente sistematizadas ou formalizadas pelos participantes. No entanto, compreender os elementos que caracterizam uma relação proporcional não se limita à sua definição conceitual, mas envolve também a capacidade de reconhecer essas relações nas diferentes situações em que elas se manifestam.

Nesse sentido, torna-se necessário examinar de que modo tais conhecimentos são mobilizados quando os participantes se deparam com diferentes contextos nos quais a proporcionalidade emerge e com as distintas formas através das quais ela se apresenta. Assim, a análise volta-se a seguir, para a categoria Fenomenologia e aplicações, que permite investigar em que medida os futuros professores conseguem identificar, interpretar e atribuir significado às relações proporcionais presentes nas situações propostas nas TpFs.

Observou-se o desenvolvimento na mobilização de diversos conhecimentos, entre eles o de reconhecer quando uma situação envolve proporcionalidade direta ou inversa. No diagnóstico, apenas um participante havia demonstrado mobilizar esse conhecimento; entretanto, com a aplicação da TpF1, verificou-se que os quatro participantes dessa etapa passaram a reconhecê-lo, ainda que predominantemente por meio de um raciocínio qualitativo, isto é, considerando que, se a quantidade de uma das grandezas aumenta, a quantidade correspondente da outra diminui ou aumenta na mesma direção.

Notou-se também que alguns participantes passaram a reconhecer que situações envolvendo figuras semelhantes implicam relações proporcionais. Contudo, apenas uma participante conseguiu estabelecer corretamente a correspondência entre os lados homólogos das figuras. Tal dificuldade parece estar mais associada à ausência de conhecimentos prévios em Geometria do que propriamente a fragilidades relacionadas ao tópico de proporcionalidade, uma vez que nenhum dos participantes havia cursado a disciplina de Geometria Plana na graduação, trazendo essas lacunas ainda do Ensino Básico.

A TpF3, por sua vez, possibilitou observar a mobilização e o desenvolvimento de conhecimentos que, no diagnóstico, se apresentavam como lacunas. Entre eles, destaca-se o reconhecimento de que, em uma situação proporcional, as quantidades devem ser interpretadas de forma relativa – o que ainda se caracterizava como fragilidade nas TpFs 1 e 2. Na Situação 1 da TpF3, por exemplo, os participantes passaram a compreender que a razão 20:8 entre estudantes aprovados e reprovados não significa necessariamente a existência de 20 aprovados e 8 reprovados, mas expressa uma relação na qual, para cada 20 estudantes aprovados, há 8 estudantes reprovados. Além disso, passaram a reconhecer a covariação entre as grandezas e a invariância da razão como características da proporcionalidade, mobilizando tais ideias inclusive como critério para distinguir situações proporcionais de não

proporcionais e resolver problemas, não mais dependendo de um raciocínio absoluto para tal.

Por fim, no que se refere ao reconhecimento das diferentes classes de problemas envolvendo pensamento proporcional, um dos objetivos das TpFs, observou-se uma evolução mais discreta ao longo das tarefas. Na TpF1, os participantes não evidenciaram reconhecer diferenças estruturais entre as situações, limitando-se a apontar distinções relacionadas ao contexto ou à quantidade de cálculos envolvidos. Na TpF2, esse cenário se manteve: as diferenças apontadas continuaram sendo predominantemente contextuais, e o problema criado pela participante foi novamente do tipo valor omisso, embora ela acreditasse tratar-se do mesmo tipo da Situação 1 da tarefa, classificada como problema de transformação, possivelmente por ter mobilizado uma estratégia semelhante na resolução de ambas.

Na TpF3, embora surjam indícios de reconhecimento das diferenças fenomenológicas entre as situações, as justificativas apresentadas pelos participantes permanecem majoritariamente ancoradas nas estratégias utilizadas em cada resolução, e não na estrutura matemática subjacente aos problemas. O problema elaborado pelos participantes foi novamente do tipo valor omisso, categoria distinta das demais presentes na tarefa. Contudo, observa-se que essa escolha parece estar mais relacionada à maior familiaridade dos participantes com esse tipo de problema do que a uma percepção efetiva das diferenças estruturais e das distintas ênfases que cada classe de situação confere à proporcionalidade.

No que se refere às fragilidades que persistiram, observaram-se dificuldades relacionadas principalmente ao reconhecimento e à interpretação da estrutura proporcional em determinadas situações. Em alguns casos, quando a proporcionalidade não se apresentava de forma mais direta, os participantes tiveram dificuldades em identificar quais relações deveriam ser estabelecidas entre as grandezas envolvidas. Esse aspecto foi observado, por exemplo, no problema de conversão, no qual uma participante demonstrou limitações em reconhecer a estrutura proporcional subjacente e em definir adequadamente as relações necessárias para sua resolução.

Também foram identificadas dificuldades na interpretação dos resultados obtidos em situações envolvendo grandezas e unidades de medida. Embora os participantes tenham mobilizado corretamente procedimentos matemáticos, como conversões e multiplicações, verificou-se, em diversos momentos, uma dissociação

entre o tratamento numérico realizado e o significado dimensional dos resultados, evidenciando limitações na articulação entre cálculo e interpretação da situação. Contudo, assim como o problema de média, as fragilidades supramencionadas relacionam-se mais com lacunas no conhecimento prévio dos participantes, neste caso com respeito a unidades de medida, do que com dificuldades com o tópico de proporcionalidade.

Por fim, observaram-se fragilidades relacionadas à interpretação funcional das relações proporcionais. Esse aspecto se evidenciou, por exemplo, na dificuldade de uma participante, na TpF3, em identificar a natureza da relação funcional entre grandezas diretamente proporcionais, registrando uma expressão algébrica que não representava a relação de proporcionalidade presente na situação.

De modo geral, as análises indicam que o contexto formativo contribuiu para ampliar a mobilização de conhecimentos relacionados à identificação e interpretação de situações em que a proporcionalidade se manifesta. Observou-se uma evolução em relação ao diagnóstico e no decorrer da aplicação das TpFs, especialmente no reconhecimento de situações de proporcionalidade direta e inversa, na compreensão da natureza relativa das razões e no reconhecimento de características como a covariação entre grandezas e a invariância da razão, que passaram a ser mobilizadas pelos participantes na interpretação e resolução de problemas.

Entretanto, essa evolução não se deu de maneira homogênea em todos os aspectos da categoria. Persistiram dificuldades no reconhecimento da estrutura matemática subjacente a diferentes classes de problemas, uma vez que as justificativas apresentadas pelos participantes permaneceram frequentemente ancoradas nas estratégias de resolução utilizadas, e não nas características estruturais das situações.

Além disso, observaram-se limitações pontuais relacionadas à interpretação dimensional dos resultados e à identificação da natureza funcional das relações proporcionais, indicando que, embora os participantes tenham ampliado sua capacidade de reconhecer e interpretar situações proporcionais em diferentes contextos, ainda permanecem desafios no aprofundamento da compreensão estrutural e funcional dessas relações.

Nesse sentido, ainda que os resultados evidenciem avanços na capacidade dos participantes de reconhecer e interpretar situações em que a proporcionalidade se manifesta, a compreensão desse fenômeno também se impacta nas formas pelas

quais tais relações são operacionalizadas na resolução de problemas. Assim, torna-se pertinente examinar quais estratégias, métodos e procedimentos matemáticos são mobilizados pelos participantes ao lidar com situações proporcionais. A análise volta-se, portanto, para a categoria Procedimentos, buscando investigar de que maneira os futuros professores resolvem as situações propostas nas TpFs, e como se deu a mobilização e o desenvolvimento de raciocínios e estratégias de cálculo nesse processo.

No que diz respeito a essa categoria, evidenciou-se uma evolução substancial no conjunto de conhecimentos dos participantes. A análise da TpF1 revelou resultados semelhantes aos observados no diagnóstico no que se refere às fragilidades presentes. Identificou-se a persistência de dificuldades relacionadas à operação de divisão, principalmente quando o quociente correspondia a um número não inteiro. Verificou-se ainda a necessidade de trabalhar com quantidades absolutas e explicitamente conhecidas (raciocínio absoluto), em vez de operar diretamente com as razões (raciocínio relativo), o que revela fragilidades na compreensão do caráter relacional da proporcionalidade. Tal aspecto foi particularmente evidente em problemas de comparação, nos quais, na Situação 2, foi desconsiderada a mistura dos elementos nos liquidificadores e as razões entre as grandezas envolvidas.

Contudo, observa-se também uma maior diversidade de estratégias e procedimentos de resolução entre os participantes, aspecto que se ampliou ao longo das TpFs, à medida que as fragilidades foram sendo discutidas e trabalhadas. Ainda que a regra de três continue sendo o procedimento mais familiar e a escolha mais segura entre os participantes, verificou-se uma maior mobilização de estratégias como a estratégia escalar, a estratégia funcional e a busca pelo valor unitário. Esta última, inclusive, passou a ser nomeada pelos próprios participantes ao utilizá-la, o que evidencia a importância das etapas de validação e institucionalização realizadas ao final de cada encontro, nas quais tais estratégias eram discutidas e sistematizadas coletivamente.

Observou-se também a mobilização de procedimentos característicos de determinados tipos de problemas, como “estabelecer relações de ordem e igualdade na comparação entre razões” em problemas de comparação; “transformar quantidades para tornar razões equivalentes” em problemas de transformação; “estabelecer proporções entre os lados homólogos de trapézios semelhantes” em problemas de média em contextos geométricos; ou ainda “converter razões parte-

parte em razões parte-todo, preservando a proporcionalidade” em problemas de conversão. Esses resultados indicam que os participantes passaram a mobilizar estratégias mais pertinentes às características estruturais de cada tipo de problema.

Entretanto, quando não conseguiam identificar a estratégia mais adequada para determinado tipo de situação, os participantes recorriam a procedimentos mais intuitivos e operacionais, como o uso sucessivo de multiplicações e divisões para resolver os problemas. Esse aspecto foi observado, por exemplo, em uma das situações de translação, na qual uma participante realizou sucessivas multiplicações ao não conseguir generalizar a relação entre as grandezas por meio de uma expressão funcional.

A dificuldade em generalizar a relação entre as grandezas de forma funcional foi trabalhada na TpF3 e superada pela maioria dos participantes. Contudo, a mobilização da expressão algébrica como ferramenta na resolução de problemas ainda permanece relativamente tímida, uma vez que os participantes tendem a privilegiar estratégias predominantemente aritméticas, como a estratégia escalar, para resolver as situações propostas.

Por fim, destaca-se uma evolução importante na postura dos participantes diante dos resultados obtidos. Diferentemente do que foi observado no diagnóstico, eles passaram a demonstrar maior consciência acerca da adequação ou inadequação dos encaminhamentos adotados, realizando análises críticas dos resultados encontrados. Assim, não se restringiram à aplicação mecânica de procedimentos, mas passaram a avaliar a plausibilidade e a consistência das soluções produzidas. Tal postura não havia sido evidenciada no diagnóstico — à exceção de algumas inseguranças decorrentes de lacunas no conhecimento.

De modo geral, as análises indicam uma evolução significativa na forma como os participantes mobilizam procedimentos para resolver situações que envolvem proporcionalidade. Em comparação com o diagnóstico, no qual predominava a aplicação quase exclusiva da regra de três – frequentemente utilizada de forma mecânica e dependente da identificação prévia de uma proporção explícita –, nas TpFs observou-se uma ampliação do repertório de estratégias mobilizadas.

Além da regra de três, os participantes passaram a recorrer com maior frequência a estratégias como a escalar, a busca pelo valor unitário e abordagens de natureza funcional, bem como a procedimentos mais específicos associados a determinados tipos de problemas, como a comparação entre razões, a transformação

de quantidades para obtenção de razões equivalentes e o estabelecimento de proporções entre lados homólogos em contextos geométricos. Essa diversidade de estratégias indica um avanço na compreensão operacional da proporcionalidade, permitindo que os participantes resolvessem situações mesmo quando não conseguiam estabelecer diretamente uma proporção formal.

Ainda assim, persistem algumas limitações, sobretudo no que se refere à mobilização de representações algébricas e à predominância de estratégias aritméticas, o que sugere que, embora tenha havido avanços importantes na flexibilidade e na adequação dos procedimentos utilizados, a generalização funcional das relações proporcionais ainda se apresenta como um desafio para parte dos participantes.

Os resultados discutidos na categoria Procedimentos evidenciam não apenas a ampliação do repertório de estratégias mobilizadas pelos participantes, mas também diferentes formas de registrar, organizar e comunicar as relações proporcionais envolvidas nas situações propostas. Ao longo das tarefas, tais procedimentos foram expressos por meio de distintos registros, como cálculos numéricos, representações em linguagem natural e, em alguns casos, tentativas de generalização algébrica. Nesse sentido, além de analisar quais estratégias foram utilizadas, torna-se relevante investigar como essas relações foram representadas e articuladas pelos participantes.

Assim, a análise volta-se à categoria KoT – Registros de Representação, buscando compreender de que maneira os futuros professores mobilizam e articulam diferentes formas de representação ao interpretar e resolver situações envolvendo proporcionalidade.

Nas TpFs 1 e 2, o conhecimento mais recorrente dessa categoria foi o de organizar grandezas e seus respectivos valores em tabelas, identificado desde o diagnóstico até a última tarefa. A representação tabular mostrou-se um recurso para estruturar os dados e visualizar as variações entre as grandezas, além de favorecer a aplicação de estratégias operacionais, como a regra de três e a estratégia escalar. Observou-se ainda que alguns participantes passaram a representar os dados de forma mais precisa, utilizando siglas para as grandezas e indicando as unidades entre parênteses, especialmente em situações que exigiam conversões de unidades de medida.

Na TpF3, foi proposta uma situação que demandava a translação entre diferentes registros de representação, o que possibilitou a mobilização de outros

conhecimentos dessa categoria. Verificou-se que os participantes demonstraram reconhecer como coordenar diferentes registros de uma mesma relação proporcional, particularmente a transição do registro tabular para os registros gráfico e algébrico, ainda que com algumas fragilidades. Entre elas, destaca-se a construção de gráficos de colunas para representar relações proporcionais, o que limita a visualização de aspectos relevantes, como a covariação entre as grandezas.

Também se observou a mobilização do conhecimento de expressar razões em linguagem natural, considerando seu caráter relacional, bem como de utilizar a linguagem funcional para representar relações proporcionais, por meio de expressões como “lei de associação” e “função linear” ao descrever o gráfico de uma relação diretamente proporcional como uma reta que passa pela origem.

De forma geral, os resultados indicam que a as tarefas propostas contribuíram para ampliar a mobilização e a articulação entre diferentes registros de representação, aspecto fundamental para a compreensão conceitual da proporcionalidade e para sua exploração em contextos de ensino.

Em síntese, os resultados discutidos ao longo desta metassíntese permitem retomar a questão que orientou esta pesquisa - Que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de matemática no âmbito do tópico proporcionalidade quando participam de um contexto formativo com o intuito de desenvolvê-lo? -, evidenciando que o desenho formativo adotado possibilitou tanto revelar quanto favorecer o desenvolvimento de diferentes conhecimentos especializados relacionados ao tópico proporcionalidade.

As três etapas que compuseram o contexto formativo — o mapeamento inicial, o diagnóstico e a implementação das Tarefas para Formação (TpFs) — mostraram-se complementares para esse propósito, uma vez que permitiram identificar conhecimentos previamente mobilizados pelos participantes, reconhecer fragilidades em sua compreensão do tópico e acompanhar processos de mobilização e reorganização desses conhecimentos ao longo das tarefas propostas.

Nesse processo, foi possível mapear diferentes descritores de conhecimentos associados ao subdomínio Knowledge of Topics (KoT) do modelo MTSK. As análises evidenciaram tanto conhecimentos já presentes no repertório dos participantes quanto fragilidades relacionadas, por exemplo, à interpretação de contextos proporcionais, à escolha e justificação de estratégias de resolução e à coordenação entre diferentes registros de representação. Ao longo das TpFs, observou-se que muitas dessas

fragilidades foram progressivamente problematizadas e, em certa medida, superadas, evidenciando o potencial do contexto formativo para favorecer a ampliação e o refinamento do conhecimento matemático especializado dos futuros professores.

Destaca-se, nesse cenário, o papel da Teoria das Situações Didáticas (TSD) na organização das tarefas e na condução das interações formativas. As diferentes tipologias de situação — ação, formulação, validação e institucionalização — constituíram momentos complementares que favoreceram a mobilização de conhecimentos matemáticos pelos participantes.

Na etapa de ação, os futuros professores foram levados a selecionar e testar estratégias individuais de resolução; na formulação, compartilharam e confrontaram suas estratégias com as dos colegas; a validação e a institucionalização ocorreram concomitantemente: os participantes buscaram justificar e sistematizar as resoluções apresentadas, com um linguajar matemático mais formal e houve a intervenção intencional da pesquisadora no sentido de validar, formalizar e reorganizar os conhecimentos mobilizados, discutindo tanto estratégias adequadas quanto aquelas que se mostraram inconsistentes, bem como explicitando características das diferentes categorias de problemas envolvendo proporcionalidade.

Cabe destacar ainda que, embora nem todos os participantes tenham mobilizado individualmente determinados conhecimentos ao longo das tarefas, a dinâmica interativa promovida pelas diferentes tipologias da TSD possibilitou que esses conhecimentos circulassem no grupo. Nos momentos de formulação e validação, por exemplo, as estratégias e justificativas apresentadas por alguns participantes tornaram-se acessíveis aos demais, permitindo que todos entrassem em contato com diferentes formas de pensar e resolver as situações propostas.

Assim, mesmo quando certos conhecimentos não foram explicitamente mobilizados por todos, eles passaram a compor o repertório de ideias discutidas coletivamente, configurando-se como um potencial ponto de partida para mobilizações futuras. Esse movimento pôde ser observado ao longo das aplicações das TpFs, quando estratégias ou formas de representação inicialmente apresentadas por alguns participantes passaram a ser retomadas e utilizadas por outros em tarefas posteriores.

Além de favorecer a mobilização de conhecimentos relacionados ao tópico matemático em estudo, a vivência desse contexto também proporcionou aos participantes a experiência de uma metodologia de ensino fundamentada teoricamente, contribuindo para o desenvolvimento de conhecimentos associados ao

Knowledge of Mathematics Teaching (KMT). Ao participar de situações estruturadas segundo os princípios da TSD, os futuros professores puderam experienciar dinâmicas de ensino que valorizam a problematização, a interação entre pares e a construção progressiva de significados matemáticos, aspecto relevante para sua formação docente.

Por fim, os resultados desta investigação reforçam discussões amplamente presentes na literatura que evidenciam a estreita relação entre o conhecimento do professor e as aprendizagens matemáticas dos estudantes. Diversas pesquisas apontam que muitas das dificuldades manifestadas pelos alunos em relação à proporcionalidade — como a confusão entre raciocínio aditivo e multiplicativo, a compreensão limitada da constante de proporcionalidade e a interpretação inadequada das grandezas envolvidas — têm origem em práticas escolares historicamente marcadas por abordagens procedimentais e pouco conceituais.

Nesse sentido, estabelece-se um ciclo no qual fragilidades conceituais presentes na formação matemática repercutem nas práticas de ensino e, consequentemente, nas aprendizagens dos estudantes, sendo posteriormente reproduzidas em novos processos formativos. Os resultados aqui apresentados evidenciam, portanto, a relevância de contextos formativos intencionalmente estruturados para promover a mobilização e o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado do professor, configurando-se como uma via potente para romper esse ciclo e contribuir para práticas de ensino mais significativas no âmbito da proporcionalidade.

Dessa forma, esta pesquisa evidencia que a criação de contextos formativos intencionalmente estruturados, fundamentados em referenciais teóricos consistentes e em tarefas que promovem a problematização matemática, constitui um caminho profícuo para revelar e desenvolver o conhecimento matemático especializado de futuros professores. Ao investigar a proporcionalidade sob diferentes perspectivas — conceitual, procedimental e representacional — foi possível não apenas mapear fragilidades e potencialidades nos conhecimentos mobilizados pelos participantes, mas também acompanhar processos de evolução que emergiram da interação, da reflexão coletiva e da institucionalização dos saberes ao longo das atividades formativas.

Como limitação desta pesquisa, destaca-se o tempo reduzido destinado ao desenvolvimento da intervenção formativa, o que restringe a possibilidade de

observar, de forma mais aprofundada, a mobilização contínua dos conhecimentos matemáticos especializados pelos participantes, bem como de acompanhar o desenvolvimento efetivo desses conhecimentos ao longo do tempo. Dessa forma, não foi possível verificar se os conhecimentos evidenciados durante as tarefas se consolidam e permanecem após o término da experiência formativa ou se tendem a se enfraquecer em contextos posteriores.

Apesar disso, os resultados reforçam a importância de propostas formativas que articulem teoria, prática e reflexão sobre o conhecimento matemático para ensinar, contribuindo para a formação de professores capazes de compreender a matemática para além da aplicação de procedimentos e de promover aprendizagens mais significativas em seus futuros contextos de atuação.

Espera-se, assim, que este estudo possa inspirar novas investigações e práticas formativas voltadas ao desenvolvimento do conhecimento especializado do professor, ampliando as possibilidades de ensino e aprendizagem da matemática na Educação Básica. Dessa forma, sugere-se a aplicação da articulação metodológica entre o modelo MTSK, a Tarefa para Formação e a Teoria das Situações Didáticas em investigações voltadas a outros tópicos matemáticos, ampliando as possibilidades de análise da mobilização e do desenvolvimento do conhecimento matemático especializado em diferentes conteúdos e contextos formativos.

REFERÊNCIAS

ALFARO-CARVAJAL, C.; FLORES, P.; VALVERDE, G. Conhecimento especializado de professores de matemática em formação inicial sobre aspectos lógicos e sintáticos da demonstração. **PNA**, v. 14, n. 2, p. 85-117, 2020.

ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Potencialidades de uma tarefa para promover o conhecimento especializado do professor no tópico frações. **ACERVO-Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, v. 3, p. 1-18, 2021.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba, PR: Editora UFPR, 2010.

ARICAN, M. Correction to: Preservice middle and high school mathematics teachers' strategies when solving proportion problems (International Journal of Science and Mathematics Education, v. 16, n. 2, p. 315-335, 2018). **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 22, n. 4, p. 937-937, 2024.

AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. **Funciones y gráficas**. Madrid: Síntesis, 1990.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes its special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BEN-CHAIM, D.; KERET, Y.; ILANY, B. Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Springer Netherlands, v. 10, p. 333-340, 2007.

BEN-CHAIM, D.; KERET, Y.; ILANY, B. **Ratio and Proportion:** Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Preand In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes). The Netherlands: Sense Publishers, 2012.

BERNAL, M. M. **Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado**. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Matemática), Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. **O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2023.

BOYD, D. J.; GROSSMAN, P. L.; LANKFORD, H.; LOEB, S.; WYCKOFF, J. Teacher preparation and student achievement. **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 31, n. 4, p. 416–440, 2009.

BRABO, M. S. Obstáculos didáticos no ensino de regra de três: refletindo a prática docente. *In:* CONGRESSO ONLINE NACIONAL DE ENSINO DE QUÍMICA, FÍSICA, MATEMÁTICA E BIOLOGIA, 1., 2020, Goiânia. **Anais [...]**. Goiânia: Cientus Educação, 2020. p. 1-3.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BROCARDO, J.; SANTOS, L. Tarefas matemáticas. **Investigação em Educação Matemática**, p. 3-4, 2014.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques (Revue)**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**: Didactique des Mathématiques, 1970–1990. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

BUFORN, Á; FERNÁNDEZ, C. Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, p. 21-41, 2014.

BURGOS, M.; BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACOMONE, B.; GODINO, J. Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. **Educação e Pesquisa**, v. 44, n. e182013, 2018. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013.

CAMILO FUENTES, C. Uso del Modelo MTSK para la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secundaria: El caso de la proporcionalidad. **Revista Iberoamericana de educación Matemática**, v. 59, p. 33-63, 2020.

CAMPOS-CANO, M.; FLORES-MEDRANO, E. Práticas matemáticas: um avanço em sua caracterização. *In:* Carrillo, J.; Codes, M.; Contreras, L. C. (ed.), **IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas**. Publicações da Universidade de Huelva, 2019. p. 87-94.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.; RIBEIRO M. Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) no problema "dissecando um triângulo equilátero". **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 88-107, 2017.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; CLIMENT, N.; ESCUDERO-AVILA, D.; FLORES-MEDRANO, E.; MONTES, M. A.; AGUILAR, A.; CARMONA, E.; FLORES, P.; HUITRADO, J. L.; MUÑOZ-CATALÁN, C.; ROJAS, N.; SOSA, L.; VASCO, D.;

ZAKARYAN, D. **Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.** Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones, 2014.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L.; FLORES-MEDRANO, E., ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

CASTRO, J. B.; SOUZA, D. C.; MEDEIROS, D. M; SOUZA, M. S. M. X.; DIAS, A. C. A. M.; FILHO, J A. C. Análise de desempenho e de estratégias de estudantes do 6° ano do ensino fundamental em situações de proporção simples. *In:* XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education**. 8. ed. New York: Routledge, 2018.

CORDEL, B.; MASON, R. **Proportional reasoning** (Algebraic thinking series). FRESNO – CA: Aims Education Foundation, 2000.

CORREAL, J.; RICO, C. **Creencias y concepciones de los profesores de básica primaria en relación con la enseñanza del concepto de fracción**. 2016. Disertación (Maestría en Educación Matemáticas). Universidad de Medellín, Medellín, 2016.

COSTA, M. dos S.; ALLEVATO, N. S. G. Futuros professores de matemática e o ensino de proporcionalidade através da resolução de problemas de geometria. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 61, p. 109-123, jul./dez. 2012.

COSTA, S.; PONTE, J. P. O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico. **Revista da Educação**, v. 16, n. 2, p. 65-100, 2008.

COSTA JUNIOR, J. R. **Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade: contribuições da história da matemática**. 2010. 237 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and teaching ratio and proportion: research implications. *In:* OWENS, D. T. (ed.). **Research ideas for the classroom:** middle grades Mathematics. New York: Macmillan, 1993. p. 159-178.

CRISTINI, M.; TORREZAN, E.; RIBEIRO, M. Tarefa como recurso pedagógico: um exemplo no âmbito da proporcionalidade para os Anos Finais. **Educação Matemática em Revista**, v. 27, n. 77, p. 227-238, 2022.

DARLING-HAMMOND, L. Teacher quality and student achievement. **Education Policy Analysis Archives**, v. 8, n. 1, 2000.

DAVIS, P.; HERSH, R. **The Mathematical Experience**. Boston: Birkhhäuser, 1981.

DELGADO-REBOLLEDO, R. **Una propuesta de categorización del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios**. 2020. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) Faculdad de Ciencias, Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, 2020.

DELGADO-REBOLLEDO, R.; ESPINOZA-VÁSQUEZ, G. ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *In*: CONGRESO IBEROAMERICANO SOBRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS, 5., 2021, Macaé, 2021, **Anais** […], 2021, p. 288-295.

DELGADO-REBOLLEDO, R.; ZAKARYAN, D. Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 18, n. 3, p. 567-587, 2020.

DELGADO-REBOLLEDO, R.; ZAKARYAN, D.; CARVAJAL, C. A. Conhecimento da Prática Matemática. *In:* CARRILLO, J.; MONTES, M.; CLIMENT, N. (ed.), **Pesquisa sobre conhecimento especializado do professor de matemática (mtsk): 10 anos de jornada**. Madrid: Dykinson S.L., 2022.

DEL-VALLE, M.; SUAZO, P.; TORRES; J. Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemática en el desarrollo del pensamiento proporcional: un estudio de casos de la subdimensión conocimiento de los temas. **RECHIEM: Revista Chilena de Educación Matemática**, v. 11, n. 1, 2018.

DOOLEY, K. B. **An investigation of proportional thinking among high school students.** 2006. 170 f. Doctoral Dissertation (Philosophy Curriculum and Instruction) – Graduate School of Clemson University, Clemson, 2006.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, Washington, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

ENGLISH, L.D.; HALFORD, G.S. **Mathematics education: Models and processes**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1995.

ESCUDERO-AVILA, D. I. **Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria**. 2015. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias y Filosofía). Universidad de Huelva, Huelva, 2015.

ESCUDERO-ÁVILA, D. I.; CARRILLO, J.; FLORES-MEDRANO, E.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. **PNA**, v. 1, n. 1, p. 53-77, 2015.

ESCUDERO-ÁVILA, D.; CLIMENT, N.; VASCO, D. Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). *In:* CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.C.; MONTES, M. (ed.), **Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva**. Huelva: SGSE, 2016, p. 21-29.

ESCUDERO-ÁVILA, D.; GOMES MORIEL, J.; MUÑOZ-CATALÁN, M.C.; FLORES-MEDRANO, E.; FLORES, P.; ROJAS, N.; AGUILAR, A. Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. *In:* CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.C.; MONTES, M. (ed.), **Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva**. Huelva: SGSE, 2016, p. 21-29.

ESCUDERO, I. M.; GAVILÁN, J. M.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. Uma abordagem das mudanças no discurso matemático geradas no processo de definição. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 1, p. 7-32, 2014.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editoria UNESP, 2009.

EZAKI, J.; LI, J.; COPUR-GENCTURK, Y. Teachers' knowledge of fractions, ratios, and proportional relationships: The relationship between two theoretically connected content areas. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 235-255, 2024.

FALBO, R. de A. Mapeamento sistemático. **Retrieved October**, v. 7, 2018.

FALVO, S R.; JUCÁ, R. S. O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos anos iniciais. **Com a Palavra, o Professor**, v. 7, n. 18, p. 135-152, 2022.

FEITOSA, F. E. S.; RODRIGUES, R. Conhecimento especializado de futuros professores de matemática sobre os conceitos de área e perímetro de figuras planas. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 1, n. 26, 2025.

FLÔRES, A. A.; GUSMÃO, T. C. R. S. Processos de pensamentos ativados na resolução de tarefas matemáticas Standards e Não Standards. **Intermaths**, v. 3, n. 1, p. 183-209, 2022.

FRANK, A. G.. Formatos alternativos de teses e dissertações. *In:* **Blog Ciência Prática**. 15 abr. 2013. Disponível em: https://cienciapratica.wordpress.com/2013/04/15/formatos-alterativos-de-teses-e-dissertacoes/. Acesso em: 11, fev. 2026.

FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht: Reidel, 1983.

FUENTES LEAL, C. C. **El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la proporcionalidad: un estudio de caso.** 2020. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias y Filosofía). Departamento de Didácticas Integradas, Universidad de Huelva, Huelva, 2020.

GAITA, C.; WILHELMI, M. R.; UGARTE, F.; GONZALES, C. Indicadores de progresso em níveis de raciocínio algébrico elementar na resolução de tarefas de proporcionalidade no Ensino Primário. *In:* IX CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2022, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: PUC-SP, 2022, p. 2417-2429.

GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, V. H. G.; POGGIO, A. M. P. P. Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta. *In:* XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2015, p. 175-186.

GAMBOA, G.; FIGUEIRAS, L. Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. *In*: GONZÁLEZ, M. T.; CODES, M.; ARNAU, D.; ORTEGA, T. (ed.), **Investigación en Educación Matemática XVIII**. Salamanca: SEIEM, 2014, p. 337-344.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. (7. Ed.). São Paulo, SP: Editora Atlas SA, 2022.

HANNULA, M. Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions**. Educational Studies in Mathematics**, v. 63, n. 2, p. 165–178, 2006.

HART, K. Ratio and proportion. *In:* HIEBERT, J; BEHR, M. (ed.), **Number concepts andoperations in the Middle Grades 2**. Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 198-219.

HILL, H. C.; CHIN, M. Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. **American Educational Research Journal**, v. 55, n. 5, p. 1076-1112, 2018.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma crítica da crítica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, ano 18, n. 24, p. 1-30, 2005.

JITENDRA, A. K.; STAR, J. R.; RODRIGUEZ, M.; LINDELL, M.; SOMEKI, F. Improving student's proportional thinking using schema-based instruction. **Learning and Instruction**, v. 21, n. 6, p. 731-745, 2011.

KARPLUS, R. Proportional reasoning of early adolescents. *In:* LESH, R.; LANDAU, M. (ed.), **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 45-90.

KLEIN, F. **Elementarmathematik vom höheren Standpunkteaus** [Elementary mathematics from a higher standpoint]. Berlin: Springer, 1933.

LAMON, S. J. Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. *In:* LESTER, F. (ed.) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Volume 1.** Information AGE, 2016. p. 629-667.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teacher. New York: Routledge, 2012.

LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M.; MERLINI, V. L. Resolução de problemas de divisão de proporção simples por estudantes do 3º e 5º anos. *In:* VII SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais** [...]. Foz do Iguaçu: SBEM, 2018. p. 1-13.

LESH, R.; DOERR, H. Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. *In:* LESH, R.; DOERR H. M. (ed.), **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2003. p. 3-34.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. *In:* HIEBERT, J.; BEHR, M. (ed.) **Number concepts and operations in the middle grades.** Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118.

LIMA, E. L. Grandezas Proporcionais. *In:* I ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1987, PUC-São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1988. p. 27-44.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e Problemas Elementares.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics**: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999.

MACIEL, J. C. R.; SOTO, C. M. A. El tipo de cantidad en proporcionalidad con problemas de valor faltante. *In:* XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2015, p. 293-303.

MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. *In:* CASTRO, F. *et al.* (org.), **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Editora CRV: Curitiba, 2016. p. 65-82.

MALONEY, E. A.; SCHAEFFER, M. W.; BEILOCK, S. L. Mathematics anxiety and stereotype threat: Shared mechanisms, negative consequences and promising interventions. **Research in Mathematics Education**, v. 15, n. 2, p. 115–128, 2013.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, v. 27, n. 1, p. 141-156, 2011.

MARTINS, L. C. **Abstração Reflexionante e Aprendizagem de Proporção: ensino de matemática na sexta série**. 2007. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

MELLAR, H. Modeling students´thinking on a proportional reasoning task. **International Journal of Mathematics Education, Science and Technology**, v. 22, n. 1, p. 111-119, 1991.

MENDUNI-BORTOLOTI, R. D.; BARBOSA, J. C. A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 59, p. 947-967, 2017.

MERLINI, V. L.; SANTOS, A.; MAGINA, S. M. P. Desempenhos de estudantes dos 6º e 9º anos na resolução de problemas de proporção: um estudo comparativo. *In:* IX CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2022, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: PUC-SP, 2022, p. 2920-2931.

MINAYO, M. C. de S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 14. ed. São Paulo: Hucitec, 2014.

MIRANDA, M. R. **Pensamento proporcional:** uma metanálise qualitativa de dissertações. 2009. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MONTES, M. A. Las creencias en MTSK. *In*: CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.C.; MONTES, M. (ed.), **Reflexionando sobre el conocimiento del profesor**. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva. SGSE: Huelva, 2016. p. 55-59.

MONTES, M. A.; CLIMENT, N. Conocimiento dela estructura matemática (KSM). *In*: CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.C.; MONTES, M. (ed.), **Reflexionando sobre el conocimiento del profesor**. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva. Huelva: SGSE, 2016, p. 21-29.

MORI, L. A epidemia de ansiedade com matemática no Brasil e no mundo revelada por estudo da OCDE. **BBC News Brasil**, São Paulo, 13 nov. 2024 (Atualizado em 13 jan. 2025). Disponível em: Matemática: a epidemia de ansiedade com a matéria no Brasil e no mundo revelada por estudo - BBC News Brasil. Acesso em: 08 mar. 2025.

MUÑOZ-CATALÁN, M.C. **El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel**. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias y Filosofía). Universidad de Huelva, Huelva, 2010.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions & Proportional Reasoning for teaching mathematics in grades 6-8**. USA: NCTM, 2010. A Series for Teaching Mathematis.

NOELTING, G. The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I – Differentiation of stages. **Educational Studies in Mathematics**, v. 11, p. 217-253, 1980a.

NOELTING, G. The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II – Problem-structure and the mechanism of adaptative structuring. **Educational Studies in Mathematics**, v. 11, p. 331-363, 1980b.

NORTON; S. J. The construction of proportional reasoning. **International Group for the Psycology of Mathematics Education**, v. 4, p. 17-24, 2005.

OLIVEIRA, I. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 34, p. 57-79, 2009.

OLIVEIRA, L. M. C. P. Raciocínio proporcional em um problema envolvendo relações de proporcionalidade: aspectos evidenciados na CoP-PAEM. *In:* XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.

OLIVEIRA, L. M.; CYRINO, M. C. Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores de matemática. *In:* VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Pirenópolis. **Anais** […]. Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.

OLIVEIRA, L. M. C. P. de.; CYRINO, M. C. de C. T. Aprendizagens no empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional. *In:* ALMEIDA, L. W. de.; CYRINO, M. T.; SAVIOLI, A. M. (org.). **Educação Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e práticas de alunos**. Londrina: UEL, 2014. p. 51-76.

OLIVEIRA, E. S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. S. Raciocínio proporcional: uma discussão com base nas dimensões epistêmicas do saber. *In:* XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-14.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade através da resolução de problemas no curso superior de licenciatura em matemática. *In:* VI SEMINÁRIO

INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Pirenópolis, Brasil. **Anais** […]. Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.

PEÑA-RINCÓN, P.; GONZÁLEZ, N. R.; LÓPEZ, C. L.; MAGGIO, H. M. Razonamiento proporcional: desafíos de su enseñanza en la formación inicial del profesorado. In: XVI CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2023, Lima, Perú. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2023, p. 280-287.

PEREIRA, L. S. A.; GUSMÃO, T. C. R. S. A gestão do planejamento de tarefas matemáticas por professoras dos anos iniciais. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo Entre As Ciências**, v. 9, n. 1, p. 147-166, 2020.

PIÑEIRO, J., CASTRO-RODRÍGUEZ, E.; CASTRO, E. Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. **PNA**, v. 13, n. 2, p. 104-129, 2019.

PINTO, J.; GONZÁLEZ, M. Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas. Una aproximación para su estudio. *In:* BOLEA, M.; MORENO, M.; GONZÁLEZ, M. (ed.). **Investigación en Educación Matemática,** X. Huesca: SEIEM, 2006. p. 237-255.

POLYA, G. **How to solve it**. University Press, 1945.

POST, R. T.; BEHR, J. M.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. *In:* COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

POST, T., CRAMER, K.; HAREL, G.; KIEREN, T.; LESH, R. Research on rational number, ratio and proportionality. **Proceedings of PME-NA 20** (Vol. 1). Raleigh, NC, EUA, 1998. p. 89-93.

RAPETTI, V. Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. **Revista suma**, v. 44, p. 65-77, 2003.

RIBEIRO, M. Discutindo o conhecimento especializado do formador de professores de e que ensinam matemática - um exemplo focando tarefas para a formação. In: TRALDI JR; TINTI, A. D. S.; RIBEIRO, R. M. (org.). **Formação de professores que ensinam matemática:** processos, desafios e articulações com a educação básica. São Paulo: SBEM, 2020. p. 241-257.

RIBEIRO, M.; GIBIM, G.; ALVES, C. A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: Discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do conhecimento interpretativo. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1-24, 2021.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

RIBEIRO, M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Give sense to students' productions: a particular task in teacher education. *In:* **International Symposium Elementary Maths Teaching**, 2013, Czech Republic. Anais. Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education, 2013. p. 273-281.

RIBEIRO, M.; SILVA, C. Tarefas para a formação e pesquisa especializada para uma formação especializante. *In:* DELGADO-REBOLLEDO, R.; ZAKARYAN, D. (ed.), **Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas**. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2023. p. 35-38.

RODRIGUES, R. dos S.; FEITOSA, F. E. da S. Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de Matemática sobre o tópico proporcionalidade. **REMATEC**, Belém, v. 20, n. 53, p. e2025018, 2025a.

RODRIGUES, R. dos S.; FEITOSA, F. E. da S.. Contributos de uma situação didática para o desenvolvimento do conhecimento especializado para o ensino de semelhança de triângulos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)**, Florianópolis, v. 20, p. 01-25, jan./dez., 2025b.

RODRIGUES, R. dos S.; FEITOSA, F. E. da S.. Ensino e aprendizagem de proporcionalidade: algumas reflexões a partir de um mapeamento sistemático. **Ensino da Matemática em Debate**, [S. l.], v. 12, n. 3, p. 51–74, 2025c.

RODRIGUES, S. P.; FRANÇA, M. E. V.; RODRIGUES, R. V. R. Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória. *In:* IX SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2024, Natal. **Anais** [...]. Natal: SBEM, 2024. p. 1-15.

SCHEINER, T.; MONTES, M. A.; GODINO, J. D.; CARRILLO, J.; PINO-FAN, L. R. What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 17, n. 1, p. 153-172, 2019.

SCHELLER, M.; BONOTTO, D. Estratégias de resolução de situação problema de modelagem matemática e o pensamento proporcional: um estudo com estudantes de pedagogia. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 16, n. 36, p. 197-223, 2020.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. Razões e Proporções na vida diária e na escola. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37, 1997.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). **Journal of education**, v. 196, n. 2, p. 1-38, 2016.

SCHOENFELD, A. H. Models of the Teaching Process. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 18, n. 3, p. 243-261, 2000.

SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. *In:* WOOD, T.; TIROSH, D. (ed.). **Tools and Processes in Mathematics Teacher Education**. Sense Publishers, 2008. p. 321-354.

SHIELD, M.; DOLE, S. Investigating textbook presentations of ratio and proportion. *In:* B. BARTON, B.; IRWIN, K.; PFANNKUCK, M.; THOMAS, O. J. (ed.), **Mathematics Education in the South Pacific**, MERGA, Auckland, New Zealand, 2002.

SHULMAN, L.S. Those who understand. Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, A. F. G.; ALENCAR, E. S. de. O conhecimento profissional docente e sua relação com a ideia de proporcionalidade. Revista Eletrônica de Educação, São Carlos, v. 6, n. 2, p. 175-186, nov. 2012.

SILVA, A. F. G.; LOPES, S. C.; PIETROPAOLO, R. C.; CAMPOS, T. M. M. Conhecimentos profissionais explicitados por uma professora ao ensinar proporcionalidade. *In:* VII SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais** [...]. Foz do Iguaçu: SBEM, 2018. p. 1-13.

SILVA, A. F. G; PIETROPAOLO, R. C.; CAMPOS, T. M. M. Atual currículo de matemática do estado de São Paulo: indicações para a introdução do ensino da ideia de irracionalidade. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 62, p. 31-44, jan./jul. 2013.

SILVA, C.; RIBEIRO, M. Conhecimento Interpretativo do professor de matemática no âmbito das transformações geométricas e simetria. *In:* MENEZES, S.; RIBEIRO, M. (org.), **Pensar e fazer pesquisa na formação de professores com foco no conhecimento interpretativo e especializado do professor**. 1. ed. Campinas: Cognoscere, 2023. p. 181-195.

SILVA, E. A. **Pensamento Proporcional e regra de três: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas**. 2008. 210f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Tuiuti do Paraná, Paraná, 2008.

SILVER, E. A. On mathematical problem posing. **For the Learning of Mathematics**, v. 14, n. 1, 19-28. 1994.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. **Interacções**, v. 8, n. 20, p. 70-97, 2012.

SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Uma experiência de ensino da proporcionalidade no 2.º ciclo do ensino básico. *In:* VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.;

FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (org.), **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores** (Actas do XVI Encontro de Investigação em Educação Matemática). Caminha: SEM-SPCE, 2006. p. 295-313.

SOSA, L. **Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos**. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias y Filosofía). Universidad de Huelva, Huelva, 2011.

SOSA, L.; AGUAYO, L.; HUITRADO, J. KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. *In:* DOLORES, C.; GARCÍA, M.; HERNÁNDEZ, J.; SOSA, L. (ed.), **Matemática Educativa: la formación de profesores** (pp. 279-298). México D. F.: Díaz de Santos, 2013. p. 279-298.

SOUZA, F.; PALHARES, P.; OLIVERAS, M. L. Raciocínio proporcional e resolução de problemas em contextos piscatórios portugueses. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, v. 8, n. 2, p. 76-104, 2015.

SPINILLO, A. G. Ensinando Proporção a Crianças: alternativas pedagógicas em sala de aula. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 43, p. 11-48, ago./dez. 2003.

SPINILLO, A. G. Raciocínio proporcional em crianças: considerações acerca de alternativas educacionais. **Revista Pro-Posições**, v. 5, n. 1, p. 109-114, 1994.

SPINK, M. J.; MENEGON, V. M.; MEDRADO, B. Oficinas como estratégia de pesquisa: articulações teórico-metodológicas e aplicações ético-políticas. **Psicologia & Sociedade**, v. 26, p. 32-43, 2014.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa: estudando como as coisas funcionam**. Tradução: Karla Reis. Porto Alegre: Penso, 2011.

STAKE, R. E. **Qualitative case studies**. New York: Oxford University Press, 2005.

STOYANOVA, E.; ELLERTON, N. F. A framework for research into students' problem posing. *In:* CLARKSON, P. (ed.), **Technology in mathematics education**. Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia, 1996. p. 518-525.

STREEFLAND, L. Fractions: A realist approach. *In:* CARPENTER, T.P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T.A. (ed.), **Rational Numbers: An integration of research**. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1993. p. 289-325.

STREEFLAND, L. Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process. **Educational Studies in Mathematics**, v. 16, p. 75-94, 1985.

SUICA, D. I. Q.; RAMÍREZ, N. V. Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad. *In:* XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais** […]. República Dominicana: IACME, 2015, p. 33-41.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **ZETETIKÉ. Revista de Educação Matemática**, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

THOM, R. Modern mathematics: Does it exist? *In:* HOWSON, A. G. (ed.), **Developments in mathematics education**. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1973. p. 194-209.

THOMPSON, A. G. Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. *In:* GROUWS, D. A. (ed.), **Handbook on mathematics teaching and learning**. Reston, VA: NCTM, 1992. p. 127-146.

TINOCO, L. A. A. **Razões e proporções**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática/UFRJ, 1996.

TJOE, H.; de la TORRE, J. On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? **Journal of Mathematical Behavior**, v. 33, p. 1-7, 2014.

TORRES; E. **El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidade**. 274p. Tesis (Doctorado en Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2015.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? *In:* GUERSHON, H. E CONFREY, J. (ed.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In:* BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (org.) **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009.

VICARIO, V.; CARRILLO, J. Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de √2 y las funciones de la demostración. *In:* MAZ, A.; GÓMEZ, B.; TORRALBO, M. (ed.), **Investigación en Educación Matemática**, IX. Córdoba: SEIEM, 2005, p. 145-152.

VILLIERS, M. de. El papel y la función de la demostración en Matemáticas. **Epsilon**, n. 26, p. 15-30, 1993.

APÊNDICE A – Parte Preliminar da Tarefa para Formação

1. O que você entende por:

a. Proporcionalidade?

b. Proporcionalidade direta? Dê um exemplo de uma situação em que as variáveis são diretamente proporcionais.

c. Proporcionalidade inversa? Dê um exemplo de uma situação em que as variáveis são inversamente proporcionais.

Para cada um dos problemas abaixo, você irá responder às seguintes perguntas:

a. Quais as grandezas envolvidas na situação?
b. Pode-se dizer que há uma situação de proporcionalidade? Se sim, justifique.
c. Resolva o problema, explicando o seu raciocínio e descrevendo o processo que usar para resolver a questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos etc.



2. Kauê e Lúcia corriam à mesma velocidade na pista de corrida da Vila Olímpica. Kauê começou antes. Quando ele terminou a 6ª volta, Lúcia acabou a 3ª. Quando Lúcia completou 15 voltas, quantas voltas tinha completado Kauê?

3. Mantendo uma velocidade, um carro percorre $250\ km$ em 3 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 5 horas? Em um outro trecho, sabe-se que se o carro andar a $80\ km/h$, levará 5 horas para percorrer este trecho. A que velocidade o carro deverá andar se quiser percorrer esse trecho em 4 horas?

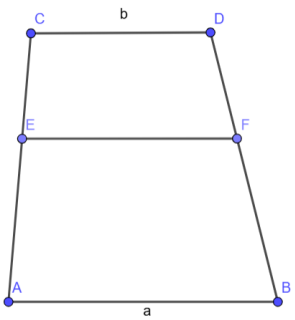




4. Dona Iraci foi à feira comprar tucumã para o seu restaurante de café regional. Na primeira banca, $3\,kg$ de tucumã saem por R$ 210,00, enquanto na segunda banca, $8\,kg$ saem por R$ 640,00. Qual é a proposta de compra mais vantajosa para Dona Iraci?

5. A receita de cookies de dona Irlane pede 4 xícaras de farinha para fazer 24 cookies. O cozinheiro em treinamento contou errado e acabou colocando 5 xícaras na intenção de fazer 32 cookies. Ele colocou farinha demais ou de menos nos seus cookies?





6. Considere o trapézio $ABCD$ de base maior com medida 6 e base menor com medida 4. Qual é a medida do seguimento EF se os trapézios $ABFE$ e $EFDC$ são semelhantes?

7. Dado que a razão entre o número de torcedores do boi caprichoso e o número de torcedores do boi garantido no Bumbódromo de Parintins é de 15 para 12, os torcedores do boi caprichoso representam que fração do número de torcedores presentes no Bumbódromo?



8. Uma lancha faz o percurso Itacoatiara – Manaus com uma velocidade média de $20\,m/s$. Se a distância percorrida pela lancha entre os dois municípios é de cerca de $216\,km$, depois de quantas horas da partida do porto de Itacoatiara a lancha aportará em Manaus?



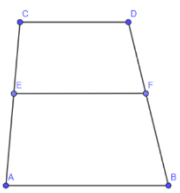


9. Mateus tem o costume de fazer caminhadas no parque próximo a sua casa todo final de semana. Sabendo que ele caminha 9 quilômetros em 3 horas, qual a razão, nessa situação, entre quilômetro e hora?

APÊNDICE B – Análise detalhada dos Problemas 3 a 9 da Atividade Diagnóstica (Parte Preliminar da Tarefa para Formação)

A seguir, apresentam-se os sete problemas que serão analisados nesta seção (Quadro B1). De modo semelhante ao procedimento adotado no artigo previamente divulgado, os participantes (identificados pelas letras A a G) foram orientados a seguir um mesmo percurso de resolução para todos os problemas: identificar as grandezas envolvidas na situação, reconhecendo que esse conhecimento é transversal ao conceito de proporcionalidade e fundamental para a compreensão conceitual das relações entre quantidades; indicar se havia ou não uma situação de proporcionalidade, justificando sua resposta (KoT – Fenomenologia e aplicações); e, por fim, resolver o problema proposto, explicitando o raciocínio utilizado por meio de esquemas, linguagem natural, cálculos ou outras representações (KoT – Procedimentos). A partir desse encaminhamento, procede-se à análise das produções dos participantes, considerando as estratégias mobilizadas e os conhecimentos especializados evidenciados em cada tipo de problema.

Quadro B1 – Questões 3 a 9 do questionário diagnóstico.

PROBLEMA	**CATEGORIA** (Lesh; Post; Behr, 1988)
3. Um canavial tem a forma de um quadrado com 60 metros de lado e um lavrador consegue ceifá-lo em 4 dias. Em quantos dias o mesmo lavrador ceifaria um canavial quadrado com 100 metros de lado?	Problema de Valor Omisso
4. Dona Iraci foi à feira comprar tucumã para o seu restaurante de café regional. Na primeira banca, 3 kg de tucumã saem por R$ 210,00, enquanto na segunda banca, 8 kg saem por R$ 640,00. Qual é a proposta de compra mais vantajosa para Dona Iraci?	Problema de Comparação
5. A receita de cookies de dona Irlane pede 4 xícaras de farinha para fazer 24 cookies. O cozinheiro em treinamento contou errado e acabou colocando 5 xícaras na intenção de fazer 32 cookies. Ele colocou farinha demais ou de menos nos seus cookies?	Problema de Transformação
6. Considere o trapézio ABDC de base maior com medida 6cm e base menor com medida 4cm. Qual é a medida do seguimento EF se os trapézios ABFE e EFDC são semelhantes? 	Problema de Média

7. Dado que a razão entre o número de torcedores do boi caprichoso e o número de torcedores do boi garantido no Bumbódromo de Parintins é de 15 para 12, os torcedores do boi caprichoso representam que fração do número de torcedores presentes no Bumbódromo?	Problema de Conversão
8. Uma lancha faz o percurso Itacoatiara – Manaus com uma velocidade média de 20 m/s. Se a distância percorrida pela lancha entre os dois municípios é de cerca de 216 km, depois de quantas horas da partida do porto de Itacoatiara a lancha aportará em Manaus?	Problema envolvendo unidades de medidas e números
9. Mateus tem o costume de fazer caminhadas no parque próximo a sua casa todo final de semana. Sabendo que ele caminha 9 quilômetros em 3 horas, qual a razão, nessa situação, entre quilômetro e hora? (Expresse essa razão de pelo menos duas formas distintas).	Problema de translação

Fonte: elaborado pela autora.

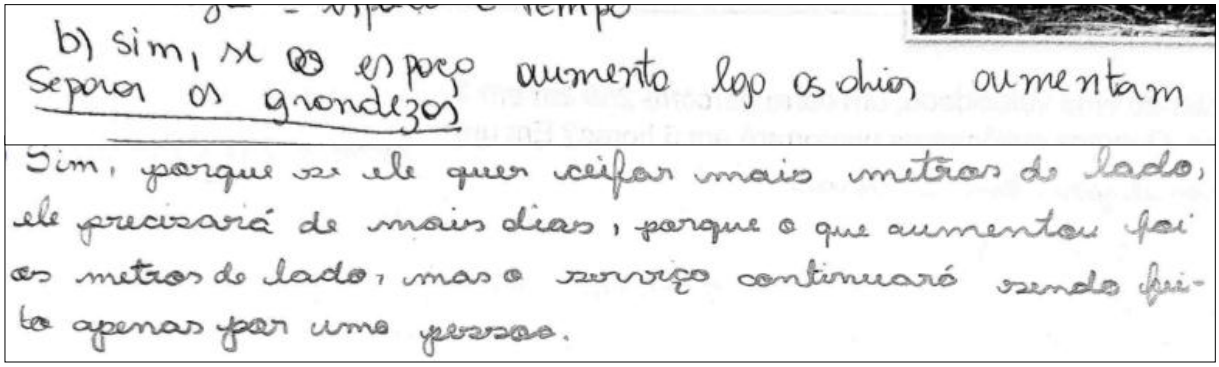
No **problema 3**, pertencente à categoria Problema de Valor Omisso, os participantes deveriam estabelecer uma relação de proporcionalidade entre grandezas para determinar um valor desconhecido. Essa situação buscava aceder ao conhecimento da distinção entre situações proporcionais e não proporcionais (KoT – Fenomenologia e aplicações), visto que os participantes deveriam ter a percepção de que a correspondência (medida do lado) ↦ (número de dias) não representa uma situação de proporcionalidade. Na verdade, a proporcionalidade está presente na relação entre o número de dias para a ceifa e a área de plantação, que no caso seriam 3.600m² e 10.000m², o que demonstra a importância de identificar as grandezas envolvidas na situação – nesse caso, área e tempo – e analisar criticamente a relação entre elas, a fim de garantir que de fato há uma relação de proporcionalidade.

No que se refere à identificação das grandezas envolvidas na situação, observou-se que três participantes (B, D e G) não conseguiram explicitá-las, seja por desconhecimento do conceito de grandeza, seja por não se recordarem de seu significado. Outros dois participantes (C e E) indicaram apenas as unidades de medida — metros e dias — em vez das grandezas correspondentes, revelando uma confusão entre os conceitos de grandeza e unidade. O participante A identificou as grandezas como espaço e tempo, enquanto a participante F mencionou o canavial como elemento central da situação, sem explicitar as variáveis envolvidas. Esses resultados evidenciam fragilidades conceituais na identificação das grandezas e na análise das

relações estabelecidas entre elas, aspecto que se articula aos achados de Rodrigues, França e Rodrigues (2024), ao apontarem que dificuldades dessa natureza tendem a persistir na resolução de diferentes tipos de problemas envolvendo proporcionalidade.

Quanto à indicação se o problema envolvia ou não uma situação de proporcionalidade, além da devida justificativa, os resultados desta seção seguem o padrão do que foi descrito no artigo que analisa o Problema 1 do questionário, ou seja, cinco participantes afirmaram que havia sim uma situação envolvendo proporcionalidade, enquanto duas (B e G) não responderam ao comando, embora tenham tentado solucionam o problema. Dentre aqueles que indicaram a existência de proporcionalidade, os participantes A e C fundamentaram suas respostas na ideia de que o crescimento de uma das grandezas acarretaria o crescimento da outra (Figura B1). Essa justificativa, no entanto, além de caracterizar um pensamento de natureza qualitativa (Vergara; Estrella; Vidal-Szabó, 2020), revela uma compreensão limitada do conceito, uma vez que a simples covariação não caracteriza, por si só, uma relação proporcional, apontando fragilidades no âmbito do KoT – Fenomenologia e aplicações.

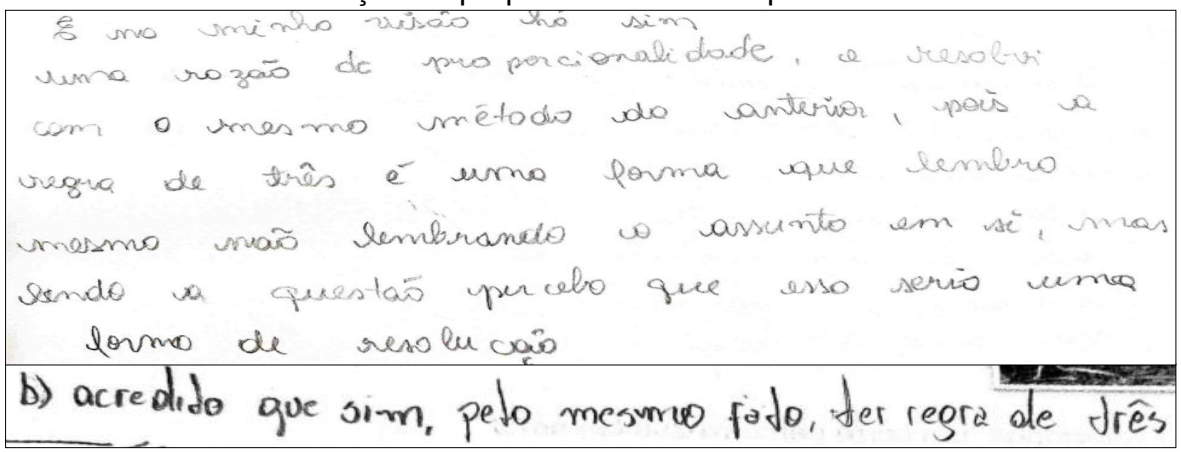
Figura B1 – Justificativa dos participantes A e C, respectivamente, para caracterizar uma situação de proporcionalidade no problema 3.



Fonte: dados da pesquisa.

As participantes B e F, para justificarem o porquê de a situação envolver proporcionalidade, mobilizaram o seguinte raciocínio: como a situação permite o uso do procedimento regra de três, logo ela envolve uma relação de proporcionalidade (Figura B2).

Figura B2 – Justificativa dos participantes D e F, respectivamente, para caracterizar uma situação de proporcionalidade no problema 3.



Fonte: dados da pesquisa.

As justificativas apresentadas indicam uma inversão na compreensão conceitual da proporcionalidade visto que, em vez de reconhecerem que a existência de uma relação proporcional entre grandezas justifica o uso da regra de três como procedimento de resolução, as participantes partiram do procedimento algorítmico para inferir a natureza da relação. Assim, ao identificarem a possibilidade de aplicar a regra de três, concluíram, de forma indevida, que a situação envolvia proporcionalidade, estabelecendo uma relação de causalidade inversa entre conceito e procedimento. Essa inversão evidencia uma fragilidade no KoT – Fenomenologia e aplicações, na medida em que o critério utilizado para caracterizar a proporcionalidade não se apoia na análise das grandezas e de sua variação, mas exclusivamente na familiaridade com um método algorítmico.

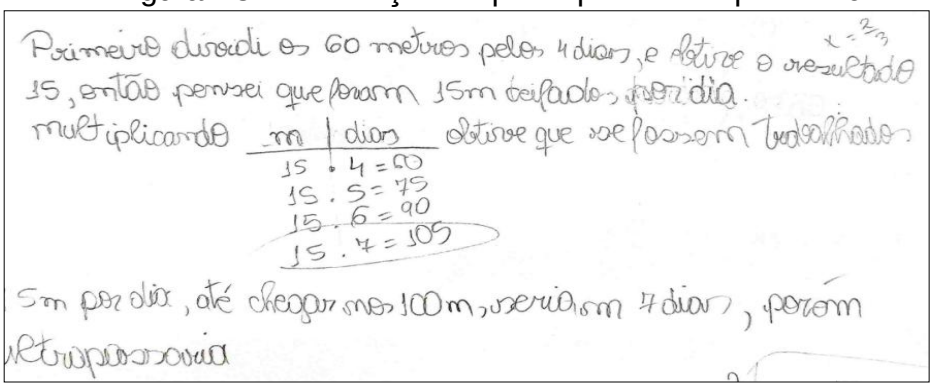
Por fim, o participante E justificou sua resposta apenas com a expressão “relação entre metros e dias”, repetida nas demais questões com ajustes pontuais nas grandezas mencionadas. Essa forma de resposta não evidencia o reconhecimento da natureza da relação entre as grandezas, nem mobiliza critérios associados à caracterização de situações proporcionais, indicando fragilidades no conhecimento relacionado ao KoT – Fenomenologia e aplicações.

Já com respeito à resolução do problema, almejamos aceder ao conhecimento das diferentes estratégias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos), como por exemplo, a busca pelo valor unitário, ou seja, descobrir quantos dias o lavrador leva para ceifar 1m² de plantação, para então descobrir quantos dias ele levaria para ceifar os 10.000m² necessários à situação. No entanto, nenhum dos participantes apresentou uma resolução correta, resultado que

está diretamente associado à escolha inadequada das grandezas consideradas na relação proporcional, visto que todos os participantes tomaram o comprimento do lado do canavial como variável proporcional ao tempo de ceifa, desconsiderando que a quantidade de trabalho envolvida depende da área a ser ceifada, revelando uma fragilidade no KoT – Fenomenologia e aplicações (conhecimento da distinção entre situações proporcionais e não proporcionais).

Apesar da identificação incorreta das grandezas envolvidas na relação proporcional, a partir da análise das estratégias utilizadas pelos participantes, pôde-se observar que a participante B utilizou-se da *busca pelo valor unitário* (KoT – Procedimentos), através da qual encontrou que o lavrador ceifaria 15 metros em um único dia (Figura B3). Após isso, construiu uma tabela (KoT – Registros de Representação), utilizando corretamente o raciocínio multiplicativo (KoT – Procedimentos), inerente ao pensamento proporcional, para determinar quantos metros o lavrador ceifaria com a variação da quantidade de dias. No entanto, a participante não soube como proceder quando viu que o resultado esperado não seria uma quantidade exata, elegendo o inteiro mais próximo.

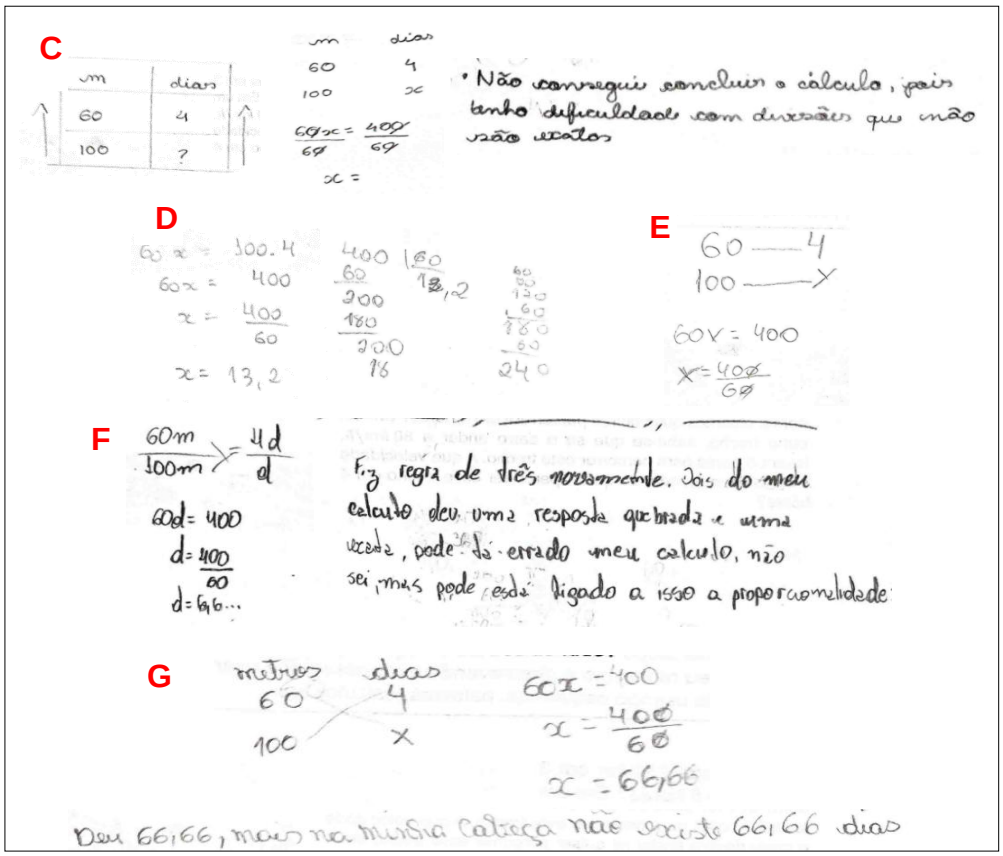
Figura B3 – Resolução da participante B à questão 3.



Fonte: dados da pesquisa.

A dificuldade em operar com divisões não exatas foi observada também em outros cinco participantes (Figura B4). A participante C organizou as quantidades das grandezas em uma tabela, utilizando ainda setas para representar a relação de proporcionalidade direta entre elas. Com base nessas representações, estabeleceu uma proporção e recorreu ao procedimento da *regra de três* (KoT – Procedimentos) para resolvê-la; contudo, não concluiu a divisão, justificando ter dificuldades em lidar com divisões não exatas.

Figura B4 – Resolução dos participantes C, D, E, F e G à questão 3



Fonte: dados da pesquisa.

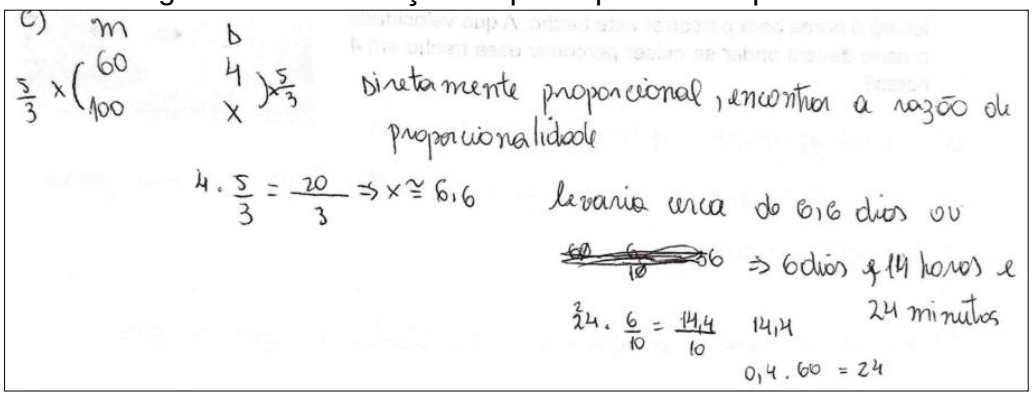
Como se pode observar na figura, os participantes D, E, F e G também recorreram à regra de três (KoT – Procedimentos) na tentativa de solucionar o problema. Entretanto, D e G obtiveram resultados incorretos em decorrência de erros na execução da divisão, sendo que a participante G, além disso, questionou a legitimidade do resultado encontrado, afirmando que “não existe” a quantidade 66,66 dias, o que reafirmou na entrevista:

> **Participante (G):** *É porque é… é um dia todo, né... eu acho assim que não existe 66,66 dias. É um dia, dois dias, três dias. Acho que na minha cabeça não faz sentido.*

O participante E não chegou a finalizar a divisão de 400 por 60, enquanto a participante F, embora tenha encontrado corretamente o valor 6,6…, demonstrou insegurança em relação à resposta por não se tratar de uma quantidade inteira. Esse conjunto de evidências revela uma fragilidade recorrente no uso da divisão, a qual, embora seja mobilizada em conceitos fundamentais como proporção, fração, razão e covariação, todos pertencentes à estrutura multiplicativa, constitui-se como um dos obstáculos mais persistentes no processo de aprendizagem matemática (Castro et al., 2016; Lautert; dos Santos; Merlini, 2018).

Por fim, como se observa na Figura B5, o participante A sabia tratar-se de uma relação diretamente proporcional (KoT – Definição) e o impacto dessa informação na sua estratégia de resolução – estratégia escalar (Spinillo, 1994) – através da qual descobriu o fator escalar, isto é, por quanto o valor inicial de uma grandeza foi multiplicado para chegar à nova quantidade, que será o mesmo valor pelo qual ele vai multiplicar o valor inicial da outra grandeza a fim de determinar o valor de x (KoT – Procedimentos).

Figura B5 – Resolução do participante A à questão 3.



Fonte: dados da pesquisa.

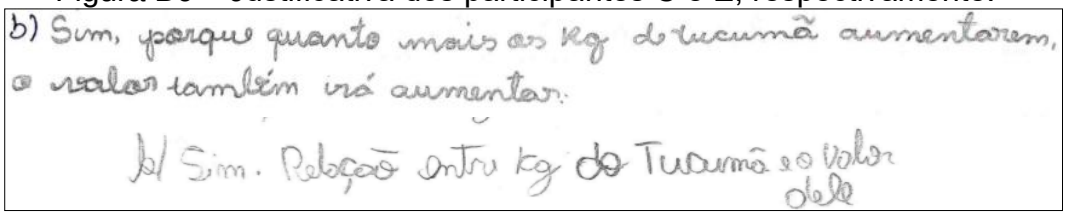
Um aspecto que merece atenção é que, diferentemente dos demais, o participante A não apenas reconheceu a legitimidade da quantidade não inteira 6,6 dias, como também procedeu à sua conversão para uma medida de tempo composta (KoT – Procedimentos), expressando-a em dias, horas e minutos, ao encontrar 6 dias, 14 horas e 24 minutos. Essa ação evidencia a mobilização do pensamento proporcional e a compreensão de que grandezas contínuas, como o tempo, admitem representações equivalentes em diferentes unidades (KoT – Propriedades e fundamentos).

O **problema 4** pertence à categoria Problema de Comparação e visa aceder ao conhecimento das diferentes estratégias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos), nesse caso, por exemplo, o de usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade ao trabalhar com proporcionalidade (KoT – Procedimentos) e o de fazer comparações numéricas – envolvendo os números racionais – e não numéricas (KoT – Procedimentos), a fim de determinar se as razões envolvidas no problema eram equivalentes ou, se não, qual era a relação entre elas.

Primeiramente, com respeito à identificação das grandezas envolvidas no problema, recordemos que os participantes B, D e G não responderam mais ao comando a partir dessa questão pois não sabia/recordavam o conceito. O participante A afirmou serem as grandezas “massa” e “dinheiro”, contudo, não obstante a referência a “dinheiro” indique uma compreensão intuitiva da situação, ela não caracteriza, do ponto de vista matemático, a identificação adequada da grandeza envolvida, que deveria ser explicitada como preço ou valor em reais. A participante C novamente identificou a unidade de medida de cada grandeza, quilos e reais, e não as grandezas em si. Já o participante E escreveu “relação entre Kg de tucumã e o valor dele” enquanto a participante F demonstrou dúvidas ao escrever “não sei, os tucumãs? ”.

No que se refere à identificação da presença ou não de uma situação de proporcionalidade no problema, B e G não responderam ao comando (assim como nos problemas seguintes). Os participantes C e E deram respostas afirmativas (Figura B6), contudo apenas a justificativa de C, embora incompleta, permite-nos observar seu raciocínio, expresso de maneira mais informal, e que novamente caracteriza um pensamento de natureza qualitativa (Vergara; Estrella; Vidal-Szabó, 2020) ao não fazer menção à constante de proporcionalidade ou à equivalência entre razões, revelando fragilidades no âmbito do KoT – Fenomenologia e aplicações.

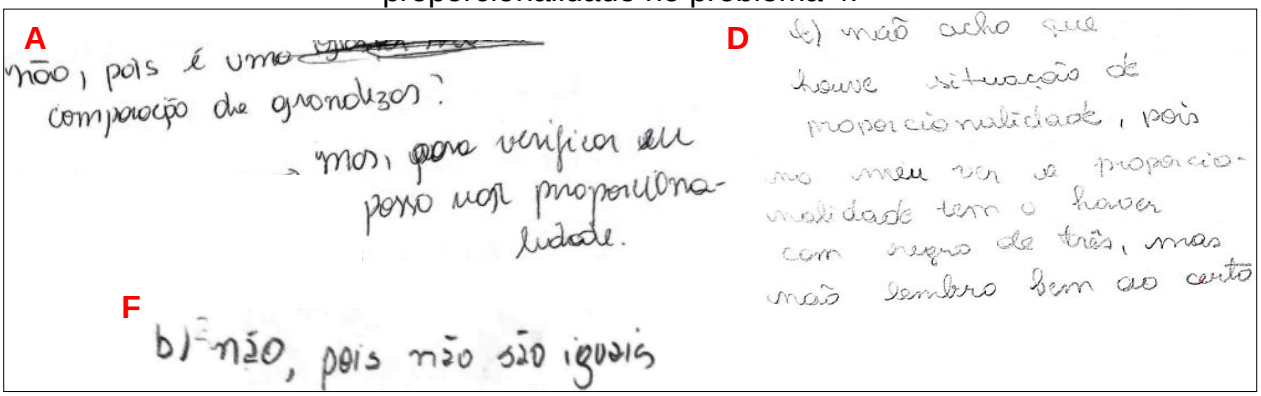
Figura B6 – Justificativa dos participantes C e E, respectivamente.



Fonte: dados da pesquisa.

Finalmente, com respeito aos participantes que negaram a presença de proporcionalidade (A, D e F), estes parecem associar esse conceito exclusivamente a problemas de valor omisso (que tratam de razões equivalentes) ou à aplicação direta da regra de três, desconsiderando que problemas de comparação de razões também mobilizam o pensamento proporcional. Tal compreensão limitada indica fragilidades no conhecimento relacionado ao KoT – Fenomenologia e aplicações (Figura B7).

Figura B7 – Justificativa dos participantes A, D e F para caracterizar uma situação de proporcionalidade no problema 4.



Fonte: dados da pesquisa.

Um aspecto que merece destaque é a aparente contradição presente na resposta do participante A, que afirmou que o problema não envolvia uma situação de proporcionalidade, mas, ao mesmo tempo, reconheceu a possibilidade de resolvê-lo por meio de um raciocínio proporcional. Na entrevista, ao ser questionado sobre essa posição, o participante explicou:

> **Participante (A):** *Bem, eu pegaria uma situação inicial, como por exemplo ela diz aqui que 3 quilos de tucumã sai por 210 reais. Aí eu imaginei "Ah, se eu pegar o preço de 1 quilo e comparar com o preço de 1 quilo da outra, que seria mais em conta? " Eu pensei dessa forma.*

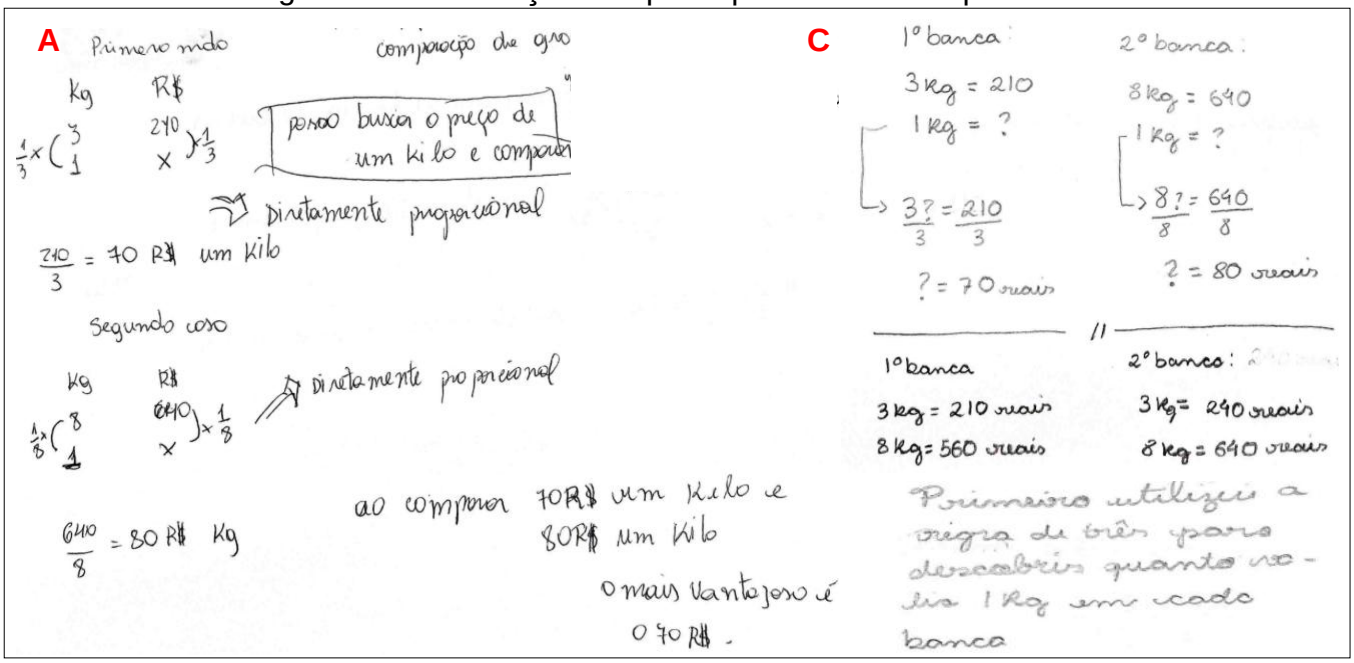
Essa fala evidencia que, embora o participante tenha mobilizado a comparação de razões unitárias, obtidas por meio da estratégia de busca pelo valor unitário (KoT – Procedimentos), ele não reconheceu a situação como proporcional. Tal posicionamento sugere que, por o problema não apresentar a estrutura mais convencionalmente associada à proporcionalidade, como nos problemas de valor omisso, o participante não o identificou como uma situação proporcional, apesar de ter recorrido a um raciocínio característico do pensamento proporcional para resolvê-lo.

Dando prosseguimento com a resolução do problema, a estratégia utilizada pela maioria dos participantes foi a busca pelo valor unitário (KoT – Procedimentos), na qual os estudantes determinam inicialmente o valor correspondente a uma unidade e, a partir dele, procedem à resolução da situação proposta (Oliveira, 2009). Dentre os participantes que recorreram à essa estratégia, observam-se dois encaminhamentos distintos. Dois deles conseguiram mobilizar essa estratégia de forma adequada, chegando à resposta correta, enquanto os outros dois, embora

tenham adotado o mesmo procedimento inicial, não obtiveram êxito na resolução do problema.

Dentre os participantes que utilizaram a estratégia de busca pelo valor unitário, o participante A, após reconhecer a existência de uma relação de proporcionalidade direta, recorreu à estratégia escalar (KoT - Procedimentos) para determinar o preço correspondente a 1 kg de tucumã em cada banca. Em seguida, comparou os valores unitários obtidos, com o objetivo de identificar a proposta de compra mais vantajosa para Dona Iraci. A participante C declarou ter utilizado a regra de três para determinar o preço de 1 kg de tucumã em cada banca (KoT – Procedimentos) (Figura B8). Embora não tenha explicitado a existência de uma relação de proporcionalidade direta, a participante demonstrou reconhecer, de forma intuitiva, que o aumento da quantidade de tucumã implica o aumento do valor correspondente, utilizando esse argumento como justificativa, ainda que incompleta, para caracterizar a relação proporcional.

Figura B8 – Resolução dos participantes A e C à questão 4.

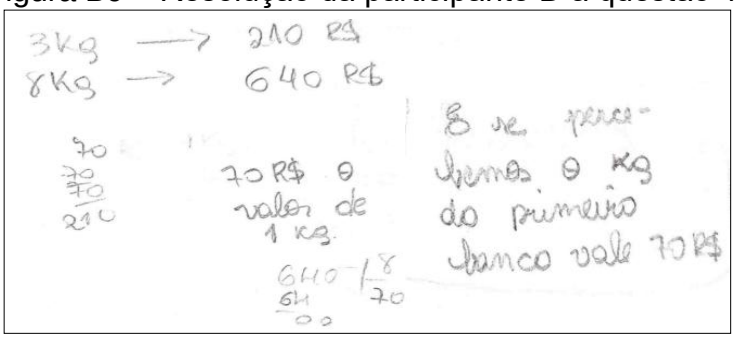


Fonte: dados da pesquisa.

Entre os participantes que recorreram à estratégia de busca pelo valor unitário, mas não obtiveram êxito na resolução, destaca-se a participante D, que concluiu que o valor cobrado era o mesmo nas duas bancas. Esse erro decorreu de um equívoco na divisão de 640 por 8, calculada como 70, quando o valor correto seria 80, correspondente ao preço por quilograma na segunda banca. Coincidentemente, o

valor incorretamente obtido coincide com o preço unitário da primeira banca (210 ÷ 3), o que levou à conclusão equivocada de equivalência entre as propostas (Figura B9). Ainda assim, observa-se a mobilização da estratégia aditiva (Oliveira, 2009), evidenciada pela utilização da soma sucessiva (70 + 70 + 70) para reconstruir o valor referente a 3 kg de tucumã, necessário à comparação (KoT – Procedimentos).

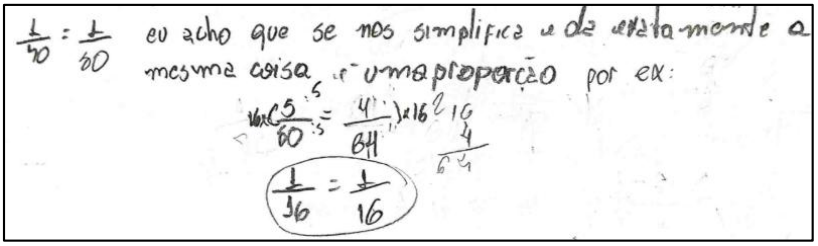
Figura B9 – Resolução da participante D à questão 4.



Fonte: dados da pesquisa

A participante F, embora tenha determinado corretamente o valor unitário em cada banca, não conseguiu avançar na resolução do problema, uma vez que associou a noção de proporcionalidade à necessidade de estabelecer uma igualdade entre razões (Figura B10). Essa compreensão a levou a tratar a situação como se fosse necessário construir uma proporção no sentido formal, isto é, igualar duas razões, o que não se aplica a esse tipo de problema. Nesse contexto, a proporcionalidade se manifesta no interior de cada razão, quando se busca uma razão equivalente (como a razão unitária) para cada proposta separadamente, e não na igualdade entre as duas razões obtidas. O procedimento requerido, portanto, consiste na comparação dessas razões distintas, a fim de identificar qual delas representa a proposta mais vantajosa.

Figura B10 – Resposta da participante F à questão 4.

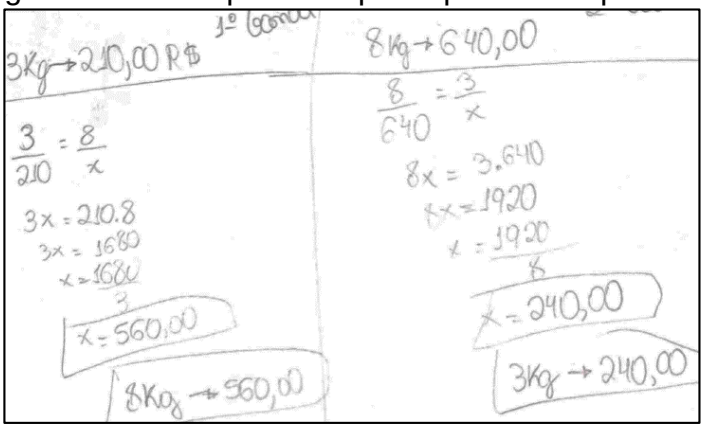


Fonte: dados da pesquisa.

A participante B fez uso do procedimento da regra de três (KoT – Procedimentos) para calcular quanto custariam 8 kg de tucumã na primeira banca e,

de modo análogo, quanto custariam 3 kg de tucumã na segunda banca. Ao igualar as quantidades para fins de comparação, pôde confrontar os valores obtidos e concluir que, para as quantidades consideradas, a primeira banca apresentava a proposta mais vantajosa para Dona Iraci (Figura B11).

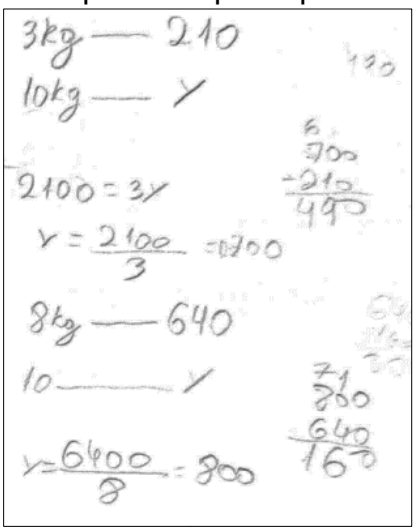
Figura B11 – Resposta da participante B à questão 4.



Fonte: dados da pesquisa

O participante E iniciou sua resolução de forma adequada ao recorrer à regra de três (KoT – Procedimentos) para estimar o valor correspondente a 10 kg de tucumã em cada uma das bancas. Entretanto, em vez de realizar a comparação direta entre os valores obtidos, utilizou como critério a diferença entre esses resultados e os valores iniciais apresentados no enunciado (700 − 210 e 800 − 640), conforme mostra a Figura B12. Como a diferença calculada para a segunda banca foi menor, o participante concluiu, de maneira equivocada, que essa seria a opção mais vantajosa.

Figura B12 – Resposta do participante E à questão 4.



Fonte: dados da pesquisa.

Quando questionado acerca de sua estratégia, o participante justificou:

> **Participante (E):** *Acho que não tinha entendido direito mesmo, aí acabei fazendo esses cálculos aqui que nem precisava [...]. Hipoteticamente eu coloquei esses 10 kg aqui como se fosse um preço ideal, um quilo ideal pra ela, tipo ela queria chegar a 10 kg, tendeu? Aí eu falei "ah vou fazer aqui quanto que falta pra dar". Aí, só que...*

Tal procedimento evidencia uma fragilidade conceitual, uma vez que as diferenças obtidas expressam apenas a distância entre as quantidades iniciais e a quantidade tomada como referência para a comparação (10 kg), e não o custo relativo por unidade de tucumã, o que o próprio participante reconheceu, posteriormente, ao revisar a resolução.

Por fim, a participante G, a partir dessa questão, não apresentou mais resolução aos problemas e nem respondeu às perguntas sobre a identificação das grandezas envolvidas ou se o problema tratava, ou não, de uma situação de proporcionalidade. Dito isso, com relação à questão 4, a participante afirmou:

> **Participante (G):** *É porque eu não entendi o que que aqui também tem dois casos, né. Aí eu não consegui nem identificar por regra de três, nem por outro método. Não consegui de jeito nenhum [...]. Aí eu não consegui juntar pra chegar a uma conclusão. Pra mim tinha dois problemas aqui, mas eu não consegui identificar.*

Quando questionada sobre os motivos que a impediram de utilizar a regra de três, a participante esclareceu que não conseguiu estruturar uma proporção, uma vez que o enunciado apresentava quatro valores explícitos, e não a configuração que reconhecia como típica desse procedimento, isto é, três quantidades conhecidas e uma incógnita a ser determinada. Essa compreensão levou-a a interpretar a situação como envolvendo "dois casos" distintos, o que a impediu de articular as informações do enunciado e de estabelecer uma relação entre as grandezas, ou seja, quando a participante diz que "são dois casos", ela identifica corretamente a existência de duas situações, o que se alinha a problemas de comparação, mas não consegue articulá-las proporcionalmente.

Tal posicionamento evidencia uma concepção restrita de proporcionalidade, fortemente associada à estrutura formal do problema de valor omisso e ao uso mecânico da regra de três, dificultando o reconhecimento de situações proporcionais que exigem a comparação entre razões, como é o caso deste problema, o que caracteriza uma fragilidade no KoT – Fenomenologia e aplicações.

Esses resultados vão ao encontro do que apontam Lesh, Post e Behr (1988), ao destacarem que problemas de comparação exigem a coordenação entre razões, e não a simples determinação de um valor desconhecido. Do mesmo modo, Cramer,

Post e Currier (1993) ressaltam que o pensamento proporcional não se restringe à construção e resolução de proporções formais, mas envolve a capacidade de analisar e comparar razões em diferentes contextos. A dificuldade dos participantes reforça a tendência, já documentada na literatura, de reduzir a proporcionalidade a procedimentos algorítmicos, em detrimento de uma compreensão conceitual mais ampla.

Dando continuidade às análises, segundo a literatura, os problemas do tipo 5 ao 9 têm sido negligenciados no ensino norteado pelo currículo e na pesquisa em educação matemática (Lesh; Post; Behr, 1988), o que vai ao encontro dos resultados desta pesquisa visto que foram os problemas em que os estudantes mais tiveram dificuldades.

O **problema 5** pertence à categoria Problema de Transformação, em que, neste caso, os estudantes teriam de realizar uma transformação em uma desigualdade para obter uma igualdade. Ela visa aceder ao conhecimento de usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade ao trabalhar com proporcionalidade (KoT – Procedimentos), de fazer comparações numéricas – envolvendo os números racionais – e não numéricas (KoT – Procedimentos), do uso da ideia de covariação (KoT – Propriedades) e das diferentes estratégias utilizadas para resolver problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos), além de investigar também o conhecimento a respeito dos contextos que possuem a proporcionalidade como característica intrínseca (KoT – Fenomenologia e aplicações), como é o caso de receitas culinárias, cujas quantidades de ingredientes variam proporcionalmente.

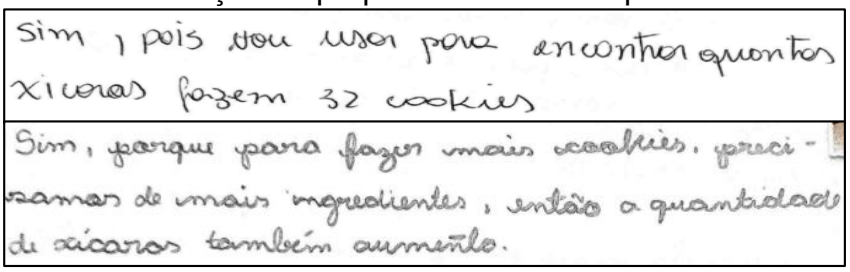
No que se refere à identificação das grandezas envolvidas, observam-se diferentes níveis de adequação conceitual. O participante A mencionou “xícaras”, indicando confusão entre grandeza e unidade de medida, e “quantidade”, um termo genérico que não explicita a variável em questão. No entanto, a análise da entrevista indica que tal resposta esteve mais associada à falta de rigor terminológico do que à ausência de compreensão conceitual, uma vez que o participante demonstrou conhecer a definição de grandeza e de unidade de medida, bem como a distinção entre elas, identificando corretamente as grandezas envolvidas no problema quando questionado novamente.

Já os participantes C e E identificaram adequadamente a quantidade de cookies, mas recorreram à unidade (“xícaras”) em lugar da grandeza correspondente

à quantidade de farinha. A participante F, assim como os participantes B, D e G, também não respondeu mais a esse comando a partir dessa questão afirmando não saber o que é uma grandeza.

No que se refere à identificação da presença ou não de uma situação de proporcionalidade no problema, apenas os participantes A e C responderam de forma afirmativa (Figura B13). A participante C, mais uma vez, evidencia um raciocínio predominantemente qualitativo. Já no caso do participante A, a justificativa apresentada mostra-se conceitualmente frágil, uma vez que a existência de uma relação proporcional é inferida a partir do próprio procedimento adotado para resolver a situação. Tal justificativa desconsidera que o uso de uma proporção pressupõe, previamente, o reconhecimento de que a situação envolve proporcionalidade, o que evidencia uma fragilidade no conhecimento associado ao KoT – Fenomenologia e aplicações.

Figura B13 – Justificativa dos participantes A e C, respectivamente, para caracterizar uma situação de proporcionalidade no problema 5.



Fonte: dados da pesquisa.

A participante D afirmou que o problema não envolvia proporcionalidade pelo mesmo motivo apresentado na questão anterior, isto é, por não identificar a presença direta da regra de três. Tal posicionamento indica que a mobilização do conceito de proporcionalidade ocorre, em grande parte, de forma restrita à aplicação desse procedimento algorítmico, com ênfase apenas nas propriedades de razões equivalentes (Tinoco, 1996; Schliemann; Carraher, 1997).

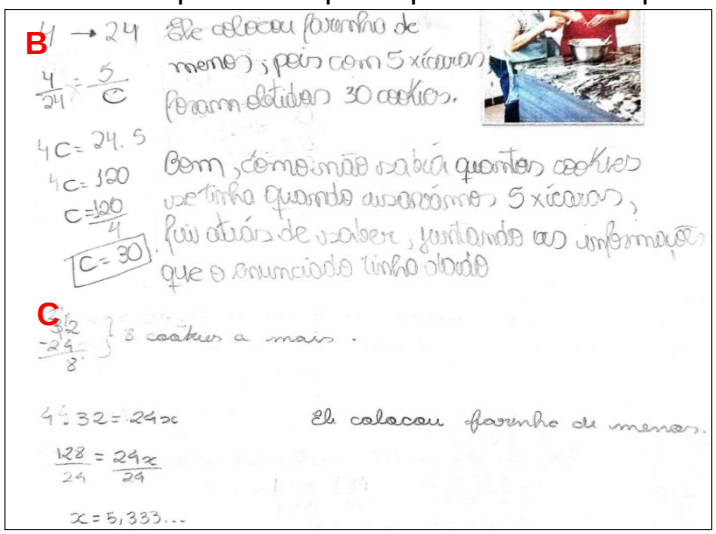
O participante E limitou-se a responder “relação entre as grandezas”, sem explicitar se considerava ou não que a situação envolvia uma relação proporcional. Já a participante F afirmou não saber se o problema tratava de proporcionalidade, embora acredite ter utilizado uma proporção em sua resolução, evidenciando, mais uma vez, que a aplicação de procedimentos associados à proporção não implica,

necessariamente, a mobilização do pensamento proporcional (Tjoe; de la Torre, 2014; Lesh; Post; Behr, 1988).

Esse cenário evidencia uma fragilidade nos conhecimentos relacionados ao KoT – Fenomenologia e aplicações, ao revelar dificuldades dos participantes em reconhecer que situações envolvendo receitas culinárias mobilizam, de forma intrínseca, relações de proporcionalidade, uma vez que as quantidades dos ingredientes variam de maneira proporcional à quantidade produzida.

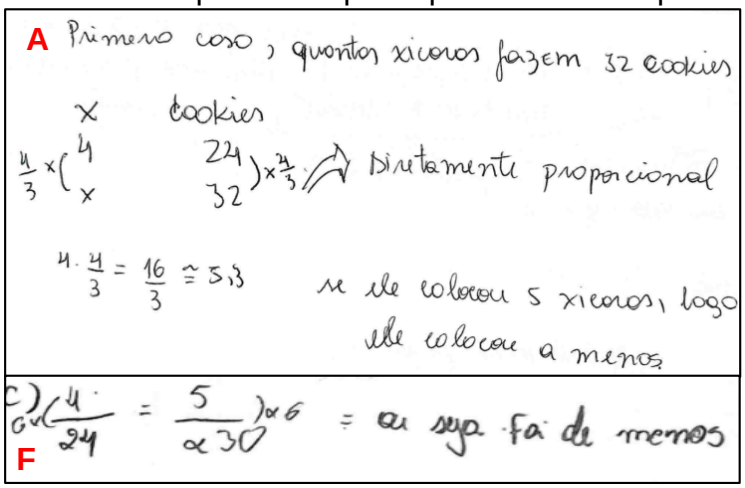
No que se refere à resolução do problema, quatro participantes chegaram à resposta correta, dois apresentaram conclusões equivocadas em decorrência de interpretações incorretas dos resultados obtidos, e a participante G não esboçou uma estratégia de resolução. Dentre os que resolveram corretamente a questão, observamos a mobilização de dois procedimentos distintos (KoT – Procedimentos), duas participantes (B e C) recorreram ao procedimento da regra de três (Figura B14), enquanto A e F fizeram uso da estratégia escalar (Figura B15): as participantes B e F determinaram quantos cookies seriam produzidos com 5 xícaras de farinha (30 cookies), enquanto os participante A e C calcularam a quantidade de farinha necessária para produzir 32 cookies (5,3… xícaras). A partir da comparação entre esses resultados e a receita original de dona Irlane, ambas concluíram que o cozinheiro em treinamento utilizou uma quantidade insuficiente de farinha na preparação dos cookies.

Figura B14 – Resposta das participantes B e C à questão 5.



Fonte: dados da pesquisa

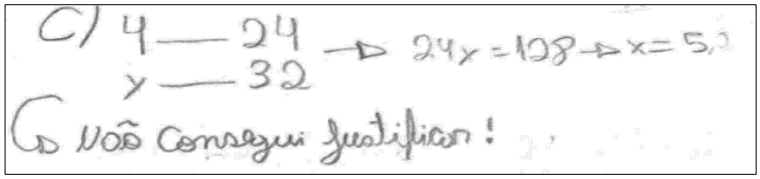
Figura B15 – Resposta dos participantes A e F à questão 5.



Fonte: dados da pesquisa.

O participante E recorreu ao procedimento da regra de três (KoT – Procedimentos) com o objetivo de determinar a quantidade de xícaras de farinha necessária para produzir 32 cookies a partir da receita original (Figura B16). Entretanto, não conseguiu dar continuidade à resolução nem chegar a uma conclusão a partir do resultado obtido.

Figura B16 – Resposta do participante E à questão 5.



Fonte: dados da pesquisa.

Posteriormente, durante a entrevista, ao ser questionado sobre o motivo de não ter finalizado a questão, o participante revisitou a situação e apresentou uma conclusão, ainda que incorreta, ao interpretar que o cozinheiro em treinamento teria utilizado 5,2 xícaras de farinha quando deveria ter utilizado apenas 5. Essa interpretação inverte o sentido da relação proporcional envolvida, uma vez que, na situação analisada, o cozinheiro utilizou menos farinha do que o necessário, e não mais, e revela também uma fragilidade nos conhecimentos relacionados ao KoT – Fenomenologia e aplicações.

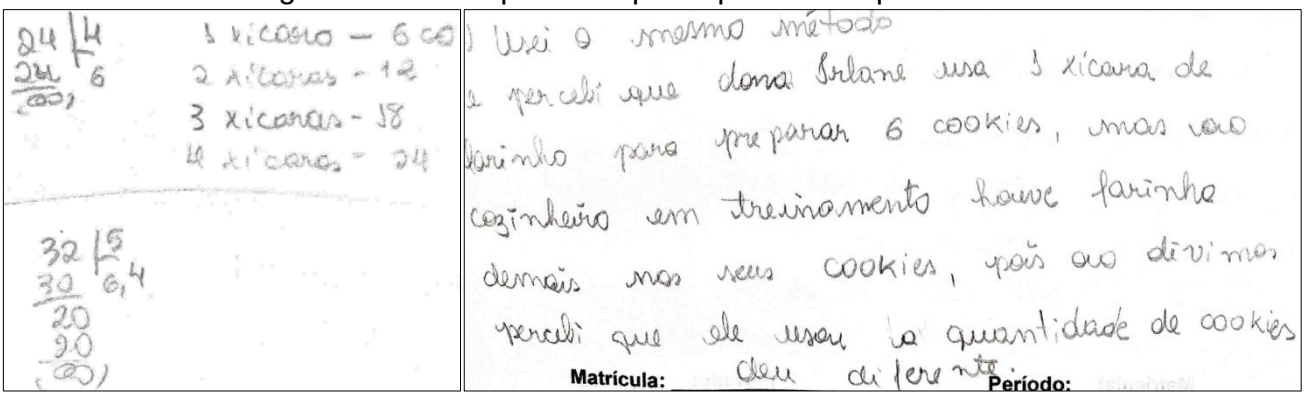
> **Participante (E):** *[...] Aí ele perguntava se ele colocou mais ou menos, no caso, né. Aí falou que ele tinha colocado 5 xícaras, né, na intenção de fazer 32. Então esse 5,2*

> *eu diria que... tipo assim, olhando agora, pelo cálculo que eu fiz, eu falaria que colocou um pouquinho a mais de farinha, né.*

A participante D utilizou a estratégia de busca pelo valor unitário (KoT – Procedimentos) para determinar quantos cookies seriam produzidos com uma xícara de farinha e organizou essas informações em uma estrutura de tabela (KoT – Registros de Representação), na qual dispôs, em uma coluna, a quantidade de xícaras de farinha e, na outra, a quantidade de cookies produzidos. A partir disso, calculou que o fator de proporcionalidade da razão 4:24, correspondente à receita original, é 6, e, em seguida, determinou o fator de proporcionalidade da razão 5:32, utilizada pelo cozinheiro em treinamento, obtendo o valor 6,4.

Esses procedimentos evidenciam a mobilização de conhecimentos relacionados ao uso de multiplicação e divisão na resolução de problemas de proporcionalidade (KoT – Procedimentos). Ao comparar os dois valores encontrados e observar que 6,4 > 6, a participante concluiu que o cozinheiro teria utilizado farinha em excesso (Figura B17).

Figura B17 – Resposta da participante D à questão 5.



Fonte: dados da pesquisa

A análise da solução, entretanto, revela que a participante não comparou razões unitárias do mesmo tipo, como fizeram os demais participantes, mas estabeleceu uma comparação entre fatores de proporcionalidade distintos, estratégia menos usual nesse tipo de situação, o que explica tanto a originalidade de sua abordagem quanto o erro interpretativo. Ao comparar os fatores de proporcionalidade, a participante não analisou a quantidade de farinha necessária para uma mesma produção de cookies, nem a quantidade de cookies obtida com uma mesma quantidade de farinha, mas, sim, a eficiência produtiva expressa em cookies por xícara de farinha. Contudo, um valor maior do fator de proporcionalidade (6,4 cookies por

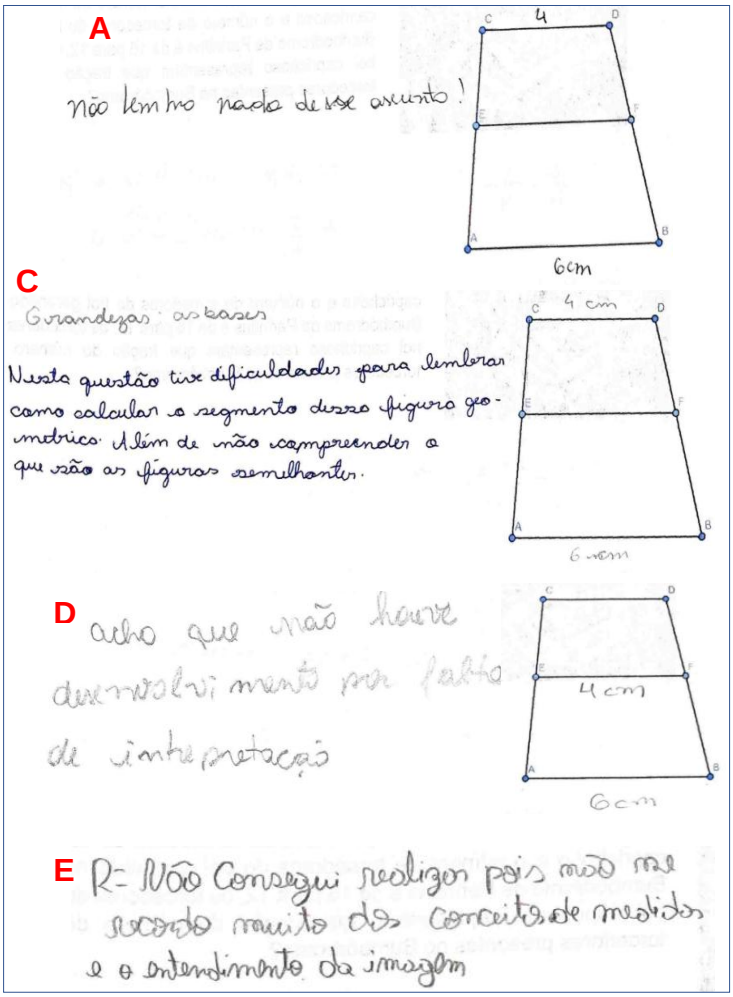
xícara) indica maior rendimento, isto é, menor quantidade de farinha por cookie, o que caracteriza o uso de farinha de menos, e não de mais.

Dessa forma, o equívoco observado não reside nos cálculos realizados, mas na interpretação do significado do fator de proporcionalidade. Esse resultado converge com o que apontam Costa e Allevato (2015) acerca das dificuldades dos estudantes em atribuir sentido à constante de proporcionalidade nas relações entre grandezas, além de evidenciar uma fragilidade nos conhecimentos relacionados ao KoT – Fenomenologia e aplicações, no que se refere à interpretação contextual da constante de proporcionalidade em diferentes situações que envolvem relações proporcionais.

O **problema 6**, de natureza geométrica, pertence à categoria Problema de média e visa aceder ao conhecimento de usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade ao trabalhar com proporcionalidade (KoT – Procedimentos) e da estratégia Obtenção do valor médio (Scheller; Bonotto, 2020) utilizada para resolver esse tipo de problema envolvendo proporcionalidade (KoT – Procedimentos). Além disso, visa investigar também o conhecimento a respeito dos contextos que envolvem a proporcionalidade dentro da própria matemática, como quando a situação envolve figuras semelhantes (KoT – Fenomenologia e aplicações), no caso, o reconhecimento da semelhança entre trapézios e a mobilização de relações de proporcionalidade entre comprimentos de segmentos correspondentes.

As grandezas envolvidas na situação são os comprimentos dos segmentos, embora apenas uma participante tenha tentado identificá-las, referindo-se genericamente às “bases”, o que revela uma confusão entre o objeto geométrico e a grandeza mensurável associada a ele. Além disso, observa-se que a maioria dos participantes não esboçou qualquer tentativa de resolução (Figura B18), assim como duas (B e D) identificaram erroneamente as bases do trapézio ABDC.

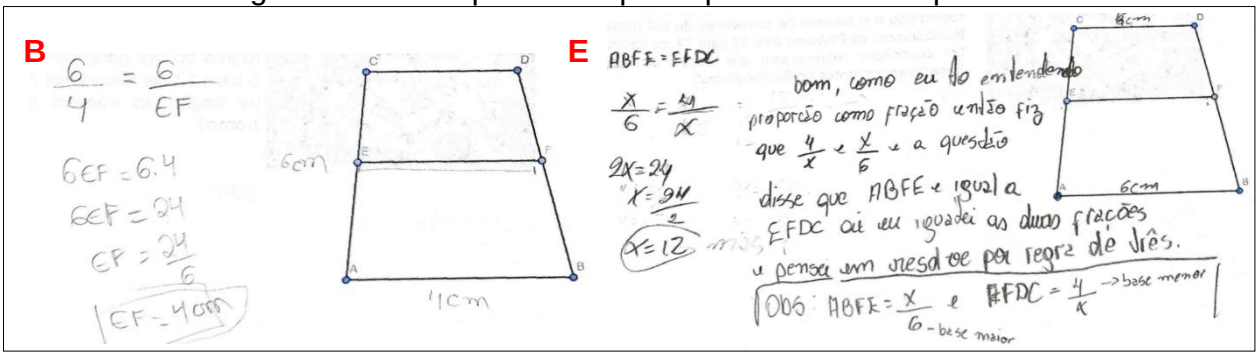
Figura B18 – Resposta dos participantes A, C, D e E à questão 6.



Fonte: dados da pesquisa.

A participante G afirmou em entrevista não ter entendido o enunciado. Dentre os que tentaram resolver a questão, nenhuma solução foi correta (Figura B19).

Figura B19 – Resposta das participantes B e F à questão 6.



Fonte: dados da pesquisa.

Uma das participantes construiu a proporção de forma inadequada, em decorrência da identificação incorreta das bases do trapézio ABDC. A outra, embora aparentemente tenha reconhecido a existência de uma relação algébrica entre os segmentos, revelou, durante a entrevista, confusão conceitual entre figuras semelhantes e figuras congruentes. Além disso, afirmou ter organizado as frações com base na "localização" dos segmentos na figura, isto é, na posição superior ou inferior dos comprimentos, igualando-as de modo a obter uma estrutura passível de resolução por meio da regra de três:

> **Participante (F):** *Porque, na minha cabeça, ó, se esse daqui [6] tá em baixo [segmento AB], o x tá em cima, se o 4 tá em cima [segmento CD], o x tá em baixo, aí ficou assim [referência as frações]. Mas eu fiquei pensando, "pô, tem dois x na regra de três, será que isso aqui vai dar certo?". Aí eu fui fazendo e deu certinho meu resultado. [...] Aqui também diz que essa parte aqui é igual essa aqui [...] aí eu igualei elas pra ficar semelhante.*

A fala da participante evidencia que a construção da proporção não se fundamentou na identificação de lados homólogos entre trapézios semelhantes, mas em critérios visuais e posicionais, o que compromete a validade da relação estabelecida. Ademais, a participante cometeu um erro ao resolver o produto $x.x$, escrevendo $2x$ no lugar de x^2, revelando dificuldades tanto na manipulação algébrica quanto na compreensão da estrutura multiplicativa subjacente à proporcionalidade geométrica (KoT – Procedimentos).

Contudo, essas dificuldades podem ser parcialmente compreendidas à luz do contexto formativo dos participantes, uma vez que nenhum deles havia cursado a disciplina de Geometria Plana até o momento da aplicação do questionário. Tal aspecto ajuda a explicar a baixa mobilização de conhecimentos relacionados à semelhança de figuras, reforçando que as fragilidades observadas não se limitam a procedimentos algorítmicos, mas envolve também a interpretação do contexto geométrico como um campo legítimo de aplicação da proporcionalidade (KoT – Fenomenologia e aplicações).

O **problema 7** pertence à categoria Problema de Conversão e tem como objetivo aceder ao conhecimento relacionado à mobilização de diferentes estratégias para resolver situações de proporcionalidade, em particular aquelas que envolvem comparações com números racionais (KoT – Procedimentos). Nesse contexto, destacam-se estratégias como *Between* (comparação entre razões parte–parte), e *Within* (comparação entre razões parte–todo), conforme descritas por Noelting

(1980a, 1980b), e que caracterizam, respectivamente, as relações de primeira ordem e de segunda ordem (Spinillo, 1994).

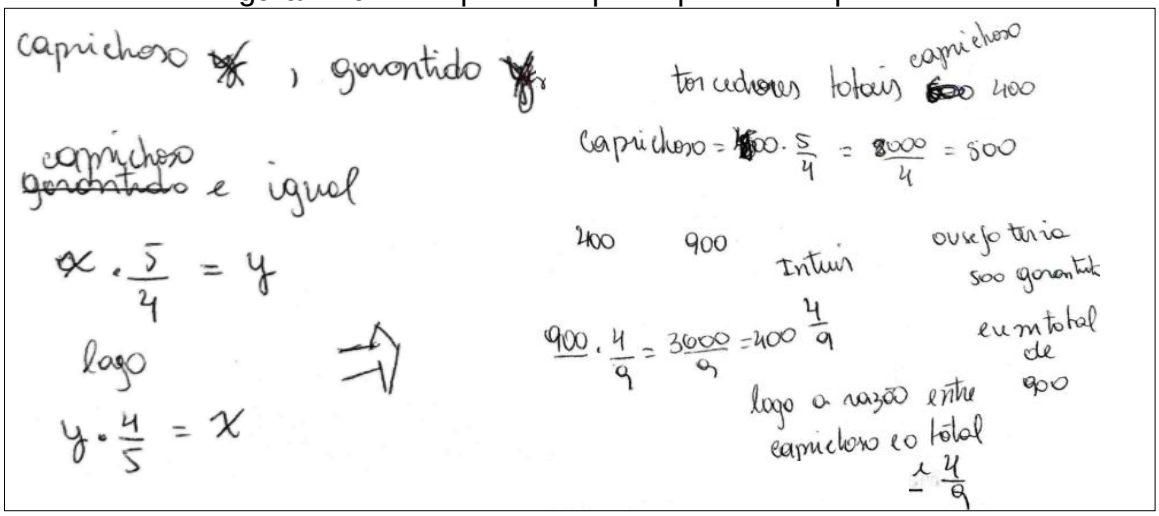
No que se refere à identificação das grandezas envolvidas, observa-se que nenhum dos participantes conseguiu reconhecê-las adequadamente. Cabe ressaltar, entretanto, que situação não envolve duas grandezas distintas, mas apenas uma única grandeza: a quantidade (ou número) de torcedores. Assim, a razão 15:12 caracteriza-se como uma razão interna, isto é, uma comparação entre partes de um mesmo todo, e não como uma razão entre grandezas diferentes.

Além disso, os participantes não souberam indicar se a situação envolvia ou não uma relação de proporcionalidade, retomando argumentos semelhantes aos observados em problemas anteriores. Em particular, associaram a inexistência de proporcionalidade à impossibilidade de estruturar uma proporção para aplicação da regra de três, evidenciando uma compreensão restrita do conceito. Tal postura revela uma fragilidade nos conhecimentos relacionados ao KoT – Fenomenologia e aplicações, uma vez que os participantes não reconhecem a proporcionalidade em situações que não apresentam a estrutura típica de um problema de valor omisso. Soma-se a isso a pouca familiaridade com problemas dessa categoria, o que contribuiu para as dificuldades na interpretação e análise da situação proposta.

Apenas dois participantes esboçaram uma solução para o problema. O participante A (Figura B20) iniciou sua resolução simplificando a razão entre o número de torcedores de cada boi, obtendo a razão 5:4 (relação parte–parte). A partir disso, representou o número de torcedores do boi caprichoso por y e o número de torcedores do boi garantido por x, estabelecendo uma relação algébrica entre essas quantidades (KoT – Registros de Representação).

Para determinar a fração correspondente ao número de torcedores do boi caprichoso em relação ao total de torcedores (relação parte–todo), o participante atribuiu um valor arbitrário a uma das incógnitas com o objetivo de calcular a outra e, assim, obter o total de torcedores associado à escolha realizada. Em seguida, o estudante afirmou “intuir” que a fração procurada seria 4/9 e substituiu os valores encontrados para verificar se o resultado era compatível com essa suposição. Contudo, devido a uma confusão entre as incógnitas e o significado atribuído a cada uma delas, o participante acabou determinando, na realidade, a fração correspondente ao número de torcedores do boi garantido, e não do boi caprichoso, em relação ao total de torcedores.

Figura B20 – Resposta do participante A à questão 7.



Fonte: dados da pesquisa.

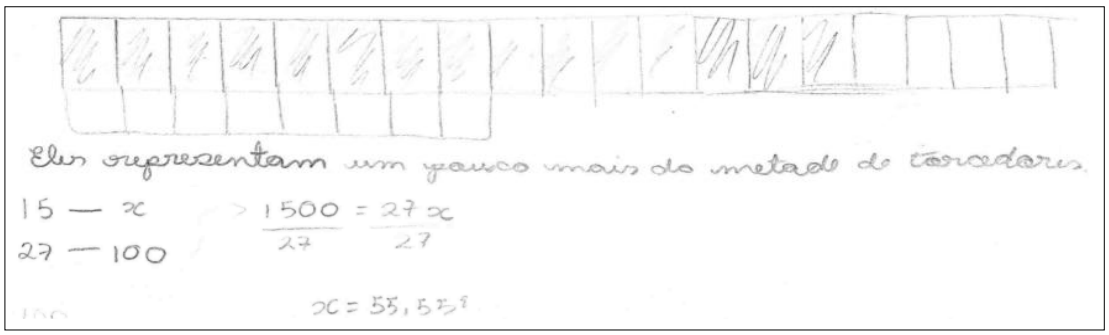
A resolução do participante A revela dificuldades na mobilização do pensamento relativo, próprio do pensamento proporcional, uma vez que, embora tenha identificado a razão parte–parte, não conseguiu operar diretamente com quantidades relativas, recorrendo à atribuição de valores absolutos para viabilizar a resolução. Tal procedimento evidencia a predominância do pensamento absoluto, de natureza aditiva, o que comprometeu a interpretação da relação parte–todo e levou à identificação incorreta da fração solicitada. Essa dificuldade já é amplamente discutida na literatura, uma vez que, conforme Oliveira (2016), o pensamento relativo (multiplicativo) não se desenvolve de forma natural, exigindo maior nível de abstração, o que frequentemente leva os indivíduos a mobilizarem o pensamento absoluto mesmo em situações que demandam comparações proporcionais.

Contudo, embora o participante não tenha conseguido operar diretamente com as quantidades relativas envolvidas na situação, sua resolução evidencia a mobilização de conhecimentos algébricos e procedimentais consolidados, tais como a simplificação de razões, a introdução e manipulação de incógnitas e a construção de relações algébricas coerentes. Ao recorrer à atribuição de valores absolutos, o estudante trabalhou com recursos matemáticos que lhe eram familiares, o que lhe permitiu avançar parcialmente na resolução do problema. Esse comportamento sugere que a dificuldade apresentada não decorre da ausência de conhecimentos matemáticos, mas de fragilidades na atribuição de significado às relações proporcionais no contexto, associadas ao KoT – Fenomenologia e aplicações.

A participante C recorreu a um registro de representação figural para organizar e ilustrar a relação entre o número de torcedores do boi caprichoso e o total de torcedores presentes no Bumbódromo (KoT – Registros de Representação). A partir dessa representação, realizou inicialmente uma análise visual da razão, mobilizando uma estratégia baseada no referencial de “metade” para avaliar se a parte correspondente ao boi caprichoso representava mais ou menos da metade do total, estratégia qualitativa de comparação descrita por Spinillo (1994) (KoT – Procedimentos).

Em seguida, a participante fez uso do conhecimento auxiliar de porcentagem para quantificar essa relação, construindo uma proporção que relacionava 27 (quantidade total de torcedores) a 100 e 15 (quantidade de torcedores do boi caprichoso) a x, obtendo como resultado 55,55% (Figura B21).

Figura B21 – Resposta do participante C à questão 7.



Fonte: dados da pesquisa.

As resoluções evidenciam a mobilização de dois tipos de raciocínio: o pensamento absoluto, baseado na atribuição de valores específicos, e o pensamento relativo, próprio do pensamento proporcional, centrado na comparação entre razões. Enquanto um participante recorreu a quantidades absolutas para viabilizar a resolução, a participante C operou diretamente com uma relação parte–todo, apoiando-se em um registro figural e no referencial de “metade”. Essa estratégia revela uma mobilização mais consistente do pensamento proporcional, articulando conhecimentos do KoT – Fenomenologia e aplicações e do KoT – Procedimentos, ao atribuir significado à situação sem depender de valores numéricos fixados previamente.

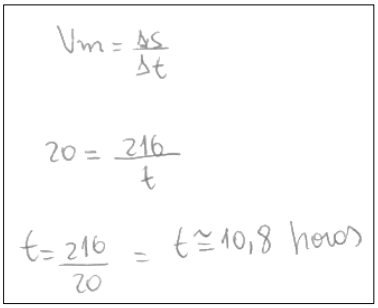
O **problema 8** enquadra-se na categoria de Problemas envolvendo unidades de medida e números e foi elaborado com o objetivo de aceder ao conhecimento relacionado não apenas às relações numéricas, mas também às relações entre

diferentes unidades de medida, como metro por segundo e quilômetro por hora. Além disso, buscou-se analisar a mobilização de procedimentos baseados em multiplicação e divisão na resolução de situações de proporcionalidade (KoT – Procedimentos), bem como as estratégias que os participantes poderiam acionar ao lidar com uma relação proporcional expressa em um contexto de movimento uniforme.

Embora um dos participantes (A) tenha indicado “velocidade” e “tempo” como as grandezas envolvidas no problema, observa-se que as grandezas pertinentes à situação são, na verdade, a distância percorrida e o tempo de percurso. A velocidade média (20 m/s) não constitui uma terceira grandeza independente, mas uma grandeza derivada, que expressa a razão constante entre distância e tempo e, do ponto de vista do pensamento proporcional, desempenha o papel de constante de proporcionalidade da relação estabelecida. O participante E, por sua vez, voltou a confundir grandezas com unidades de medida, ao indicar “quilômetro” e “hora” em vez das grandezas correspondentes. Novamente nenhum dos participantes soube dizer se a situação envolvia ou não uma relação proporcional.

No que se refere à resolução do problema, esperava-se que os participantes recorressem ao estabelecimento de relações proporcionais para realizar as conversões necessárias entre as unidades de medida e, assim, chegar ao resultado, em vez de aplicar diretamente fórmulas e algoritmos memorizados, muitas vezes utilizados de forma mecânica e sem a devida compreensão conceitual. No entanto, o participante A optou por utilizar a equação da velocidade média (Figura B22) e, além disso, não realizou previamente a conversão da unidade de medida da velocidade para quilômetros por hora antes de aplicá-la na fórmula. Tal equívoco foi posteriormente atribuído, em entrevista, à falta de atenção, uma vez que o participante demonstrou conhecer a necessidade dessa conversão para a correta aplicação do procedimento.

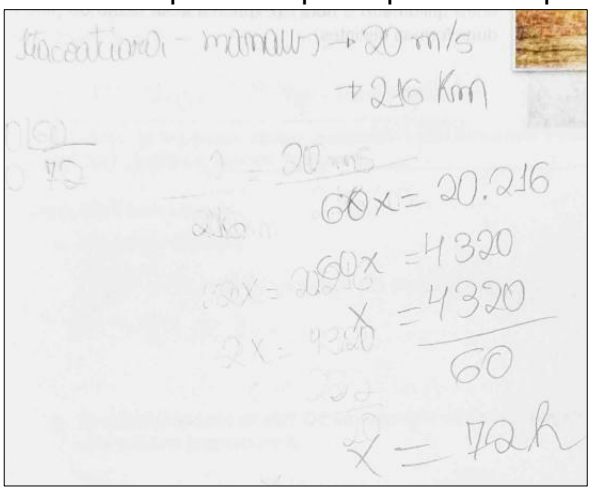
Figura B22 – Resposta do participante A à questão 8.



Fonte: dados da pesquisa

As participantes B e C esboçaram soluções que envolveram tentativas de conversão entre unidades de medida, mas nenhuma delas chegou ao resultado correto. No caso da participante B, a entrevista indicou o uso de tentativa e erro na tentativa de estruturar uma proporção, revelando dificuldades na interpretação do problema e na compreensão das relações entre as grandezas envolvidas. A participante reconheceu que a velocidade média de 20 m/s deveria ser multiplicada por algum valor, mas não soube justificar qual, buscando ajustar a situação a um algoritmo conhecido (Figura B23).

Figura B23 – Resposta do participante B à questão 8.



Fonte: dados da pesquisa

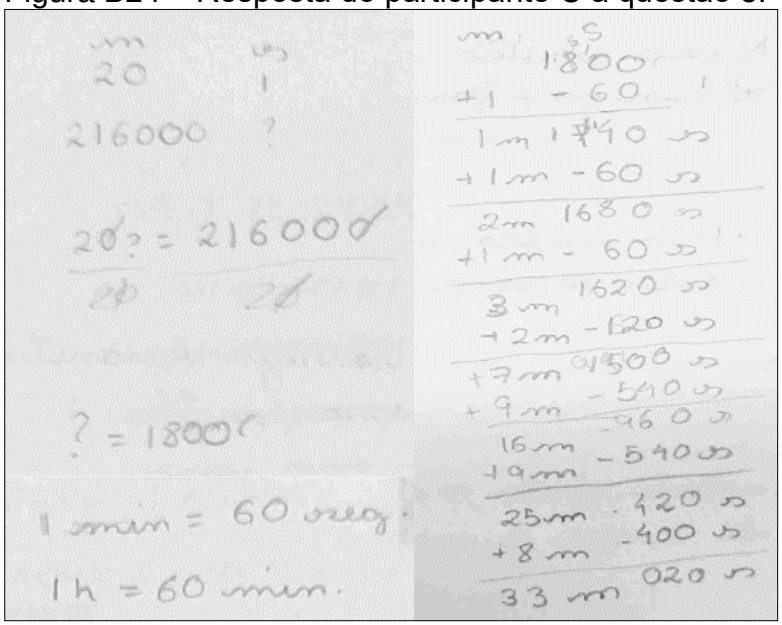
> **Participante (B):** *Eu pensei que como 1 hora equivale a 60 minutos, então eu multipliquei o 60 pelo x que no caso é o desconhecido, que a gente não sabe quantas horas foram de duração. E o 20 metros por segundo eu multipliquei pelos 216 quilômetros. É porque no caso aqui eu tinha feito a regra de três, só que aí eu apaguei. [...] Na real eu não lembro bem o que eu fiz, mas na hora fazia sentido pra mim, tanto é que eu acho que eu inverti muitas vezes porque eu tava tentando montar a proporção.*

Ao relacionar 1 hora a 60 minutos – e não a 3600 segundos, unidade de medida compatível com o tempo expresso na velocidade média – e relatar ter invertido diversas vezes as razões ao “montar” a regra de três, evidencia-se uma fragilidade no pensamento proporcional, marcada pela ênfase em procedimentos formais em detrimento da compreensão da relação multiplicativa entre distância e tempo.

A participante C iniciou a resolução convertendo corretamente a distância de quilômetros para metros, obtendo 216 000 metros, e utilizou o procedimento da regra de três para determinar em quantos segundos a lancha percorreria o trajeto (KoT – Procedimentos). Observa-se que, ao seguir sua estratégia após encontrar o resultado,

ela tentou realizar a conversão de segundos para horas de forma “manual”, por meio de subtrações sucessivas de 60 em 60 segundos, associando cada grupo a 1 minuto e trabalhando, assim, com uma medida de tempo composta. Tal procedimento, baseado em um raciocínio aditivo – e não no pensamento relativo característico da proporcionalidade –, embora pouco prático e não usual, poderia levá-la à resposta correta caso não tivesse cometido um erro na divisão ao resolver a regra de três inicial, encontrando o valor 1800 em vez de 10800 (Figura B24).

Figura B24 – Resposta do participante C à questão 8.



Fonte: dados da pesquisa

De modo geral, a resolução da participante evidencia que, embora tenha mobilizado conhecimentos procedimentais relevantes, como a conversão de unidades e o uso da regra de três, a compreensão da relação proporcional subjacente permaneceu fragilizada. A opção por operar com subtrações sucessivas indica a predominância do pensamento absoluto, em detrimento do pensamento relativo (Oliveira, 2016), necessário para interpretar adequadamente a relação entre distância, tempo e velocidade.

O **problema 9** insere-se na categoria Problemas de Translação e tem como objetivo aceder ao conhecimento relacionado às diferentes formas de representar uma razão, por meio de distintos registros de representação (KoT – Registros de Representação). Além disso, a tarefa visa mobilizar o uso de multiplicação e divisão na resolução de situações de proporcionalidade (KoT – Procedimentos), bem como a

compreensão da ideia de covariação entre grandezas, expressa na relação entre distância percorrida e tempo de caminhada (KoT – Propriedades).

Tendo em vista as grandezas envolvidas na situação, distância percorrida e tempo, a razão solicitada no enunciado expressa justamente a taxa de variação da distância em função do tempo, ou seja, quantos quilômetros são percorridos por hora. Do ponto de vista do pensamento proporcional, essa razão está diretamente associada à ideia de covariação (KoT – Propriedades), uma vez que, mantendo-se constante o ritmo da caminhada, o aumento do tempo implica aumento proporcional da distância percorrida. Apenas a participante C tentou identificar as grandezas, mas novamente assinalou as unidades de medida no lugar, “quilômetro” e “hora”.

Com respeito a identificação se o problema envolvia ou não proporcionalidade, apenas a participante F respondeu, de forma afirmativa, e justificou da seguinte forma, em entrevista:

> **Participante (F):** *Ah, por causa que eu simplifiquei aqui, ó. Tá vendo que eu simplifiquei a primeira razão [9/3]. Aí ela deu 1 sobre 3 certinho [1/3]. Aí eu falei, “pô...”. Aí foi quando eu tava já começando a entender mais ou menos, se eu simplifiquei aqui e deu isso aqui, então é proporcionalidade, porque uma razão é igual a outra.*

Essa justificativa evidencia que a participante passou a reconhecer a proporcionalidade a partir da igualdade entre razões, compreensão que emergiu ao longo do processo de resolução das questões, conforme relatado pela própria estudante. Tal interpretação é consistente com uma das formas de conceituar proporcionalidade sistematizadas por Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017), segundo a qual o conceito pode ser comunicado por meio da equivalência entre razões.

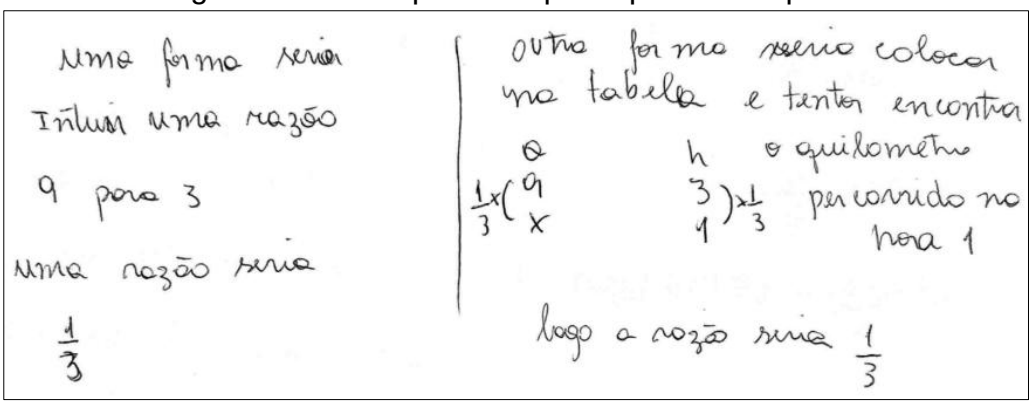
Ao simplificar a razão apresentada no enunciado e interpretar a manutenção dessa relação como indicativa de proporcionalidade, a participante mobiliza um entendimento matematicamente válido, ainda que fortemente apoiado em procedimentos simbólicos. Esse movimento sugere uma ampliação progressiva do KoT – Fenomenologia e aplicações, na medida em que a estudante passa a atribuir significado à estrutura relacional da situação, mesmo que essa interpretação ainda não seja explicitamente articulada em termos das grandezas distância e tempo.

Quanto às estratégias de resolução da questão, Bianchini e Lima (2023) descrevem três possíveis formas de solucioná-la: (i) recorrer à razão expressa na linguagem natural, parafraseando o enunciado: se em 3 horas Mateus percorre 9 quilômetros, então, em 1 hora, percorre um terço dessa distância, isto é, 3 quilômetros; (ii) utilizar outro sistema de representação, por exemplo, indicando cada quilômetro

percorrido por uma letra arbitrária (usaremos M), de modo que a quilometragem possa ser representada por MMM na 1ª, 2ª e 3ª horas, evidenciando que, a cada hora, são percorridos 3 quilômetros; e (iii) recorrer à equivalência entre razões, estabelecendo a igualdade $\frac{9}{3} = \frac{x\ quilômetros}{1\ hora}$, obtendo-se novamente a razão de 3 quilômetros por hora.

A solução apresentada pelo participante A (Figura B25) mostra-se conceitualmente consistente, na medida em que ele identifica corretamente a razão "9 para 3" e reconhece a existência de mais de uma forma de resolvê-la, mobilizando diferentes registros de representação (KoT – Registros de Representação). Ao organizar as informações em uma tabela relacionando horas e quilômetros, evidencia a covariação entre as grandezas (KoT – Propriedades) e compreende a ideia de razão unitária, isto é, a quantidade percorrida em uma hora, a qual encontra através da estratégia escalar (KoT – Procedimentos).

Figura B25 – Resposta do participante A à questão 9.

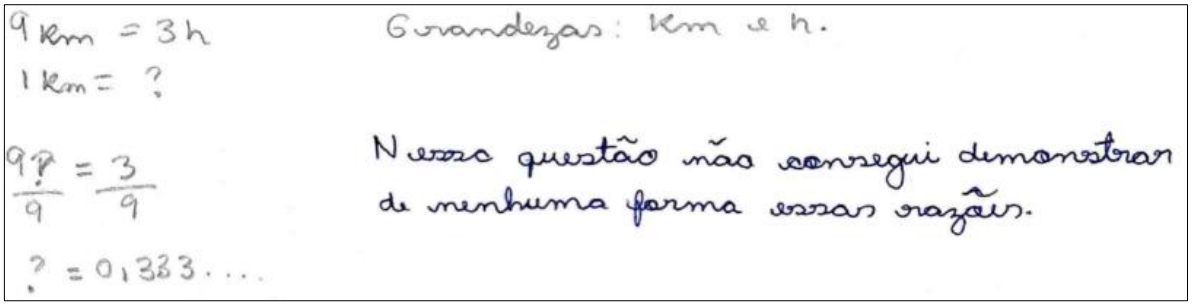


Fonte: dados da pesquisa.

Embora o cálculo demonstre que determinou quantos quilômetros Mateus caminha em 1 hora, observa-se que o participante inverteu a relação solicitada no enunciado, tratando a razão como hora por quilômetro (1/3), quando o esperado era quilômetro por hora (3/1). Tal inversão indica uma imprecisão na atribuição de significado às grandezas envolvidas e à orientação da razão no contexto do problema, mas não caracteriza ausência de pensamento proporcional. Trata-se, antes, de uma fragilidade pontual no KoT – Fenomenologia e aplicações, relacionada à interpretação contextual da razão, e não à compreensão da estrutura proporcional subjacente à situação.

Embora à primeira vista a resolução da participante C (Figura B26) aparenta ser um erro semelhante ao cometido por A, observa-se que ela calculou, através da regra de três (KoT – Procedimentos), a razão unitária entre as grandezas no sentido inverso ao solicitado, isto é, ao determinar quantas horas Mateus leva para percorrer 1 quilômetro (hora por quilômetro), em vez de quantos quilômetros percorre em 1 hora (quilômetro por hora), a participante desconsiderou o contexto da pergunta.

Figura B26 – Resposta do participante C à questão 9.

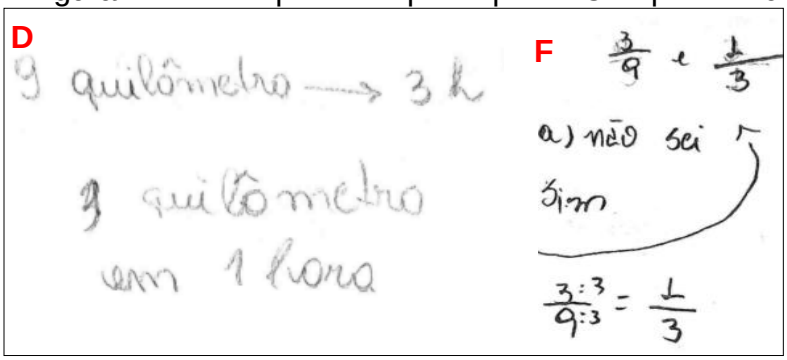


Fonte: dados da pesquisa.

Além disso, embora tenha realizado os cálculos, a participante não chegou a expressar uma razão propriamente dita, pois não atribuiu significado à quantidade numérica obtida. O valor 0,333... foi apresentado de forma descontextualizada, sem a explicitação da unidade associada (hora por quilômetro), o que indica dificuldade em interpretar o resultado como uma razão entre grandezas. Tal limitação reforça que a fragilidade observada não está na realização dos procedimentos matemáticos, mas na compreensão do significado da razão no contexto da situação, evidenciando uma fragilidade pontual no KoT – Fenomenologia e aplicações.

A Figura B27 ilustra a solução das participantes D e F. A primeira expressou a razão por meio da linguagem natural ao afirmar que Mateus percorre 3 quilômetros em 1 hora (KoT – Registros de Representação). No entanto, declarou não se lembrar de como “achar a razão” solicitada na questão, o que indica que, embora tenha produzido uma representação adequada, não reconheceu que essa forma já atendia ao que era solicitado, evidenciando insegurança quanto ao próprio procedimento. Já a participante F, por sua vez, representou a razão em notação fracionária (KoT – Registros de Representação), mas cometeu o mesmo equívoco observado nos participantes A e C, ao organizar a razão no sentido inverso ao solicitado, isto é, hora por quilômetro, e não quilômetro por hora.

Figura B27 – Resposta do participante C à questão 9.



Fonte: dados da pesquisa

Os demais participantes não resolveram a situação. A participante B afirmou não saber o que é razão e por isso não resolveu ao problema.

No Quadro B2, sintetizamos os conhecimentos manifestados por todos os participantes durante a resolução dos sete problemas, oferecendo, dessa forma, um panorama geral.

Quadro B2 – Conhecimento revelado pelos participantes em relação à problemas de transformação e de média no âmbito da proporcionalidade.

Categorias do KoT	**Indicadores de conhecimento**	**Participante**						
		A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
Definição, propriedades e fundamentos	Conhecer a diferença entre variáveis diretamente e inversamente proporcionais.	X						-
Fenomenologia e aplicações	Reconhecer situações que envolvem relações diretamente e inversamente proporcionais.	X		X				-
	Reconhecer que em uma situação proporcional existe uma relação constante entre as grandezas (invariância)	-	-	-	-	-	X	-
	Reconhecer que em uma situação proporcional as grandezas variam em conjunto (covariância)	X		X				-
Procedimentos	Mobilizar estratégias procedimentais de simplificação e recomposição de razões	X						-
	Converter razões parte-parte em razões parte-todo, preservando a proporcionalidade			X				-
	Mobilizar estratégias de conversão de unidades de medida preservando a proporcionalidade	X	-	-	-	-	-	-
	Usar a *estratégia aditiva* em problemas de proporcionalidade				X			-

	Usar a estratégia *busca pelo valor unitário* em problemas de proporcionalidade	X	X		X		X	-
	Usar a *estratégia escalar* para resolver problemas de proporcionalidade	X					X	-
	Usar a *regra de três* para resolver problemas de proporcionalidade		X	X		X	X	X
	Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade		X					-
	Usar a estratégia baseada no *referencial metade* para resolver problemas de proporcionalidade			X				
	Fazer comparações numéricas – envolvendo os números racionais – e não numéricas	X						-
Registros de representação	Organizar as grandezas e seus respectivos valores em tabelas	X	X	X	X			-
	Expressar a razão em linguagem natural				X			-
	Expressar relações proporcionais por meio de representações algébricas	X						-
	Expressar uma razão por meio de representações figurais			X				-
	Coordenar diferentes registros de representação de uma mesma relação proporcional	X					X	-

Fonte: dados do estudo.

Considerações finais

A análise das resoluções dos problemas evidenciou que os futuros professores de Matemática revelam um conjunto heterogêneo de conhecimentos relacionados ao tópico proporcionalidade. De modo geral, observa-se a mobilização consistente de conhecimentos associados ao KoT – Procedimentos, especialmente por meio do uso recorrente da regra de três, da busca pelo valor unitário, da estratégia escalar e de representações algébricas e tabulares. Tais procedimentos, ainda que frequentemente aplicados de forma mecanizada, isto é, sem apresentar uma argumentação que sustentasse conceitualmente a escolha de tais procedimentos, permitiram que parte dos participantes chegasse a conclusões corretas em diferentes contextos.

Por outro lado, os resultados indicam fragilidades recorrentes nos conhecimentos relacionados ao KoT – Fenomenologia e aplicações, particularmente

no reconhecimento de situações proporcionais que não se apresentam na estrutura prototípica de “valor omisso”, bem como na interpretação do significado das razões, da constante de proporcionalidade e do sentido das comparações envolvidas (parte–parte, parte–todo e grandezas distintas). Essas fragilidades manifestaram-se, por exemplo, na confusão entre grandezas e unidades de medida, na inversão do sentido das razões, na dificuldade em interpretar quantidades não inteiras e na mobilização do pensamento absoluto em contextos que demandavam pensamento relativo.

O observado neste estudo também se aproxima do que Galvão, de Souza e Poggio (2015) identificam ao afirmar que alunos frequentemente respondem corretamente não por reconhecerem situações de proporcionalidade, mas por dominarem determinados métodos algorítmicos, sem vinculá-los conceitualmente à proporcionalidade direta. Assim, ao tomarem a aplicabilidade da regra de três como critério para caracterizar a situação como proporcional, por exemplo, os participantes revelam um conhecimento predominantemente procedimental, com fragilidades na compreensão fenomenológica da proporcionalidade, aspecto que Hoffer (1988) aponta como um marco decisivo no desenvolvimento do pensamento proporcional.

Ainda assim, as produções dos participantes também revelam indícios de conhecimentos em desenvolvimento, como o uso de múltiplos registros de representação, a percepção intuitiva de relações de covariação através de um raciocínio predominantemente qualitativo, a comparação de razões equivalentes e a tentativa de atribuir significado às quantidades envolvidas, mesmo quando isso não se concretizou de forma rigorosa.

Esses elementos sugerem que o conhecimento especializado sobre proporcionalidade se encontra, para esses futuros professores, em um estágio intermediário, marcado por avanços procedimentais, mas ainda demandando aprofundamento conceitual e interpretativo, o que vai ao encontro do pensamento de Cramer, Post e Currier (1993) quando destacam que a capacidade de construir e resolver proporções não implica, necessariamente, a compreensão do pensamento proporcional subjacente, uma vez que estudantes podem recorrer a métodos procedimentais sem associá-los à natureza da relação envolvida.

Dessa forma, o diagnóstico permitiu descrever os conhecimentos matemáticos especializados revelados pelos participantes acerca da proporcionalidade, evidenciando tanto potencialidades quanto limitações, especialmente no que se refere à articulação entre procedimentos, significados e contextos de aplicação. Esses

resultados oferecem subsídios para a estruturação de tarefas formativas intencionalmente planejadas, com vistas a superar as limitações identificadas e promover o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado dos futuros professores no âmbito da proporcionalidade.

APÊNDICE C – Tarefa para Formação 1 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade

Leia com atenção as duas situações a seguir:
Atenção: Você deve explicar sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos etc.

Situação 1: Fábrica de tecelagem



Uma fábrica de tecidos, chamada Tecelagem Pitágoras, opera com vários teares. Em um período de avaliação, observou-se que 5 teares trabalhando 6 horas por dia produziram 2.160 metros quadrados de tecido. Agora, o gerente da produção está reorganizando os turnos e precisa da sua ajuda para responder às seguintes questões:

a) Se os mesmos 5 teares passarem a trabalhar apenas 4 horas por dia, quantos metros quadrados de tecido serão produzidos, mantendo o mesmo ritmo de trabalho?

b) Para continuar produzindo 2.160 metros quadrados, quantas horas por dia seriam necessárias se a fábrica usar 8 teares?

c) A fábrica recebeu uma grande encomenda e precisa produzir 5.184 metros quadrados de tecido. Quantos teares seriam necessários, se cada um trabalhar o mesmo número de horas por dia que no início (6 horas)?

Situação 2: Vitaminada de Guaraná



Dona Rosalina prepara e vende vitaminada de guaraná com amendoim em sua lanchonete no Centro de Manaus. No liquidificador A, ela misturou 4 doses de xarope de guaraná com 3 colheres de amendoim com uma quantidade de água. No liquidificador B, ela usou 3 doses de xarope de guaraná e 2 colheres de amendoim, e a mesma quantidade de água. Se você pedir a ela para tomar a vitaminada que tem o gosto mais forte de guaraná, de qual liquidificador ela deverá servir a sua bebida?

1. Resolva as situações por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino).
2. Para resolver os dois problemas, é utilizada a mesma forma de pensar ou formas diferentes? Justifique.
3. Crie um problema que envolva o mesmo raciocínio matemático, mas matematicamente distinto dos dois problemas dados, e resolva-o. O que leva os três problemas a serem distintos?

APÊNDICE D – Análise detalhada das resoluções da Tarefa para Formação 1 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade

Com a aplicação da TpF1, teve-se como foco analisar os conhecimentos matemáticos especializados mobilizados e/ou desenvolvidos pelos participantes em um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade, especificamente aqueles relacionados a problemas do tipo valor omisso e de comparação. Para apresentar os resultados do estudo, organizamos o texto da seguinte forma: inicialmente, analisamos individualmente as respostas de cada membro do grupo e, em seguida, a resposta sistematizada pelo grupo para o Problema 1; posteriormente, adotamos o mesmo procedimento para o Problema 2 e, por fim, para as perguntas 2 e 3 da tarefa proposta.

As análises consideram dados produzidos nas diferentes etapas da Teoria das Situações Didáticas, a saber: as resoluções escritas individuais dos participantes, correspondentes à etapa da ação; as falas gravadas durante a explicação de suas estratégias aos demais membros do grupo, relativas à etapa da formulação; e a resposta escrita apresentada coletivamente pelo grupo, associada à etapa da validação. Por fim, sintetizamos, em um quadro, os conhecimentos manifestados por todos os participantes, de modo a oferecer um panorama geral.

Pergunta 1

Na Situação 1, o participante A percebe que, em cada um dos itens, a quantidade referente a uma das grandezas permanece constante, então ele poderia "ignorar" essa quantidade quando fosse realizar os cálculos. Embora tenha afirmado que o procedimento utilizado por ele fosse semelhante à *regra de três*, na verdade, conforme foi observado, ele fez uso da *estratégia escalar* (Oliveira, 2009) para resolver as três alternativas propostas (KoT – Procedimentos).

> **Participante (A):** *Bem, pelo que eu pude perceber nas alternativas, sempre tem um parâmetro que permanece o mesmo, que não muda. Aí eu meio que fazia quase que uma regra de três com as que iam mudar. Aí eu analisava se era diretamente ou inversamente proporcional. E eu procurava uma coisa que eu não sei se existe que é "razão de proporcionalidade".*

Com respeito ao item a), o participante conclui que a situação é diretamente proporcional por meio de um raciocínio de natureza predominantemente qualitativa (Vergara; Estrella; Vidal-Szabó, 2020), isto é, quando a quantidade de uma grandeza

aumenta (ou diminui), a quantidade referente a outra grandeza também deve aumentar (ou diminuir). Entretanto, o conhecimento de que, numa relação proporcional, ao multiplicar a quantidade de uma grandeza por um escalar, o valor correspondente na outra grandeza também deve ser multiplicado por esse mesmo escalar, revela também um raciocínio de natureza quantitativa.

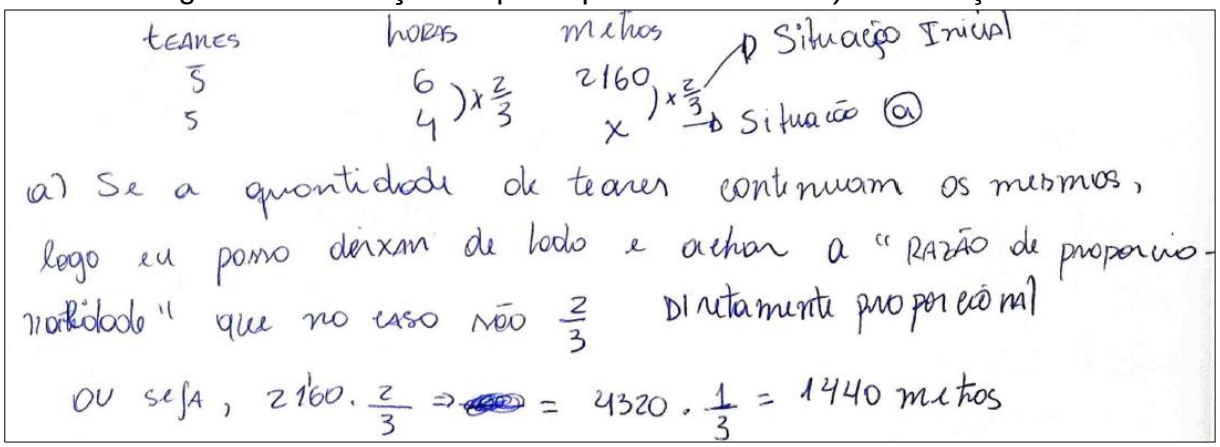
> **Participante (A):** *No primeiro problema, foi notado que... No primeiro problema, Foi notado que as horas iam diminuir, logo os metros também iam. Aí eu procurei uma razão que de alguma forma o 6 se transformasse no 4. E eu percebi que ao multiplicar dois terços, o 6, ele daria 4. Então, se ele mantesse essa razão, os metros também iam manter essa razão, sendo diretamente proporcional. Então, eu peguei o 2.160 e multipliquei por dois terços. É aí que deu o resultado que vocês falaram, que é 1.440.*

Os conhecimentos evidenciados, embora verbalizados em linguagem informal – o que era esperado na etapa da formulação –, revelam a manifestação de conhecimentos referentes ao KoT – Definição, propriedades e fundamentos, visto que essas são as duas condições que devem ser satisfeitas para que haja uma relação diretamente proporcional entre duas grandezas. Em termos matemáticos:

> Suponhamos que duas grandezas x, y achem-se de tal modo relacionadas que a cada valor especificado de x corresponda um valor bem determinado de y. Neste caso, diz-se que y *é função de* x e escreve-se $y = f(x)$. Suponhamos que a grandeza y seja função da grandeza x, isto é, $y = f(x)$. Diremos que y é *diretamente proporcional a* x quando as seguintes condições forem satisfeitas:
> 1ª) y é uma função crescente de x;
> 2ª) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também fica multiplicado por n. Em termos matemáticos: $f(n.x) = n.f(x)$ para todo valor de x e todo $n \in N$.
> Analogamente, diz-se que y é *inversamente proporcional* a x quando $y = f(x)$ é uma função decrescente de x e, além disso, ao se multiplicar x por um número natural n, o valor correspondente de y fica dividido por n, isto é, $f(n.x) = \frac{1}{n}.f(x)$ para todo valor de x e toda $n \in N$. (Lima, 1988, p. 27).

O participante fez uso da *estratégia escalar* (KoT – Procedimentos) para resolver o problema, e a "razão de proporcionalidade" a qual faz referência é, na verdade, o *fator escalar* pelo qual o valor inicial da grandeza tempo foi multiplicado e pelo qual irá multiplicar o valor inicial da grandeza área (de tecido produzida) para determinar a quantidade desconhecida (Figura D1).

Figura D1 – Solução do participante A ao item a) da Situação 1.



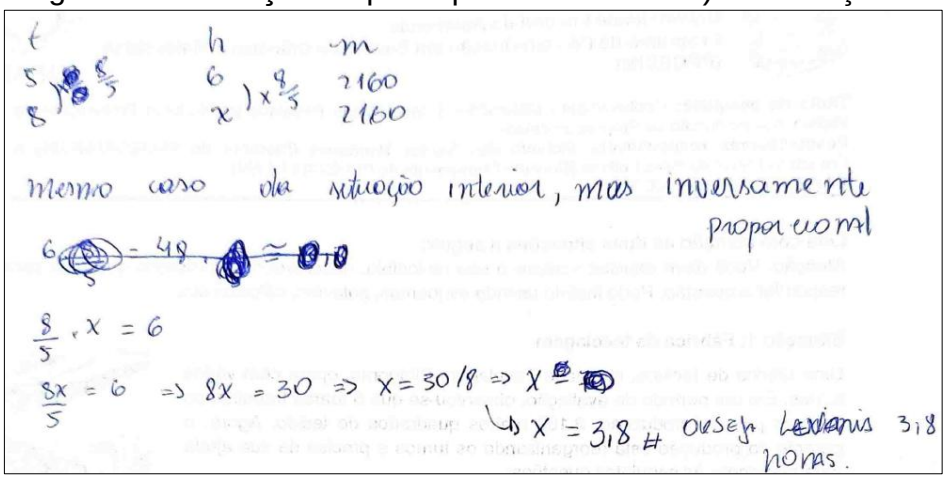
Fonte: dados da pesquisa.

Com respeito ao item b), o participante conclui que a situação é inversamente proporcional e explicou em que essa informação impactava na sua estratégia de resolução:

> **Participante (A):** *Aí na B eu percebi que foi inversamente proporcional. Eu achei a razão de proporcionalidade. Aí eu vi que a quantidade de T áreas ia aumentar oito quintos. Mas só que como as horas seriam inversas, o x teria que ter essa razão. Então eu peguei o x, multipliquei por oito quintos e teria que dar 6. O que deu mais ou menos 3,8.*

Novamente, não obstante utilize linguagem informal para explicar seu raciocínio, o pensamento do participante vai ao encontro da definição de uma relação inversamente proporcional (KoT – Definição, propriedades e fundamentos), com a ressalva de calcular, de forma equivalente, $f(n.x).n = f(x)$ ao invés de $f(n.x) = \frac{1}{n}.f(x)$, conforme Figura D2.

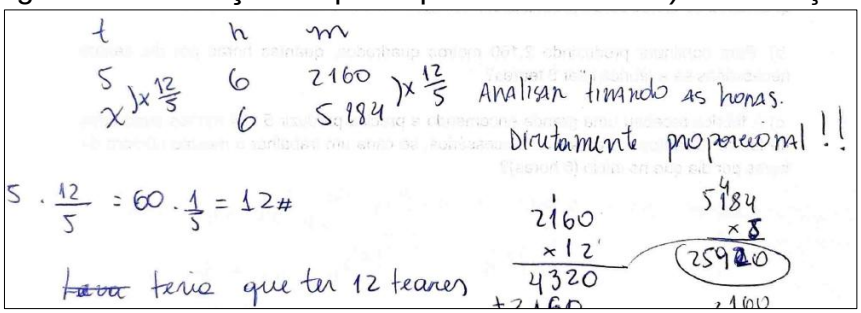
Figura D2 – Solução do participante A ao item b) da Situação 1.



Fonte: dados da pesquisa.

O participante resolveu o item c) de modo análogo, ou seja, através do fator escalar (KoT – Procedimentos) (Figura D3).

Figura D3 – Solução do participante A ao item c) da Situação 1.



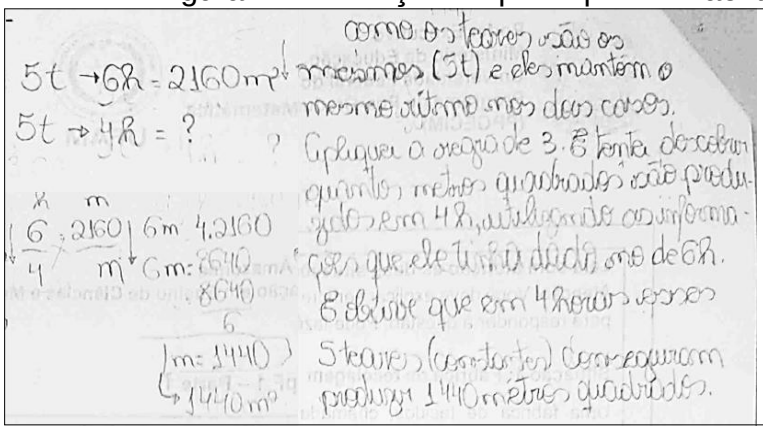
Fonte: dados da pesquisa.

A partir da análise da resolução do participante, pode-se observar a mobilização de diversos conhecimentos: organiza as quantidades em formato de tabela (KoT – Registro de representação) como elemento auxiliar na visualização dos dados do problema, verifica se a situação é diretamente ou inversamente proporcional (KoT – Fenomenologia e aplicações), determina o fator escalar pelo qual irá multiplicar o valor correspondente na outra grandeza e encontra o resultado esperado, mobilizando o conhecimento de usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade (KoT – Procedimentos).

A partir da Figura D4, observa-se que a participante B também percebeu que que, no item a), a quantidade de teares permanecia a mesma e, tendo em mãos essa informação, realizou os cálculos apenas com as quantidades que variavam, construindo uma proporção e aplicando a *regra de três* (KoT – Procedimentos).

> **Participante (B):** *Eu apliquei uma regra de 3 em ambos os casos, tanto na primeira, que é A, quanto na B também. Aí a C, a questão C, eu não resolvi. Eu fiquei muito apressada com o tempo, eu não consegui resolver, mas aí na questão 1 foi do mesmo jeito, o mesmo resultado, 1.440.*

Figura D4 – Solução da participante B ao item a) da Situação 1.



Como os teares são os mesmos (5t) e eles mantêm o mesmo ritmo nos dois casos. Apliquei a regra de 3. E tentei descobrir quantos metros quadrados são produzidos em 4h, utilizando as informações que ele tinha dado no de 6h. E obtive que em 4 horas esses 5 teares (constantes) conseguiram produzir 1440 metros quadrados.

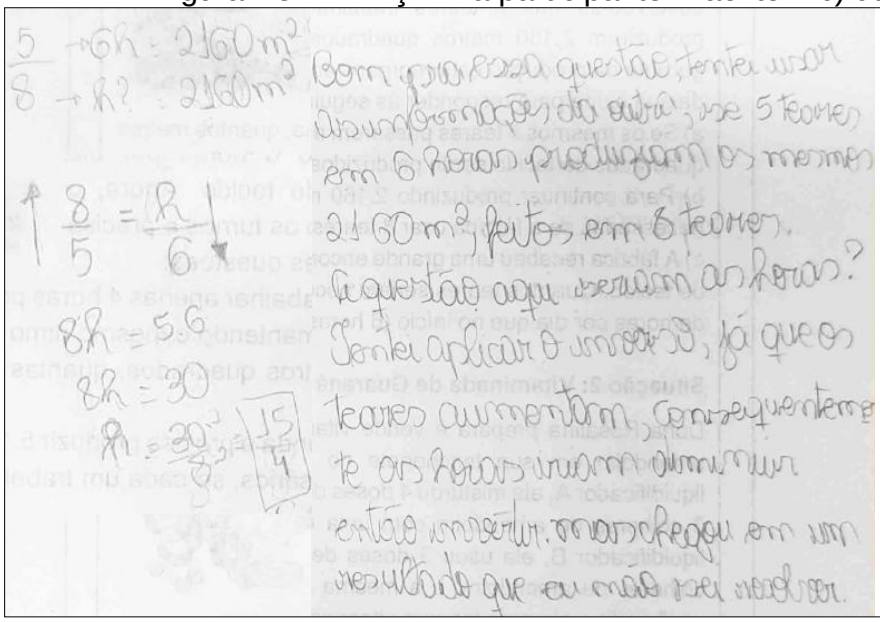
Fonte: dados da pesquisa.

Com respeito ao item b), a participante não afirmou ser uma situação inversamente proporcional, porém, a partir de um raciocínio qualitativo, isto é, se o valor de uma grandeza aumenta, o valor da outra grandeza irá diminuir (KoT – Fenomenologia e aplicações), concluiu que teria de calcular a *regra de três inversa* (KoT – Procedimentos). Contudo, pôde-se observar uma relutância em realizar a divisão de 15 por 4 a fim de chegar ao resultado esperado em horas ou, mais além, expresso em unidade de medida composta (Figura D5).

Esse fato vai ao encontro dos estudos de Lautert, Santos e Merlini (2018) e Castro et al. (2016) quando destacam as operações de multiplicação e divisão como sendo as operações de maior dificuldade entre os estudantes, as quais são requisitadas para trabalhar conceitos como proporção, covariação, intrínsecos à Estrutura Multiplicativa (Vergnaud, 1994), caracterizando uma fragilidade no KoT – Procedimentos no que diz respeito ao uso dessas operações na resolução de problemas envolvendo proporcionalidade.

> **Participante (B):** *Na questão B deu 30 sobre 8, aí eu só, sei lá gente, eu apliquei uma regra de 3 aqui, eu tentei entender, mas enfim. Só sei que o resultado final foi 15 sobre 4, tá? Aí eu não consegui transformar ele em horas. E é isso.*

Figura D5 – Solução da participante B ao item b) da Situação 1.



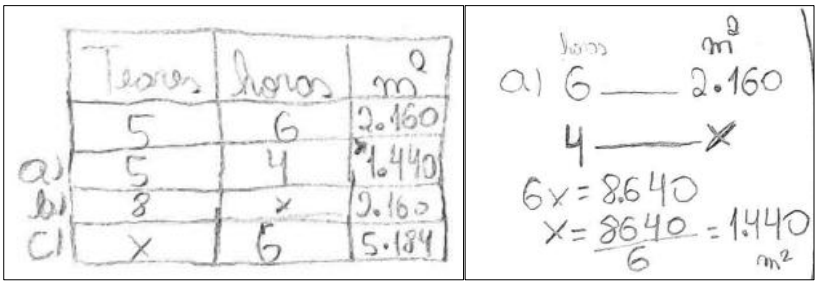
Bom pra essa questão, tentei usar as informações da outra, se 5 teares em 6 horas produziam os mesmos 2160m², feitos em 8 teares. A questão aqui seriam as horas? Tentei aplicar o inverso, já que os teares aumentam, consequentemente as horas iriam diminuir, então invertir *(sic)*. Mas chegou em um resultado que eu não sei resolver.

Fonte: dados da pesquisa.

A análise da resolução da participante B também permite observar a mobilização de uma gama de conhecimentos visto que ela também segue uma estratégia característica, diferente da do participante A, para resolver esse tipo de problema: organiza as quantidades referentes a cada grandeza uma ao lado da outra a fim de relacioná-las (KoT – Registro de representação), estrutura uma proporção, usa um esquema de setas para representar se há uma relação diretamente proporcional (setas apontam para o mesmo sentido) ou inversamente proporcional (setas apontam para sentidos inversos), o que caracteriza um conhecimento referente ao KoT – Fenomenologia e aplicações à medida que consegue reconhecer quando há cada um desses tipos de relação, e, por fim, utiliza a *regra de três* para encontrar o valor faltante (KoT – Procedimentos).

Como se pode observar na Figura D6, o participante E, na resolução do item a), montou uma proporção com as quantidades que variavam e resolveu através *de regra de três* (KoT – Procedimentos). Observa-se também a construção de uma tabela na qual organizou os valores das grandezas em cada uma das situações que o problema propunha (KoT – Registros de representação).

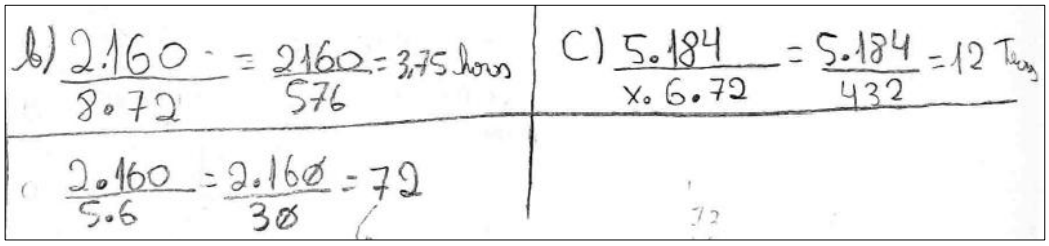
Figura D6 – Tabela construída e solução do participante E ao item a) da Situação 1.



Fonte: dados da pesquisa.

Contudo, nos problemas propostos nos itens b) e c), o participante procedeu de forma distinta, ao incluir em seus cálculos uma grandeza cuja quantidade permanecia fixa (Figura D7).

Figura D7 – Solução do participante D aos itens b) e c) da Situação 1.



Fonte: dados da pesquisa

Na resolução apresentada, não organizou explicitamente uma proporção envolvendo simultaneamente as três grandezas do problema: produção, número de teares e tempo. Em vez disso, iniciou o raciocínio pela determinação de uma taxa constante de produção, ao calcular a quantidade de tecido produzida por um tear em uma hora ($72\ m^2/(tear.hora)$). Embora essa constante de proporcionalidade não tenha sido explicitada conceitualmente, ela passou a orientar os cálculos subsequentes, sendo utilizada para relacionar, de forma sucessiva, pares de grandezas, o que caracteriza a mobilização de uma *estratégia funcional*, ainda que de maneira implícita (KoT – Procedimentos). Assim, o estudante articulou corretamente as variáveis do problema por meio de um encadeamento informal de cálculos, evidenciando um raciocínio proporcional de natureza funcional, porém pouco sistematizado do ponto de vista representacional.

Dessa forma, observa-se que o participante: organiza as quantidades em formato de tabela (KoT – Registro de representação), porém, não obstante as respostas corretas, não dá indícios se consegue reconhecer quando há uma relação diretamente proporcional ou inversamente proporcional. Por fim, utiliza a *regra de três*

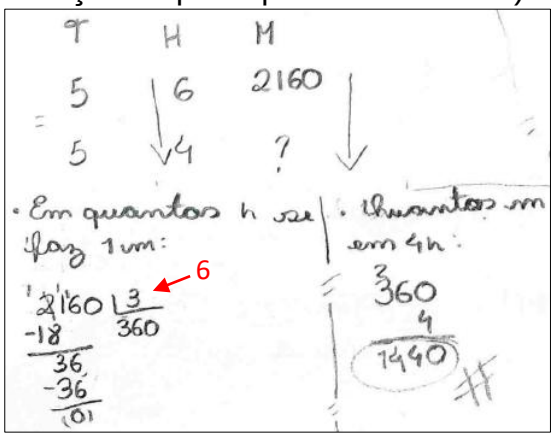
ou *estratégia funcional*, de forma implícita, para determinar o que é solicitado no enunciado (KoT – Procedimentos).

A resolução da participante C foi a escolhida pelo grupo na etapa da formulação para ser apresentada na validação. Ela também mobilizou um raciocínio de natureza qualitativa para caracterizar as relações como diretamente ou inversamente proporcionais na situação 1, como na seguinte fala:

> **Participante (C):** *Ele queria saber quantos metros ele fazia com a mesma quantidade de teares, mas só que em menos horas, menos de 4 horas. Aí eu vi que aqui realmente diminuiu 2 horas, se diminuiu as horas, ele ia diminuir também a quantidade dos metros.*

Para resolver a situação, a participante, que também percebeu que a quantidade de teares permanecia constante, usou a estratégia *busca pelo valor unitário* (Oliveira, 2009), através da qual calculou quantos metros quadrados de tecido eram produzidos na fábrica numa jornada de trabalho de 1h por dia e depois usou esse resultado para determinar quantos metros quadrados de tecido seriam produzidos pela mesma quantidade de teares numa jornada de trabalho de 4 horas por dia (Figura D8).

Figura D8 – Solução da participante C ao item a) da Situação 1.



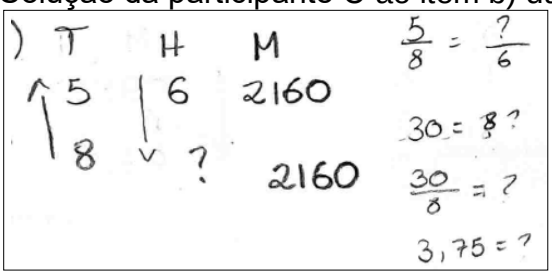
Fonte: dados da pesquisa.

A *razão unitária* encontrada pela participante corresponde ao *fator de proporcionalidade* entre as grandezas, ou seja, a constante que expressa a relação multiplicativa que vincula uma grandeza à outra, indicando quantas vezes uma delas corresponde a uma unidade da outra. Dessa forma, sem ter a percepção, a participante está mobilizando também a *estratégia funcional*, que – diferentemente da estratégia escalar, a qual evidencia a *covariância* entre as grandezas – enfatiza a relação de *invariância* entre as razões.

No item b), a participante fez uso da *regra de três inversa* (KoT – Procedimentos), encontrando corretamente o valor 3,75 horas (Figura D9). Contudo, observa-se mais uma ver uma relutância dos participantes em operar com números não exatos visto que ela preferiu arredondar o valor para quatro do que convertê-lo para uma unidade de medida composta:

> **Participante (C):** *A letra B eu não soube outra forma de fazer, além de ser regra de 3. Só que aí era a regra de 3 inversa, né? Porque a quantidade de máquina aumenta, então automaticamente as horas diminuem. Aí dividindo aqui ia dar 3,75. Aí eu arredondei pra 4 horas, que eu fiquei com preguiça de calcular.*

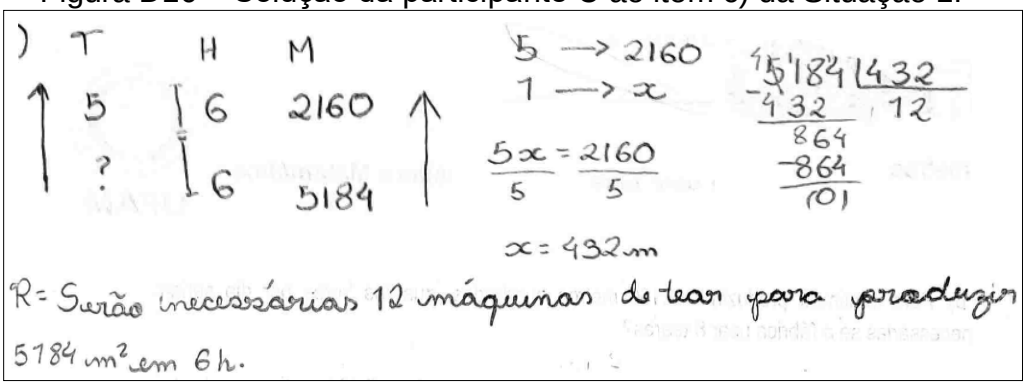
Figura D9 – Solução da participante C ao item b) da Situação 1.



Fonte: dados da pesquisa.

No item c), a participante novamente fez uso da estratégia *busca pelo valor unitário*, mas dessa vez utilizando a *regra de três* (KoT – Procedimentos), para encontrar o fator de proporcionalidade entre as grandezas. Após isso, usou a operação de divisão para encontrar a quantidade de teares que produziriam 5.184m² de tecido numa jornada de trabalho de 6 horas por dia (Figura D10).

Figura D10 – Solução da participante C ao item c) da Situação 1.



Fonte: dados da pesquisa.

Observa-se que a participante C, para resolver esse tipo de situação: organiza as quantidades em formato de tabela (KoT – Registro de representação) e, assim como a participante B, utiliza a representação de setas para representar se há uma relação diretamente proporcional (setas apontam para o mesmo sentido) ou

inversamente proporcional (setas apontam para sentidos inversos), o que caracteriza um conhecimento referente ao KoT – Fenomenologia e aplicações, visto que reconhece quando cada um dos casos ocorre, e, então, utiliza tanto a *regra de três* quanto a *busca pelo valor unitário* – em essência, a *estratégia funcional* – para determinar o que é solicitado no enunciado (KoT – Procedimentos).

Na Situação 2, a solução do participante A foi a escolhida pelo grupo na etapa da formulação para ser apresentada na etapa da validação. Inicialmente, observa-se que o participante iniciou sua resolução atribuindo uma quantidade arbitrária de água à mistura, apesar de essa grandeza não ser explicitada no enunciado e permanecer constante nos dois liquidificadores:

> **Participante (A):** *Bem, nessa aqui eu pensei bem diferente. Primeiro que a quantidade de água não foi revelada, então eu deduzi. Eu deduzi uma quantidade de água pra formar uma tabelinha. Eu botei 300 ml, peguei uma quantidade qualquer. Aí eu dividi em duas tabelinhas, liquidificador A e liquidificador B. Eu botei as grandezas tudinho, que é a quantidade de doses de xarope, a de amendoim e a de água.*

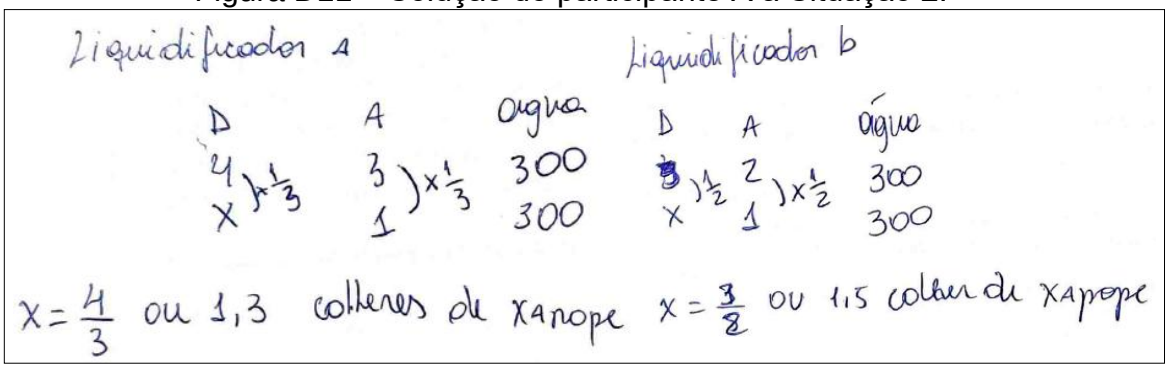
Tal estratégia não era necessária para a resolução da situação e evidencia a necessidade de trabalhar com quantidades absolutas e explicitamente conhecidas. Esse comportamento indica a mobilização inicial de um raciocínio absoluto, no qual o participante busca estabilizar a situação por meio da quantificação direta das grandezas, em detrimento da comparação entre razões, característica do pensamento proporcional. A dificuldade em reconhecer que a atribuição de um valor à quantidade de água não interfere na relação entre guaraná e amendoim revela fragilidades na compreensão do caráter relacional da proporcionalidade, especialmente em problemas de comparação.

Contudo, ao longo da resolução, o participante demonstra compreender que, para comparar a intensidade do sabor de guaraná, a quantidade de água deve ser mantida constante, passando a analisar exclusivamente a relação entre as quantidades de guaraná e de amendoim:

> **Participante (A):** *Aí eu pensei, se eu quero saber qual dos dois tem o gosto de xarope, o gosto de guaraná mais forte, o que eu ia fazer? Eu ia manter a quantidade de água. Eu ia abaixar a quantidade de colheres de amendoim. Eu botei em 1, né? Pra poder ficar mais fácil.*

Nesse momento, o participante mobiliza a estratégia de *busca pelo valor unitário*, determinando a razão unitária entre as grandezas, isto é, a quantidade de xarope correspondente a uma colher de amendoim em cada liquidificador (Figura D11). A comparação dessas razões o leva à conclusão correta de que o liquidificador B apresenta maior concentração de guaraná.

Figura D11 – Solução do participante A à Situação 2.



Fonte: dados da pesquisa.

> **Participante (A):** *E ao fazer o mesmo processo nas duas, eu descobri que o liquidificador B, para uma colher de amendoim e a mesma quantidade de água, precisaria de 1,5 de colher de xarope, enquanto a outra precisaria de 1,3. Então conclui que o liquidificador B teria o gosto mais forte de Guaraná.*

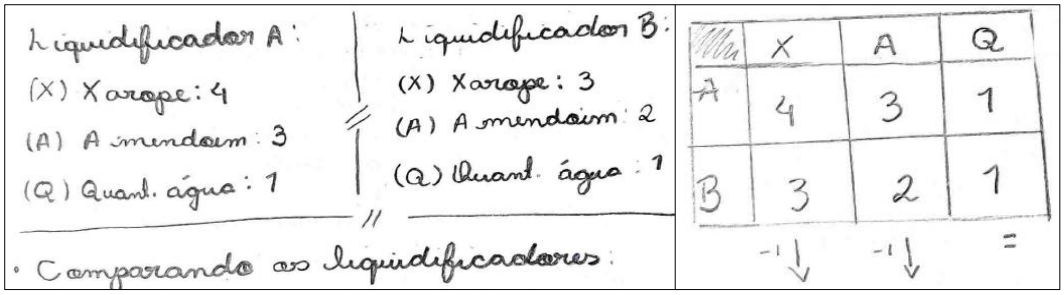
A partir da análise da resolução do participante, observa-se a mobilização de conhecimentos evidenciada pelo modo como ele conduz o processo de resolução frente a uma situação de comparação. Inicialmente, o participante busca estabilizar o problema por meio da atribuição de valores absolutos às grandezas envolvidas, estratégia que revela uma tentativa de tornar a situação mais controlável.

No decorrer da resolução, contudo, ele reorienta seu raciocínio ao reconhecer a necessidade de manter constante a quantidade de água e concentrar a análise na relação entre as quantidades de guaraná e amendoim, identificando as grandezas relevantes para a tomada de decisão (KoT – Fenomenologia e aplicações). Ao reduzir a quantidade de amendoim à unidade, o participante mobiliza a estratégia de busca pelo valor unitário, comparando razões unitárias entre as grandezas (KoT – Procedimentos), o que lhe permite interpretar corretamente o resultado no contexto do problema.

Ao contrário do participante A, os demais integrantes do grupo mobilizaram uma estratégia inadequada ao desconsiderarem a mistura dos elementos nos liquidificadores e as razões entre as grandezas envolvidas. Em suas resoluções, afirmaram que a vitaminada com sabor mais acentuado de guaraná estaria no

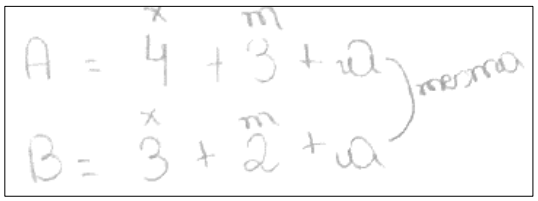
liquidificador A, fundamentando-se exclusivamente no fato de esse recipiente conter maior quantidade absoluta de xarope de guaraná (Figuras D12 e D13). As falas dos participantes evidenciam esse raciocínio. A participante C afirma que, como a quantidade de água é a mesma, “onde tiver mais xarope vai estar mais forte”, desconsiderando a relação entre xarope e amendoim. De modo semelhante, os participantes E e B justificam sua escolha comparando apenas a quantidade absoluta de xarope presente em cada liquidificador.

Figura D12 – Solução da participante C à Situação 2.



Fonte: dados da pesquisa.

Figura D13 – Solução da participante B à Situação 2.



Fonte: dados da pesquisa.

Esse modo de proceder já era previsto e revela a mobilização do *raciocínio absoluto* (aditivo), baseado na visualização e quantificação direta e na comparação de valores isolados, em detrimento do raciocínio relativo, próprio do pensamento proporcional, que exige a comparação entre razões e um maior nível de abstração (Oliveira, 2016). Tal encaminhamento indica fragilidades no KoT – Fenomenologia e aplicações, uma vez que os participantes não reconhecem a natureza relacional da situação, característica de problemas de comparação.

A análise das resoluções dos participantes B, C e E evidencia fragilidades no KoT – Procedimentos, na medida em que, embora tenham se engajado na tarefa e explicitado um encadeamento lógico para justificar suas respostas, adotaram uma estratégia inadequada à natureza da situação proposta. Os participantes concentraram-se na comparação de quantidades absolutas de xarope de guaraná, desconsiderando a relação entre as grandezas envolvidas na mistura, o que os levou

a conclusões incorretas. Tal prática revela uma dificuldade em selecionar e sustentar estratégias compatíveis com problemas de comparação, nos quais a análise deve se apoiar em relações relativas entre grandezas, e não em valores isolados. Assim, observa-se que a prática de resolução foi orientada por um raciocínio intuitivo e aditivo, em detrimento de um planejamento estratégico fundamentado no pensamento proporcional, indicando limitações na articulação entre compreensão da situação e escolha de procedimentos adequados.

Pergunta 2

Apesar de ambos os problemas envolverem pensamento proporcional, o raciocínio e as estratégias mobilizadas em cada um é diferente: no primeiro, há foco na busca por um valor desconhecido e, no segundo, o foco está na comparação entre duas misturas. Reconhecer essa diferença se enquadra no KoT na categoria de Fenomenologia e aplicações. A seguir, transcrevemos o que cada discente do grupo respondeu para essa questão. A resposta do participante A foi a escolhida pelo grupo para apresentar na etapa da validação.

> **Participante (A):** *A primeira é também usando a mesma estrutura de cálculo. Aí na segunda eu usei a mesma linha de raciocínio, só mudou a forma como eu interpretava as questões.*
>
> **Participante (B):** *Eu falei na minha resposta que eu não sabia, mas que acredito que dava pra aplicar a regra de 3 em ambos, só que com maior dificuldade na questão 2 comparado a 1.*
>
> **Participante (C):** *Ah tá, eu botei que o meu pensamento foi parecido nos dois problemas, porque primeiro eu coloquei o que o enunciado me dava as informações e depois eu fazia algum procedimento, que geralmente foi a regra de três, mas fora isso eu não fiz nada diferente.*
>
> **Participante (E):** *Bom, na primeira eu resolvi mais matematicamente, coloquei a tabelinha e tudo mais. Na segunda foi mais assim, lendo enunciado mesmo, deduzindo, usando um pouquinho da lógica. Não cheguei a fazer algum cálculo na segunda questão.*

As respostas dos participantes indicam que, apesar de perceberem diferenças entre os problemas, eles não conseguem explicitar a natureza específica das formas de pensamento proporcional envolvidas em cada situação. As justificativas apresentadas restringem-se a aspectos como a interpretação do enunciado, a maior ou menor facilidade de aplicar a regra de três ou o caráter “mais conceitual” de um dos problemas, sem detalhar como as relações entre grandezas se estruturam em

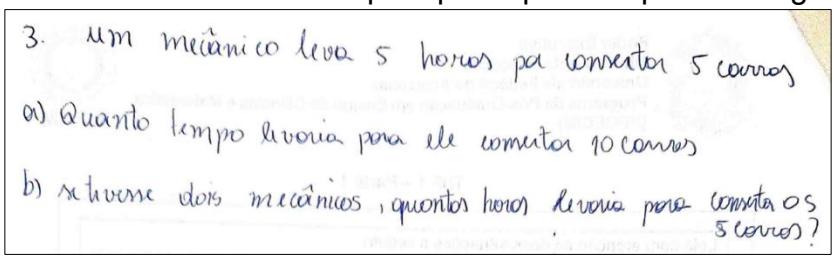
cada caso. Tal resultado evidencia uma compreensão ainda pouco elaborada das diferentes manifestações da proporcionalidade, fortemente ancorada em procedimentos algorítmicos e na familiaridade com determinados formatos de problema, em detrimento da análise das relações matemáticas que lhes dão sentido.

Tais achados apontam que, embora a tarefa tenha favorecido a mobilização de conhecimentos especializados para o ensino de proporcionalidade, ainda há fragilidades conceituais a serem superadas a tendência de associar a proporcionalidade quase exclusivamente a estruturas canônicas de valor omisso, dificultando o reconhecimento de outras classes de problemas proporcionais, como os de comparação de razões (Lesh; Post; Behr, 1988; Lamon, 2012; Oliveira, 2016).

Pergunta 3

Apenas o participante A tentou responder à questão. No entanto, o problema elaborado por ele apresenta estrutura matemática semelhante à Situação 1, diferenciando-se apenas pelo contexto, uma vez que se mantém a lógica de valor omisso resolvido por meio de uma relação direta entre as grandezas (Figura D14). Esse resultado indica que, embora o participante reconheça a proporcionalidade como ideia subjacente, não distingue diferentes classes de problemas proporcionais, o que evidencia uma compreensão ainda restrita da das situações que dão sentido a ao conceito de proporcionalidade.

Figura D14 – Problema criado pelo participante A para a Pergunta 3.



Fonte: dados da pesquisa.

No Quadro D1, sintetizamos os conhecimentos manifestados por todos os participantes, oferecendo, dessa forma, um panorama geral.

Quadro D1 – Conhecimento revelado pelos discentes em relação à problemas de valor omisso e de comparação no âmbito da proporcionalidade.

CATEGORIA	DESCRITOR	PARTICIPANTES

KoT – Definição, propriedades e fundamentos	Diferença entre variáveis diretamente e inversamente proporcionais	A
KoT - Procedimentos	Usar a *estratégia escalar* para resolver problemas de proporcionalidade	A
	Usar a *estratégia funcional* para resolver problemas de proporcionalidade	C e E
	Usar a estratégia *busca pelo valor unitário* em problemas de proporcionalidade	C
	Usar a *regra de três* para resolver problemas de proporcionalidade	B, C e E
	Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade	A, B, C e E
	Estabelecer relações de ordem e igualdade na comparação entre razões	A
KoT – Fenomenologia e aplicações	Reconhecer quando uma situação é diretamente ou inversamente proporcional	A, B, C e E
KoT – Registros de Representação	Organização das grandezas e seus respectivos valores em tabelas	A, B, C e E

Fonte: elaborado pela autora.

Analisando o Quadro D14, observa-se que a mobilização dos conhecimentos relacionados ao pensamento proporcional ocorreu de forma desigual entre os participantes. Apenas o participante A evidenciou a compreensão da definição de variáveis diretamente e inversamente proporcionais, bem como o uso consistente da estratégia escalar e da comparação de razões para estabelecer uma relação de ordem entre elas. Em contrapartida, os demais participantes recorreram predominantemente a procedimentos mais algorítmicos, com destaque para o uso da regra de três, mobilizada por B, C e E, e para o emprego da estratégia funcional por C e E, ainda que de forma pouco sistematizada. A estratégia de busca pelo valor unitário foi explicitamente utilizada apenas por C, embora todos os participantes tenham mobilizado multiplicação e divisão como procedimentos básicos na resolução das situações propostas.

No que se refere à fenomenologia da proporcionalidade, todos reconheceram, ao menos implicitamente, situações de proporcionalidade direta ou inversa, embora essa identificação nem sempre tenha orientado adequadamente as estratégias adotadas, especialmente nos problemas de comparação. Quanto aos registros de representação, todos organizaram as grandezas em tabelas. No âmbito da resolução

dos problemas, todos os participantes utilizaram estratégias adequadas para problemas de valor omisso; entretanto, somente o participante A mobilizou uma estratégia consistente para problemas de comparação, evidenciando maior domínio do caráter relacional do pensamento proporcional.

Considerações Finais

O objetivo desta tarefa formativa foi analisar que conhecimentos matemáticos especializados são mobilizados e/ou desenvolvidos por futuros professores de Matemática em um contexto formativo envolvendo a proporcionalidade, com ênfase em problemas de valor omisso e de comparação. A análise das resoluções e das respostas dos participantes evidencia diferentes formas de mobilização do pensamento proporcional e dos domínios do MTSK, com destaque para o KoT – Fenomenologia e aplicações e o KoT – Procedimentos.

Na Situação 1, todos os participantes obtiveram êxito na resolução, recorrendo a estratégias procedimentais consolidadas, como a organização dos dados em tabelas, o uso de multiplicação e divisão e a aplicação da regra de três. Observa-se, nesse caso, que os participantes selecionam estratégias adequadas para resolver um problema do tipo valor omisso. Contudo, essa mobilização ocorre predominantemente em nível algorítmico, com pouca explicitação do caráter relacional da proporcionalidade, indicando uma compreensão mais operacional do conceito.

Na Situação 2, que envolve a comparação entre duas misturas, emergem diferenças significativas entre os participantes. O participante A reconhece a necessidade de comparar razões entre grandezas, mobilizando o pensamento proporcional relativo característico de problemas de comparação, o que evidencia conhecimentos associados ao KoT – Fenomenologia e aplicações e ao KoT – Procedimentos. Em contraste, os demais participantes recorrem ao raciocínio absoluto, comparando apenas quantidades totais de xarope, o que revela fragilidades na compreensão da proporcionalidade como relação entre grandezas e não como simples comparação de valores isolados.

As respostas à Pergunta 2 indicam que, embora os participantes percebam que os dois problemas não são idênticos, eles não explicitam claramente a natureza matemática dessa diferença. As distinções são atribuídas, em geral, à interpretação do enunciado, à maior ou menor facilidade de aplicar procedimentos conhecidos ou ao caráter mais conceitual de uma das situações. Esse resultado evidencia limitações

no KoT – Fenomenologia e aplicações, especialmente no reconhecimento de diferentes classes de problemas proporcionais.

Por fim, na Pergunta 3, apenas um participante conseguiu elaborar um novo problema envolvendo pensamento proporcional. Ainda assim, o problema criado mantém estrutura matemática semelhante à da Situação 1, alterando apenas o contexto, o que sugere dificuldades em reconhecer e produzir situações proporcionalmente distintas. Esse achado reforça que o conhecimento sobre a diversidade de manifestações da proporcionalidade ainda se mostra restrito entre os participantes.

Em síntese, os resultados indicam que, embora os futuros professores mobilizem estratégias eficazes em problemas do tipo valor omisso e comparação no âmbito da proporcionalidade, persistem fragilidades na compreensão do caráter relacional do conceito e na identificação de diferentes estruturas de problemas proporcionais. Esses aspectos evidenciam a importância de contextos formativos que promovam não apenas o domínio de procedimentos, mas também a reflexão sobre as diversas formas de manifestação da proporcionalidade e sobre os critérios que distinguem as diferentes classes de problemas, contribuindo para o desenvolvimento mais amplo do conhecimento matemático especializado do professor.

APÊNDICE E – Tarefa para Formação 2 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade

Leia com atenção as duas situações a seguir:
Atenção: Você deve explicar sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos etc.

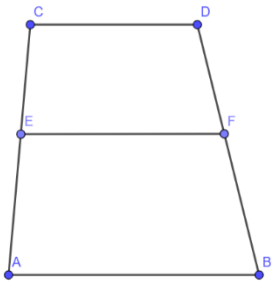
Situação 1: Táxi ou motorista de aplicativo?



Dona Ana precisa voltar para casa com as compras do mês que acabou de fazer no supermercado. Ela está em dúvida se chama um táxi ou um motorista de aplicativo para fazer a corrida. O taxista cobra R$ 20,00 a cada 4 quilômetros rodados, enquanto que pelo aplicativo, o valor cobrado é R$ 18,00 para cada 5 quilômetros rodados. Considerando que o caminho à casa de dona Ana ao supermercado seja o mesmo para ambos os serviços, em quanto cada motorista precisaria alterar o valor de sua corrida a fim de que o custo final para dona Ana fosse o mesmo, independentemente da escolha?

Situação 2: Problema do trapézio

Considere o trapézio ABDC de base maior com medida 6cm e base menor com medida 4cm. Qual é a medida do seguimento EF se os trapézios ABFE e EFDC são semelhantes?



1. Resolva as situações por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino).
2. Para resolver os dois problemas, é utilizada a mesma forma de pensar ou formas diferentes? Justifique.
3. Crie um problema que envolva o mesmo raciocínio matemático, mas matematicamente distinto dos dois problemas dados, e resolva-o. O que leva os três problemas a serem distintos?

APÊNDICE F – Análise detalhada das resoluções da Tarefa para Formação 2 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade

Com a aplicação da TpF2, buscou-se aprofundar a análise dos conhecimentos matemáticos especializados mobilizados e/ou desenvolvidos pelos participantes em um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade, agora em situações que envolvem problemas de transformação e de média. Para a apresentação dos resultados, o texto foi organizado de modo semelhante ao adotado na tarefa anterior: inicialmente, analisam-se as resoluções individuais de cada participante e, em seguida, a solução sistematizada pelo grupo para a Situação 1; posteriormente, procede-se à análise da Situação 2 e, por fim, das respostas às questões 2 e 3 da tarefa proposta.

As análises baseiam-se nos dados produzidos ao longo das diferentes etapas da Teoria das Situações Didáticas, contemplando: as resoluções escritas individuais dos participantes, correspondentes à etapa da ação; as falas gravadas durante a explicitação de suas estratégias aos demais membros do grupo, relativas à etapa da formulação; e a resposta escrita construída coletivamente pelo grupo, associada à etapa da validação. Por fim, apresenta-se uma síntese, por meio de um quadro, dos conhecimentos manifestados pelos participantes, com o objetivo de oferecer uma visão global dos aspectos do conhecimento matemático especializado mobilizados ao longo da tarefa.

Pergunta 1

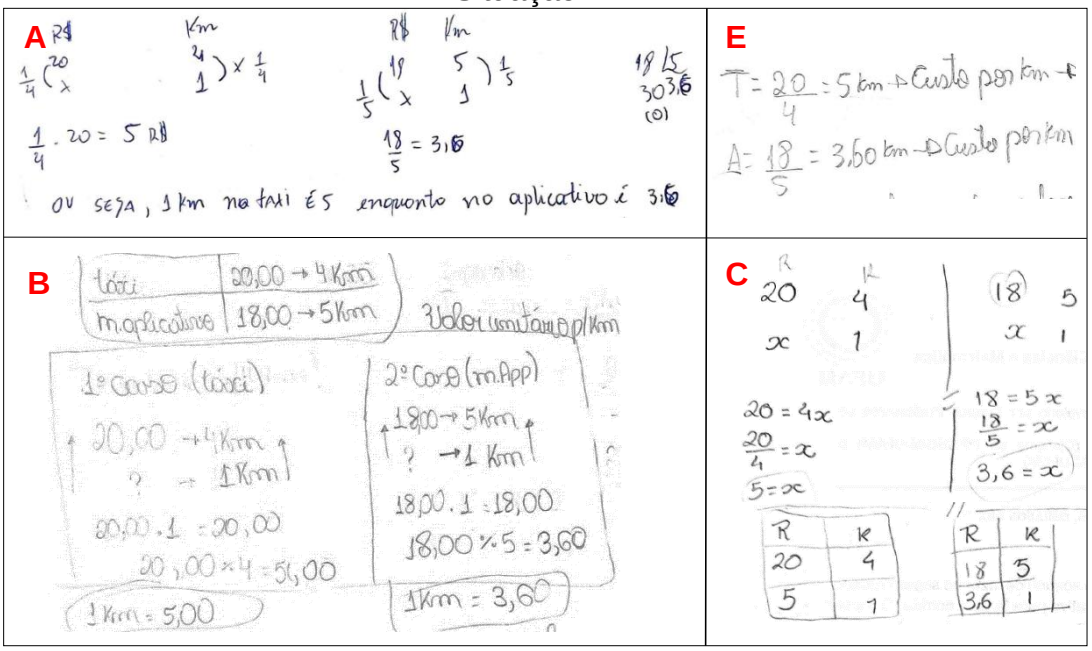
Para resolver a Situação 1, inicialmente, todos os participantes mobilizaram a estratégia *busca pelo valor unitário* (KoT – Procedimentos) para descobrir quanto o taxista e quanto o motorista de aplicativo cobravam por quilômetro rodado. A fala da participante C permite observar uma evolução quando menciona o termo “valor unitário”, estratégia discutida durante a etapa da institucionalização da TpF1:

> **Participante (C):** *Aí ela falou pra fazer sobre o negócio lá do **valor unitário** [grifo nosso], né? Aí eu fiz que pra 20 reais ele anda 4km e pra 1km ele anda x reais. Aí eu achei que o valor de x era 5. Aí eu fiz a mesma coisa pro 18, só que aí deu que o valor de x era 3,6.*

Entretanto, a Figura F1 permite observar que os participantes mobilizaram diferentes procedimentos para determinar o valor almejado (KoT – Procedimentos):

as participantes B e C usaram a *regra de três* enquanto o participante A utilizou a *estratégia escalar*. Já o participante E procedeu dividindo o total de quilômetros pelo valor cobrado por tal distância, mobilizando o conhecimento do uso da operação de divisão em situações envolvendo proporcionalidade (KoT – Procedimentos). Além disso, A, B e C organizaram as informações em tabelas para relacionarem as quantidades às devidas grandezas (KoT – Registro de Representação).

Figura F1 – Mobilização da estratégia busca pelo valor unitário na resolução da Situação 1.



Fonte: dados da pesquisa.

Após encontrar o valor cobrado por quilômetro rodado por ambos os motoristas, a participante B não soube mais como prosseguir na resolução. Já a participante C, embora tenha afirmado dificuldades para avançar na resolução, mobilizou uma estratégia inicial coerente ao determinar o valor unitário do taxista e do motorista de aplicativo. No entanto, esses valores não foram utilizados como razões a serem comparadas entre si. Em vez disso, a participante passou a operar com valores absolutos associados a distâncias específicas, recalculando o custo do aplicativo para 4 km e, posteriormente, o custo do táxi para 5 km, de modo a comparar os preços totais das corridas.

> **Participante (C):** *[Cálculo 1:] Eu peguei o valor aqui de 3,6 foi o do 18 e multipliquei por 4, que no caso aqui, a gente tá multiplicando por 5, né? Nesse caso eu multipliquei por 4 pra ver quanto que dava se ele for fazer 4km, aí deu 14,40. Aí eu diminui 20 menos 14,40 que era pra ver a diferença dos valores, né? Aí pra igualar os valores, né? Aí por isso que eu falei que um motorista de táxi deveria reduzir 5 reais e 60*

> *centavos, que foi a diferença. [Cálculo2:] Aí pra ele rodar os 5 km eu fiz a mesma coisa. Aí eu vi que pra rodar os 5km eu multipliquei 5 vezes 5 no caso aqui. Aí deu 25 reais. Então depois eu fiz a diferença 25 menos 18 que deu 7. Então pra ele rodar 5km o motorista de aplicativo deveria adicionar 7 reais no valor da corrida dele.*

Ou seja, a participante partiu da relação 20/4 > 18/5, transformando as quantidades 20 e 18 e tornando verdadeira as seguintes relações: (20-5,60)/4 = 18/5 e 20/4 = (18+7)/5 (KoT-procedimentos). Ao dividir o 18 por 5 obtendo 3,6 e multiplicando esse último por 4 para obter o valor 14,4, a participante estabelece o fator de proporcionalidade entre as grandezas distintas presentes na situação e mobiliza o conhecimento da *estratégia funcional* (KoT-Procedimentos). Tal procedimento, apensar de correto, revela que o valor unitário foi empregado apenas como um recurso intermediário de cálculo, sem generalização da relação funcional entre custo e distância. Essa forma de proceder evidencia uma compreensão ainda local do pensamento proporcional, centrada na comparação de valores particulares, e não na igualdade entre razões, o que aponta fragilidades no KoT – Fenomenologia e aplicações.

De modo semelhante, o participante E também não operou diretamente com as razões unitárias como elemento central da situação. Embora tenha determinado corretamente o valor cobrado por quilômetro por cada motorista, optou por trabalhar com uma distância arbitrária de 20 km, calculando o custo total de cada corrida para, em seguida, comparar os valores obtidos. Observa-se, ainda, uma interpretação imprecisa das grandezas e de suas respectivas unidades de medida, evidenciada na fala do participante ao referir-se ao número 20 como valor monetário, quando, na prática, ele o utiliza como medida de distância. Após calcular a diferença entre os custos totais e dividi-la pelo número de quilômetros considerados, o participante retorna ao valor da diferença por quilômetro.

> **Participante (E):** *Aí, desse valor, eu multipliquei por 20 reais [o correto seria 20 quilômetros], que é o que o taxista cobra, no caso. Aí, na primeira parte deu 100 reais, no total, e depois também me expliquei embaixo por 3,60, por 20 também, que deu 72 reais. Aí, depois eu calculei a diferença desses dois, no caso 100 menos 72, que deu 28. Aí depois eu fiz, peguei o valor dessa diferença e dividi pelo número de quilômetros, no caso seria o 20, que na verdade seria o valor. E aí deu um valor de 1,40. Aí eu vi que para poder igualar, o motorista do aplicativo, ele precisaria aumentar esse valor. No caso, 1,40 mais 3,60, ele daria o valor de 5 reais. E no caso, o taxista precisaria reduzir esse valor para poder ficar igual.*

Dessa forma, o participante parte da relação 100/20 > 72/20 e transforma as duas quantidades, 100 e 72, tornando verdadeiras as seguintes relações: (100-28)/20

= 72/20 e 100/20 = (72+28)/20, a partir das quais encontra (5-1,40)/1 = 3,6/1 e 5/1 = (3,6+1,40)/1 (KoT-Procedimentos). Contudo, o encadeamento de procedimentos mobilizado, embora conduza ao resultado correto, revela uma dependência de valores absolutos e a necessidade de concretizar a situação em um caso particular, em detrimento do reconhecimento direto da diferença entre as razões. Tal estratégia evidencia fragilidades na compreensão da razão como invariante da relação proporcional, indicando limitações no KoT – Fenomenologia e aplicações, bem como dificuldades na articulação entre grandezas e unidades de medida.

A solução do participante A foi a escolhida pelo grupo na etapa da formulação para apresentar na etapa da validação. Diferentemente do participante E, ele parte diretamente da comparação entre as razões unitárias 5/1 > 3,6/1 e transforma as duas quantidades, 5 e 3,6, tornando verdadeiras as seguintes relações: (5-1,40)/1 = 3,6/1 e 5/1 = (3,6+1,40)/1, evidenciando a compreensão de que a igualdade dos custos depende da modificação direta do valor cobrado por quilômetro.

> **Participante (C):** *então o que ambos precisariam somar para diminuir seria R$1,4 o taxista diminuir R$1,4 R$ 1,40 dos seus R$ 5,00 por quilômetro rodado, da mesma forma como um outro aplicativo deveria aumentar R$ 1,40 do preço de um quilômetro para poderem serem coincidentes.*

Tal encaminhamento manifesta o domínio de estratégias de resolução de problemas de transformação, caracterizando a mobilização de conhecimentos do KoT – Procedimentos.

A análise das resoluções dos participantes C e E evidencia fragilidades nos seus conhecimentos, não por conduzirem a uma resposta incorreta, mas pela escolha e condução de estratégias pouco adequadas à natureza da situação proposta. Embora ambos tenham mobilizado inicialmente a estratégia de busca pelo valor unitário (KoT – Procedimentos), optaram por operar posteriormente com valores absolutos e com comparações de custos associados a distâncias específicas, o que os levou a um encadeamento de cálculos desnecessário para esse tipo de problema.

Tal encaminhamento, apesar de se firmar como uma estratégia de resolução de problema (Schoenfeld, 1992) à medida que introduz um elemento auxiliar à resolução para analisar um caso específico, indica uma dependência do raciocínio absoluto, em detrimento de uma análise relacional direta entre as taxas unitárias, que seria mais compatível com problemas de transformação. Embora tenham recorrido a procedimentos matematicamente válidos, as abordagens adotadas não se mostraram adequadas à natureza do problema de transformação proposto, indicando limites na

capacidade de avaliar a pertinência das estratégias ao longo do processo de resolução. Tal resultado dialoga com o que propõem Burgos et al. (2018), ao destacarem a importância de investigar se os professores demonstram uma atitude crítica na escolha de abordagens adequadas a cada situação, aspecto que, neste caso, se mostrou fragilmente mobilizado.

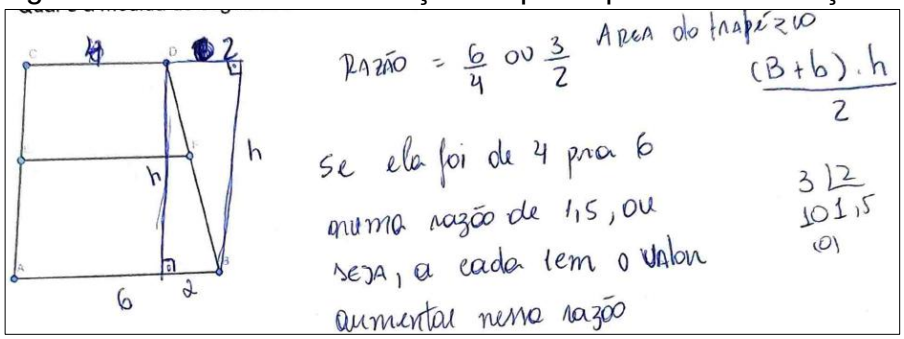
Em contraste, o participante A evidencia uma prática de resolução mais avançada ao reconhecer a estrutura do problema e operar diretamente sobre as razões unitárias, ajustando-as de forma sistemática até torná-las equivalentes. Sua estratégia revela a escolha de um procedimento adequado à natureza da situação proposta, ao operar diretamente no nível das taxas unitárias e realizar transformações coerentes entre as grandezas envolvidas.

Na Situação 2, que envolve a determinação da medida de um segmento a partir da semelhança entre trapézios, observou-se que todos os quatro participantes apresentaram dificuldades na resolução. Essas dificuldades estiveram associadas, principalmente, à não mobilização do conhecimento do conceito de semelhança de figuras geométricas e de suas propriedades, que ainda não havia sido formalmente estudado pelos licenciandos na graduação, uma vez que nenhum deles havia cursado a disciplina de Geometria Plana no momento da aplicação da tarefa. Como consequência, as estratégias adotadas foram, em sua maioria, inadequadas à natureza da situação.

Os participantes A e E recorreram à fórmula da área do trapézio como tentativa de resolução da situação; entretanto, tal procedimento mostrou-se inadequado à natureza do problema, uma vez que a determinação da medida do segmento EF depende das relações de semelhança entre figuras, e não do cálculo de áreas. Além disso, ambos não conseguiram estabelecer como a expressão da área poderia contribuir para a obtenção do comprimento solicitado.

Em particular, o participante A também buscou relacionar as medidas das bases do trapézio ABDC, obtendo a razão 1:1,5, e passou a considerar que os demais segmentos do trapézio deveriam variar segundo essa mesma razão (Figura F2). Tal encaminhamento é equivocado, pois a razão entre as bases de um trapézio, isoladamente, não determina a razão de semelhança entre os comprimentos dos demais segmentos, especialmente quando não se reconhece explicitamente a relação de semelhança entre os trapézios envolvidos.

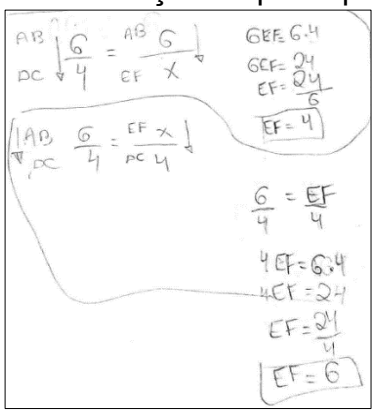
Figura F2 – Tentativa de solução do participante A à Situação 2.



Fonte: dados da pesquisa.

A participante B apresentou uma tentativa de resolução que evidencia uma compreensão parcial da ideia de semelhança, embora não tenha conseguido identificar corretamente entre quais figuras essa relação deveria ser estabelecida. Em sua resolução, ela montou proporções envolvendo o trapézio maior ABDC e, separadamente, cada um dos trapézios menores ABFE e EFDC, obtendo, assim, valores distintos para a medida do segmento EF (Figura F3). Tal procedimento revela um equívoco conceitual, uma vez que a condição de semelhança indicada no enunciado se estabelece entre os trapézios ABFE e EFDC, e não entre estes e o trapézio maior.

Figura F3 – Tentativa de solução do participante A à Situação 2.



Fonte: dados da pesquisa.

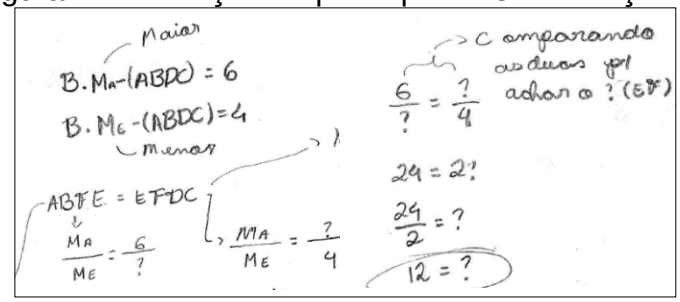
Apesar do erro, a estratégia adotada dá indícios de que a participante reconhece a proporcionalidade como ferramenta adequada para tratar situações envolvendo figuras semelhantes (KoT – Fenomenologia e aplicações), ainda que não consiga identificar corretamente as figuras correspondentes. Esse limite parece ser percebido pela própria participante, que registra, ao final da resolução, não ter conseguido resolver o problema por ter encontrado dois valores distintos para EF, sinalizando uma consciência acerca da inadequação do encaminhamento adotado.

Tal postura evidencia um movimento de reflexão sobre a coerência do resultado obtido, aspecto que se alinha à importância de estimular nos estudantes uma atitude crítica diante de suas próprias resoluções, conforme destacam Allevato e Onuchic (2021), de modo que não se restrinjam à aplicação mecânica de procedimentos, mas avaliem a plausibilidade e a consistência dos resultados produzidos.

Por fim, a participante C adotou uma estratégia de resolução conceitualmente adequada, ao estabelecer uma relação de proporcionalidade entre as bases dos dois trapézios semelhantes (KoT – Procedimentos), identificando corretamente quais figuras deveriam ser comparadas. Esse encaminhamento inicial indica a mobilização da ideia de semelhança e do uso de razões correspondentes (KoT – Fenomenologia e aplicações), ainda que esse conhecimento não esteja formalmente sistematizado (Figura F4).

Contudo, a participante cometeu um erro operacional na escrita algébrica da igualdade ao registrar 2x em lugar de x^2, o que evidencia uma dificuldade já observada por Costa e Allevato (2015) quando se trata de problemas envolvendo proporcionalidade: dificuldade em operar com a expressão algébrica, demonstrando falta de conhecimento algébrico e numérico. Além disso, esse equívoco nos impede de caracterizar o ponto chave da estratégia *obtenção do valor médio* (Scheller; Bonotto, 2020), característica desse tipo de problema, em que, no caso dessa situação, o segmento EF é igual a média geométrica entre as medidas das bases do trapézio ABDC.

Figura F4 – Solução da participante C à Situação 2.



Fonte: dados da pesquisa.

> **Participante (C):** *E aí, multiplicando cruzado, deu o valor de 12. Só que eu acho que não tá certo, porque como que esse aqui vai ser maior do que E? Não. Como que ele vai ser maior, entendeu? Era pra ele ser menor do que 4 e maior do que 6, na minha cabeça, né? Por isso que eu acho que não tá certo.*

A insegurança manifestada pela participante em relação ao resultado obtido, explicitada em sua fala, indica que ela reconhece a necessidade de coerência entre o

valor encontrado e as relações geométricas envolvidas, ao questionar a plausibilidade de um segmento intermediário assumir medida maior que a base maior do trapézio original. Tal postura revela indícios de uma atitude crítica diante do próprio processo de resolução, alinhando-se novamente à perspectiva defendida por Allevato e Onuchic (2021), que destacam a importância de estimular nos estudantes a reflexão sobre a coerência e o significado dos resultados, e não apenas a execução de procedimentos. Esses episódios reforçam que reconhecer a inadequação de um resultado constitui um passo relevante no desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino.

Dito isso, observa-se que apenas a participante C apresentou indícios de mobilização desse conhecimento ao construir uma estratégia própria para resolver a situação, organizando as informações, estabelecendo relações proporcionais entre as figuras envolvidas e monitorando a plausibilidade do resultado obtido, como evidenciado em sua fala. Os demais participantes não conseguiram delinear estratégias adequadas para a resolução do problema, recorrendo a procedimentos não pertinentes, como o uso da fórmula da área do trapézio ou comparações indevidas entre figuras não correspondentes.

Tal dificuldade pode ser compreendida à luz do percurso formativo dos participantes, uma vez que nenhum deles havia cursado ainda a disciplina de Geometria Plana na graduação, o que limita o acesso a conhecimentos específicos sobre semelhança de figuras e, consequentemente, a mobilização de estratégias de resolução adequadas a problemas dessa natureza. Assim, os dados indicam que a fragilidade observada não decorre apenas de escolhas individuais, mas também da ausência de experiências formativas que favoreçam o desenvolvimento desse tipo de prática.

Esse resultado reforça que o desenvolvimento de conhecimentos especializados está fortemente condicionado às oportunidades formativas vivenciadas pelos futuros professores, especialmente em tópicos que articulam proporcionalidade e geometria. Na etapa da institucionalização, estratégias pertinentes a esse tipo de problema foram discutidas a partir da resolução da participante C, permitindo validar os conhecimentos mobilizados que se mostraram adequados à situação e problematizar aqueles que se revelaram incoerentes, com a devida justificativa.

Pergunta 2

Embora ambas as situações envolvam o pensamento proporcional, as formas de raciocínio e as estratégias requeridas em cada uma delas são distintas. Na Situação 1, o foco recai sobre a transformação de uma das quantidades de modo a tornar equivalentes duas razões, característica de problemas de transformação. Já na Situação 2, a resolução exige determinar a média geométrica entre as medidas envolvidas, utilizando-se da relação $\frac{CD}{EF} = \frac{EF}{AB}$. Reconhecer tais diferenças diz respeito ao KoT na categoria Fenomenologia e aplicações. A seguir, apresentamos as respostas dos participantes para essa questão, sendo a resposta do participante A a escolhida pelo grupo para apresentação na etapa da validação.

> **Participante (C):** *Eu disse que são diferentes porque na primeira eu usei a resolução do valor unitário, eu acho, e na segunda eu comparei as informações, mas eu não sei se é diferente ou não é.*
>
> **Participante (E):** *Eu só coloquei o que eu fiz na primeira, até porque eu não consegui fazer a segunda, então na primeira mesmo era assim, envolvia um pouco mais os cálculos e também uma interpretação melhor do texto.*
>
> **Participante (A):** *Ambos usam proporcionalidade, então é a mesma forma de pensar, mas as áreas matemáticas usadas são bem diferentes, porque quando vinha a questão de geometria, automaticamente tu tinha que se recordar de conceitos da geometria, diferente da situação 1, onde só era pra gente encontrar a razão e tal, essas coisas, agora no 2 não, tinha que lembrar sobre conceitos de figuras semelhantes.*
>
> **Participante (B):** *Eu falei a mesma coisa, sempre um pouco parecida com a do [participante A], eu não sei, e que eu achava que eram diferentes por conta disso. Por conta de um envolver a geometria e o outro ser de forma diferente. Enfim, só coloquei que eu não sabia.*

As falas dos participantes indicam que, embora reconheçam que as duas situações não se resolvem exatamente da mesma maneira, essa diferenciação não se apoia, em geral, na ênfase específica que cada problema dá à proporcionalidade. A participante C, por exemplo, menciona a estratégia de busca pelo valor unitário, mobilizada na Situação 1, evidenciando a influência das discussões realizadas na TpF anterior, mas demonstra insegurança quanto à distinção efetiva entre as formas de pensar envolvidas.

Os demais participantes associam majoritariamente a diferença entre as situações ao fato de a Situação 2 envolver conteúdos geométricos, em especial figuras semelhantes, sem explicitar que se trata de um problema cuja estrutura proporcional difere daquela da Situação 1. Assim, não emergem, nas falas, referências claras ao caráter transformacional da primeira situação nem ao papel da média geométrica na segunda, aspectos centrais para a caracterização dos tipos de

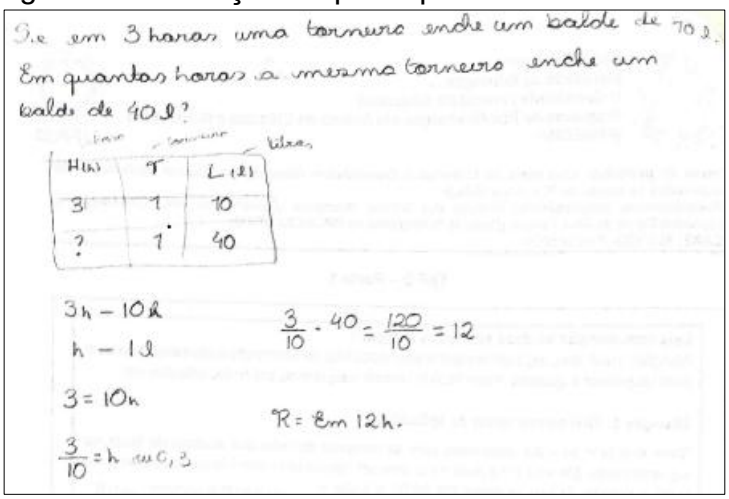
problemas propostos. Tal fato sugere que os participantes tendem a associar diferenças nas formas de pensar matematicamente mais aos domínios de conteúdo envolvidos do que às estruturas conceituais subjacentes aos problemas, o que evidencia fragilidades na compreensão dos diferentes fenômenos que dão sentido à proporcionalidade.

Pergunta 3

Na Pergunta 3, o foco esteve em analisar se os participantes conseguiam identificar as características específicas dos problemas trabalhados nesta tarefa – transformação e média geométrica – a fim de elaborar uma nova situação que ainda mobilizasse o pensamento proporcional, mas que pertencesse a outra categoria de problemas. Esperava-se que os licenciandos reconhecessem que o pensamento proporcional não se restringe a um único formato ou contexto, podendo manifestar-se em diferentes estruturas, inclusive naquelas já discutidas na TpF1. Assim, a questão buscou evidenciar em que medida os participantes compreendem que variar as grandezas envolvidas, as relações estabelecidas entre elas ou as condições do problema implica transitar entre diferentes classes de problemas proporcionais, aspecto diretamente relacionado ao KoT – Fenomenologia e aplicações.

A participante B afirmou não ter conseguido resolver nenhum dos problemas e, por isso, não elaborou uma nova situação. Os participantes A e E também não criaram problemas. A participante C, por sua vez, elaborou um problema do tipo valor omisso (Figura F5); no entanto, interpretou-o como semelhante à Situação 1 da TpF2, o que indica que não estava clara, para ela, a distinção entre as categorias de problemas envolvidos.

Figura F5 – Solução da participante C à Questão 3.



Fonte: dados da pesquisa.

> **Participante (C):** *[...] Por isso eu não sei se é diferente do jeito que eu fiz a primeira ou não, por causa do valor unitário. A diferença que eu vi é que eu botei três grandezas aqui, né?*

Embora o problema criado mobilize corretamente o pensamento proporcional, a participante não reconhece que ele pertence a uma classe distinta daquela explorada na tarefa, pois usou a mesma estratégia, busca pelo valor unitário, para resolver ambas. Contudo, ela reconhece que, diferentemente da Situação 1, o problema criado por ela possuía três informações e uma a ser descoberta, o que dá indícios de que reconhece problemas pertencentes à categoria *problema de valor omisso*, mesmo que implicitamente (KoT – Fenomenologia e aplicações).

No Quadro F1, sintetizamos os conhecimentos manifestados por todos os participantes, oferecendo, dessa forma, um panorama geral.

Quadro F1 – Conhecimento revelado pelos participantes em relação à problemas de transformação e de média no âmbito da proporcionalidade.

CATEGORIA	DESCRITOR	PARTICIPANTES
KoT - Procedimentos	Usar a *estratégia escalar* para resolver problemas de proporcionalidade	A
	Usar a *estratégia funcional* para resolver problemas de proporcionalidade	C
	Usar a estratégia *busca pelo valor unitário* em problemas de proporcionalidade	A, B, C e E
	Usar a *regra de três* para resolver problemas de proporcionalidade	B e C
	Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade	E

KoT – Fenomenologia e aplicações	Transformar quantidades para tornar razões equivalentes	A, C e E
	Estabelecer proporções entre os lados homólogos de trapézios semelhantes	C
	Reconhecer que figuras semelhantes envolvem relações proporcionais	B e C
	Reconhecer distintas classes de problemas que envolvem o pensamento proporcional	C[16]
KoT – Registros de Representação	Organização das grandezas e seus respectivos valores em tabelas	A, B e C

Fonte: elaborado pela autora.

Analisando o Quadro F1, observa-se que a mobilização dos conhecimentos foi desigual entre os participantes e variou conforme a natureza das situações propostas na TpF2. No âmbito do KoT – Procedimentos, todos os participantes recorreram, em algum momento, à estratégia de busca pelo valor unitário, o que indica a consolidação dessa estratégia a partir das tarefas anteriores. No entanto, apenas o participante A mobilizou a estratégia escalar de forma explícita, enquanto a estratégia funcional apareceu de maneira mais consistente apenas na resolução da participante C. Apesar dos distintos níveis de formalização e da dependência do raciocínio absoluto, A, C e E conseguiram transformar as quantidades nas razões para torna-las equivalentes. Destaca-se ainda que somente C conseguiu estabelecer proporções entre lados homólogos de trapézios semelhantes, evidenciando um conhecimento procedimental específico relacionado à geometria que não foi mobilizado pelos demais.

Em relação ao KoT – Fenomenologia e aplicações, nota-se que o reconhecimento da proporcionalidade esteve mais associado às situações aritméticas do que às geométricas. A participante C (e parcialmente A e B) demonstrou compreender que a semelhança de figuras geométricas implica relações proporcionais entre seus lados, o que reforça as dificuldades do grupo em transitar entre contextos algébricos e geométricos da proporcionalidade. No que diz respeito aos Registros de Representação, a organização das informações em tabelas foi uma estratégia recorrente entre A, B e C.

Por fim, observa-se que estratégias associadas a problemas de transformação foram mobilizadas por A, C e E, ainda que com níveis distintos de adequação e controle. Entretanto, apenas a participante C apresentou uma estratégia compatível

[2] Apesar de a participante elaborar um problema pertencente a uma classe distinta dos problemas trabalhados na tarefa, não identificou o que leva os quatro problemas a serem distintos.

com problemas do tipo média, o que evidencia que esse tipo de situação exige conhecimentos e experiências formativas que ainda não foram suficientemente consolidadas pelo grupo. De modo geral, o quadro indica que a mobilização e o desenvolvimento de conhecimentos especializados na TpF2 estiveram fortemente condicionados tanto ao domínio prévio de conteúdos geométricos quanto à capacidade de selecionar estratégias ajustadas à natureza específica de cada problema.

Considerações Finais

O objetivo desta segunda tarefa formativa foi analisar que conhecimentos matemáticos especializados são mobilizados e/ou desenvolvidos por futuros professores de Matemática em um contexto formativo envolvendo a proporcionalidade, tomando como referência problemas do tipo transformação e de média, os quais exigem formas de raciocínio distintas daquelas mobilizadas em problemas de valor omisso e comparação.

A análise da Situação 1 evidencia que todos os participantes reconhecem a proporcionalidade como ferramenta adequada para tratar da situação proposta, mobilizando procedimentos como a busca pelo valor unitário, a regra de três e operações de multiplicação e divisão. Entretanto, em parte das resoluções, observa-se a predominância do raciocínio absoluto, com comparações baseadas em valores concretos para distâncias específicas, em detrimento da análise relacional entre razões unitárias. Tais encaminhamentos revelam dificuldades na seleção e na sustentação de estratégias mais adequadas à natureza de problemas de transformação, nos quais a igualdade de custos depende da alteração das razões envolvidas.

Em contraste, a solução apresentada pelo participante A, escolhida pelo grupo na etapa da validação, evidencia uma mobilização mais consistente do pensamento proporcional relativo, ao operar diretamente com as razões unitárias e promover transformações que tornam equivalentes os valores por quilômetro. Essa estratégia revela não apenas domínio procedimental, mas também uma compreensão mais adequada da estrutura do problema, articulando proporcionalidade e transformação de quantidades das grandezas.

Na Situação 2, que envolve proporcionalidade em contexto geométrico, as dificuldades se intensificam. A ausência de experiências formativas prévias em

Geometria Plana refletiu-se em estratégias equivocadas ou incompletas, especialmente no reconhecimento das propriedades de figuras semelhantes. Ainda assim, algumas resoluções, em particular a da participante C, indicam indícios de compreensão conceitual da proporcionalidade como ferramenta para tratar de relações entre figuras semelhantes, mesmo que tal compreensão não se encontre plenamente consolidada. A postura crítica das participantes B e C em relação ao próprio resultado, ao questionar sua plausibilidade, revela um aspecto relevante de seus conhecimentos, associado à reflexão sobre a coerência das soluções produzidas.

As respostas à Questão 2 reforçam que, embora os participantes percebam que as duas situações demandam formas distintas de pensar, essa diferenciação é atribuída majoritariamente à presença de conteúdos geométricos na Situação 2, e não aos aspectos do pensamento proporcional os quais cada uma das situações enfatiza – transformação e média. Tal resultado aponta limitações no KoT – Fenomenologia e aplicações, especialmente no reconhecimento de diferentes classes de problemas proporcionais e das formas específicas de raciocínio que elas demandam.

Esse resultado se articula com a análise das respostas à Questão 3. A participante C conseguiu elaborar um problema pertencente a outra categoria de problemas proporcionais, especificamente do tipo valor omisso, o que indica que reconhece que o pensamento proporcional pode manifestar-se em diferentes contextos. No entanto, ao considerar o problema criado como semelhante à Situação 1 da TpF2, a participante associa o tipo de problema à estratégia utilizada — a busca pelo valor unitário — e não às características estruturais da situação. Tal aspecto revela uma compreensão ainda incipiente das distinções entre classes de problemas proporcionais, evidenciando limites no KoT – Fenomenologia e aplicações.

Em síntese, a TpF2 evidencia que, embora os participantes reconheçam a proporcionalidade como um recurso matemático relevante, há fragilidades na compreensão das estruturas específicas que caracterizam problemas de transformação e de média, bem como na articulação desse pensamento com contextos geométricos. Tais resultados indicam a importância de contextos formativos que promovam não apenas o uso de procedimentos proporcionais, mas também a análise crítica das relações envolvidas e das características que distinguem diferentes classes de problemas, favorecendo uma compreensão mais estruturada do pensamento proporcional e de suas múltiplas manifestações.

APÊNDICE G – Tarefa para Formação 3 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade

Leia com atenção as duas situações a seguir:
Atenção: Você deve explicar sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos etc.

Situação 1: Prova final



Hoje o professor Francisco divulgou as notas da avaliação final da disciplina de Geometria I na turma de Licenciatura em Matemática. Sabendo que a razão entre a quantidade de aprovados e a quantidade de reprovados é de 20 para 8, a quantidade de reprovados representa que fração da quantidade total de estudantes dessa turma?

Situação 2: Vazão do Rio Amazonas



A vazão média do Rio Amazonas é de 209.000 m^3/s quando chega a sua foz no Oceano Atlântico. Quantos litros de água o Rio Amazonas despeja no oceano a cada hora?

Situação 3: Preço da banana

A tabela abaixo apresenta a quantidade de bananas compradas por dona Socorro na feira da Manaus Moderna e os respectivos preços:

Massa (Kg)	Preço (R$)
2	20
4	40
6	60

A partir dessa tabela:

a) Represente graficamente a relação entre a quantidade de bananas e o preço pago.
b) Descreva algebricamente a relação entre as grandezas.
c) Quanto custaria 7,5 kg de banana?
d) Se dona Socorro pagou R$ 90, quantos kg de banana ela comprou?
e) Essa relação se mantém se houver promoção, como “leve 3kg pelo preço de 2kg”?

1. Resolva as situações por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino).
2. Para resolver os três problemas, é utilizada a mesma forma de pensar ou formas diferentes? Justifique.
3. Crie um problema que envolva o mesmo raciocínio matemático, mas matematicamente distinto dos três problemas dados, e resolva-o. O que leva os quatro problemas a serem distintos?

APÊNDICE H – Análise detalhada da Tarefa para Formação 3 – Parte 1 no âmbito da Proporcionalidade

Com a realização da TpF3, buscou-se ampliar a investigação acerca dos conhecimentos matemáticos especializados mobilizados e/ou desenvolvidos pelos participantes no contexto formativo sobre proporcionalidade, desta vez a partir de três categorias distintas de problemas (Lesh; Post; Behr, 1988): problemas de conversão entre razões, taxas e frações; problemas envolvendo unidades de medida e números; e problemas de translação entre diferentes sistemas de representação. O objetivo foi analisar como os licenciandos mobilizam o pensamento proporcional quando precisam operar com mudanças de registro, explicitar o significado das unidades envolvidas e reinterpretar uma mesma relação proporcional sob diferentes formas.

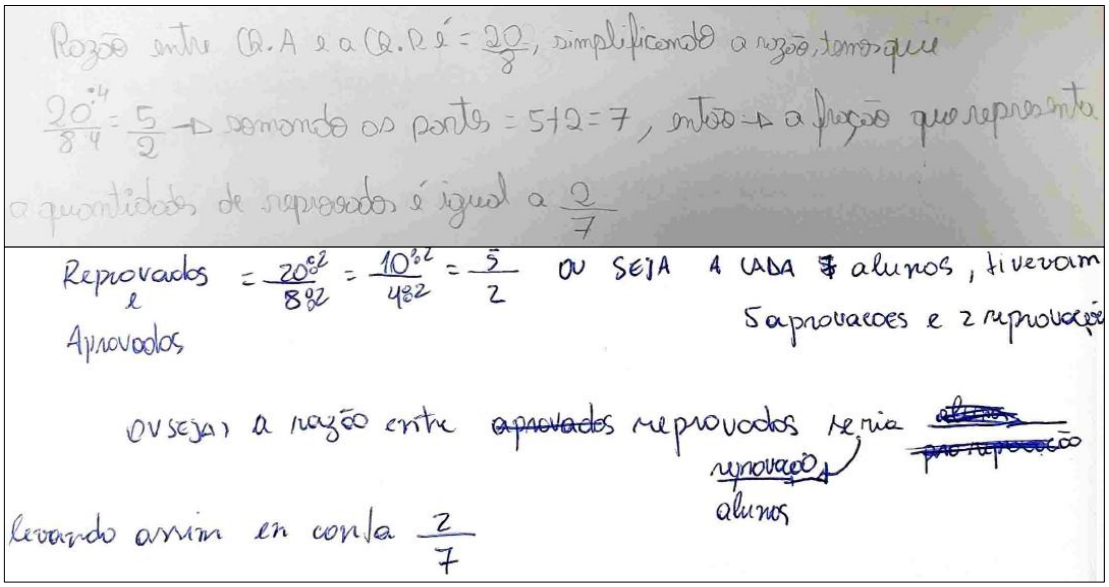
Para a organização dos resultados, adotou-se procedimento análogo ao das tarefas anteriores: inicialmente, são examinadas as resoluções individuais dos participantes para cada uma das três situações; em seguida, analisa-se a resposta sistematizada pelo grupo; e, posteriormente, discutem-se as respostas às questões reflexivas da tarefa. As análises fundamentam-se nos dados produzidos ao longo das etapas da Teoria das Situações Didáticas, contemplando as produções escritas individuais (etapa da ação), as explicações orais apresentadas durante a socialização das estratégias (etapa da formulação) e a solução construída coletivamente (etapa da validação). Ao final, apresenta-se um quadro-síntese com os conhecimentos evidenciados pelos participantes, de modo a oferecer uma visão integrada dos aspectos do MTSK mobilizados na TpF3.

Pergunta 1

A **Situação 1** pertence à categoria *problema de conversão* (Lesh; Post; Behr, 1988) e sua resolução envolve a mobilização de conhecimentos de estratégias relacionadas a razões parte-parte e a razões parte-todo (Noelting, 1980), que caracterizam, respectivamente, as relações de primeira ordem e de segunda ordem (Spinillo, 1994). Nesse sentido, os participantes A e E adotaram procedimentos semelhantes (Figura H1): inicialmente, simplificaram a razão entre aprovados e reprovados (parte-parte) e, em seguida, reorganizaram essa informação para

estabelecer uma razão parte-todo, relacionando a quantidade de reprovados ao total de alunos (KoT – Procedimentos).

Figura H1 – Solução dos participantes E e A à Situação 1, respectivamente.



Fonte: dados da pesquisa.

Destaca-se, na fala do participante A, a mobilização de conhecimentos associados ao KoT – Registros de Representação, ao transitar entre a representação fracionária e a linguagem natural:

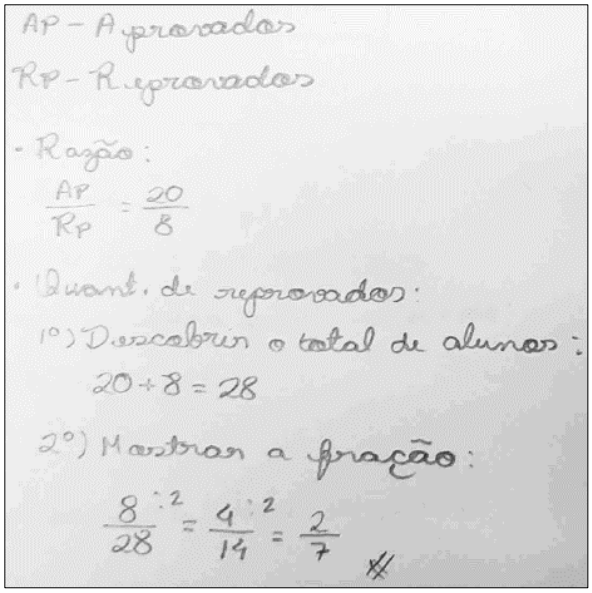
> **Participante (C):** *[...] Aí eu simplifiquei, aí deu 5 sobre 2, ou seja,* ***a cada 7 alunos teve 5 aprovados e 2 reprovados*** *[grifo nosso]. Ou seja, para eu representar a quantidade de reprovados, eu tenho que colocar uma razão entre reprovados e alunos. Ou seja, dois sobre sete?*

Ao afirmar “a cada 7 alunos, 5 aprovados e 2 reprovados”, o participante converte a razão simbólica 5/2 em uma descrição verbal estruturada, explicitando a composição do todo. Em seguida, ao questionar se deveria representar os reprovados por “dois sobre sete”, evidencia a consciência de que a situação exige a reformulação da razão original (parte-parte) para uma razão parte-todo. Tal movimento revela domínio na articulação entre diferentes registros semióticos e compreensão do significado de cada uma das razões.

A participante B não apresentou resolução para a situação, afirmando não saber por onde iniciar, o que indica dificuldades em reconhecer a estrutura proporcional do problema e em identificar quais relações deveriam ser estabelecidas para sua resolução.

A participante C, cuja solução foi a escolhida pelo grupo para apresentar na etapa da validação, partiu da razão entre a quantidade de aprovados e a quantidade de reprovados e somou os valores correspondentes a cada uma dessas partes para determinar o todo, isto é, a quantidade total de alunos representada na razão (KoT – Procedimentos). Assim, ao considerar os valores 20 e 8, obteve o total de 28 e passou a representar a razão entre reprovados e o total por meio da fração 8/28. Em seguida, procedeu à simplificação dessa fração até chegar à mesma razão encontrada pelos participantes A e E (Figura H2).

Figura H2 – Solução da participante C à Situação 1.



Fonte: dados da pesquisa.

Observa-se que os participantes A, C e E mobilizam essencialmente os mesmos conhecimentos matemáticos para resolver a Situação 1, diferenciando-se, sobretudo, pela ordem dos procedimentos adotados. Enquanto os participantes A e E simplificam inicialmente a razão parte-parte para, em seguida, convertê-la em uma razão parte-todo, a participante C realiza primeiramente a conversão para a razão parte-todo e apenas depois procede à simplificação da fração obtida. Tais diferenças não indicam compreensões matemáticas distintas, mas modos diversos de organizar os procedimentos envolvidos na resolução do problema.

Destaca-se, entretanto, que apenas o participante A explicita a razão construída por meio da linguagem natural, ao expressar verbalmente o significado da razão “5 para 2” como “a cada 7 alunos, 5 aprovados e 2 reprovados”, o que evidencia a mobilização de conhecimentos associados ao KoT – Registros de Representação,

ao articular o registro simbólico ao registro discursivo. Além disso, tal explicitação sugere o reconhecimento do caráter relacional da razão, uma vez que o participante não interpreta os valores como quantidades absolutas, mas como uma relação que se mantém independentemente do total de alunos considerado, o que constitui um aspecto central do pensamento proporcional (KoT – Definição, propriedades e fundamentos).

A **Situação 2** insere-se na categoria de problemas envolvendo unidades de medida e números (Lesh; Post; Behr, 1988), pois, embora envolva uma relação proporcional, exige dos participantes a articulação entre grandezas expressas em diferentes unidades de volume e de tempo. A resolução demanda o reconhecimento da vazão como uma taxa, bem como a realização de conversões adequadas entre metros cúbicos e litros e entre segundos e horas. Assim, o pensamento proporcional mobilizado nessa situação ultrapassa a manipulação algorítmica, envolvendo a compreensão do significado das unidades associadas às grandezas e das relações entre elas, o que se relaciona principalmente ao KoT – Fenomenologia e aplicações e ao KoT – Procedimentos.

A análise das resoluções evidenciou que as principais dificuldades apresentadas pelos participantes não estiveram diretamente associadas à estrutura proporcional do problema, mas a conhecimentos prévios relacionados às grandezas envolvidas e às conversões de unidades. Observou-se que os participantes demonstraram desconhecimento do conceito de vazão, bem como dificuldades em realizar conversões entre unidades de volume (de metros cúbicos para litros) e de tempo (de segundos para horas).

Em particular, foi necessário explicitar que 1 litro corresponde a 1 dm^3 e que 1 m^3 equivale a 1.000 dm^3 para que pudessem prosseguir na resolução. Após essas intervenções, os participantes conseguiram resolver a situação sem dificuldades adicionais, o que sugere que os obstáculos enfrentados estavam mais relacionados à ausência ou fragilidade de conhecimentos conceituais prévios sobre unidades de medida e grandezas físicas do que a limitações no uso do pensamento proporcional propriamente dito.

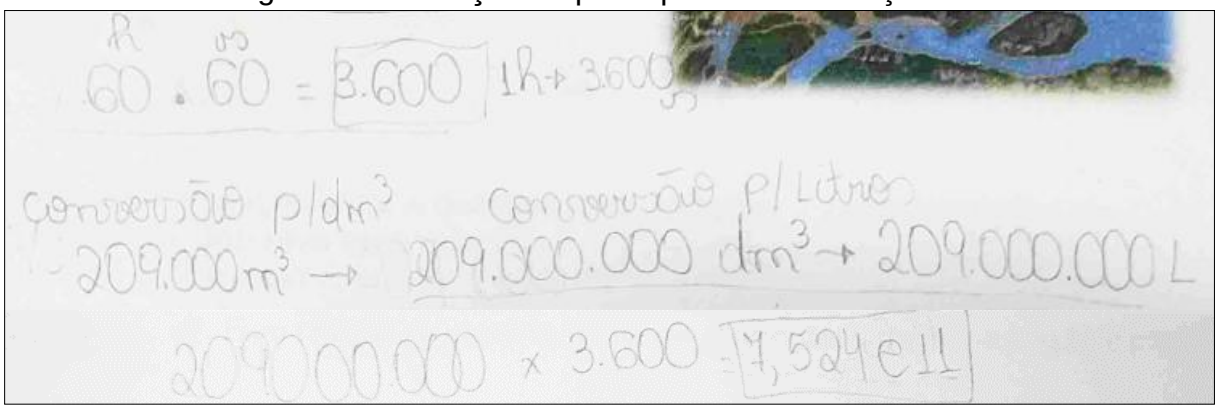
Essas dificuldades observadas encontram respaldo na literatura recente sobre o ensino e a aprendizagem de unidades de medida. Oliveira (2025), ao investigar estudantes do ensino fundamental, médio e superior (de cursos de engenharia), aponta que fragilidades conceituais relacionadas às unidades de medida e às

conversões persistem ao longo da trajetória escolar e acadêmica. Segundo o autor, alguns estudantes universitários participantes de sua pesquisa afirmaram que dúvidas sobre unidades de medida, oriundas de uma aprendizagem insuficiente na educação básica, continuam impactando seu desempenho em disciplinas da graduação.

As respostas dos discentes destacam dificuldades em compreender o significado das unidades, o contexto de uso e os procedimentos de conversão, elementos também evidenciados no diário de campo desta pesquisa, quando os participantes demonstraram desconhecimento do conceito de vazão, dificuldades na conversão entre unidades de volume e de tempo e necessidade de intervenções explícitas para prosseguir na resolução. Nesse sentido, os dados sugerem que os obstáculos enfrentados na Situação 2 estão alinhados a dificuldades amplamente documentadas na literatura, associadas a lacunas conceituais sobre grandezas e unidades, e não necessariamente a limitações no uso do pensamento proporcional em si.

Prosseguindo para a análise das soluções, a participante B iniciou determinando a equivalência entre unidades de tempo, identificando que 1 hora corresponde a 3.600 segundos, informação que manteve como referência para a resolução. Em seguida, realizou a conversão da vazão de 209.000 m^3/s para 209.000.000 dm^3/s e, posteriormente, para litros por segundo. Para calcular o volume de água despejado pelo Rio Amazonas ao longo de uma hora, a participante multiplicou 209.000.000 litros pelo total de segundos correspondentes a uma hora (3.600 s), obtendo o valor de $7{,}524 \times 10^{11}$ litros por hora (Figura H3).

Figura H3 – Solução da participante B à Situação 2.



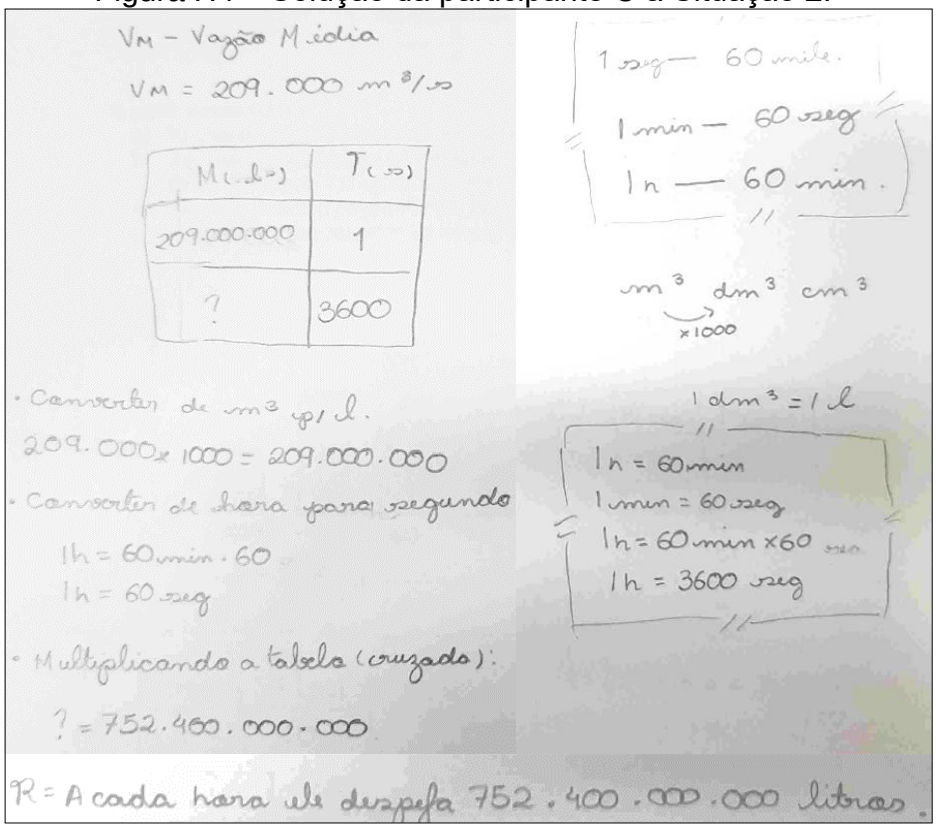
Fonte: dados da pesquisa.

Embora o resultado esteja matematicamente correto, a notação utilizada sugere que o cálculo final foi realizado com o auxílio de uma calculadora, aspecto

confirmado pela própria participante em sua fala. Além disso, a participante demonstrou dificuldade em interpretar o valor encontrado, afirmando não saber avaliar sua plausibilidade, apesar de o resultado estar adequado ao contexto do problema. O percurso adotado evidencia a mobilização da multiplicação como estratégia para resolver uma situação de proporcionalidade e do conhecimento de como realizar a conversão entre diferentes unidades de medidas, características do KoT – Procedimentos.

A participante C, segundo sua explicação oral, iniciou a resolução pela conversão de metros cúbicos para litros, multiplicando o valor inicial por 1.000 e obtendo uma vazão de 209.000.000 litros por segundo. Em seguida, reconheceu a necessidade de converter a unidade de tempo de segundos para horas e, ao considerar que 1 hora corresponde a 60 minutos e que 1 minuto equivale a 60 segundos, concluiu que 1 hora possui 3.600 segundos. Para organizar o processo de resolução, a participante construiu uma tabela (KoT – Registros de representação) relacionando as grandezas envolvidas (litros e tempo) e seus respectivos valores, a partir da qual utilizou a *multiplicação cruzada* (regra de três) para determinar o valor solicitado, encontrando uma vazão de 752.400.000.000 litros por hora (Figura H4).

Figura H4 – Solução da participante C à Situação 2.



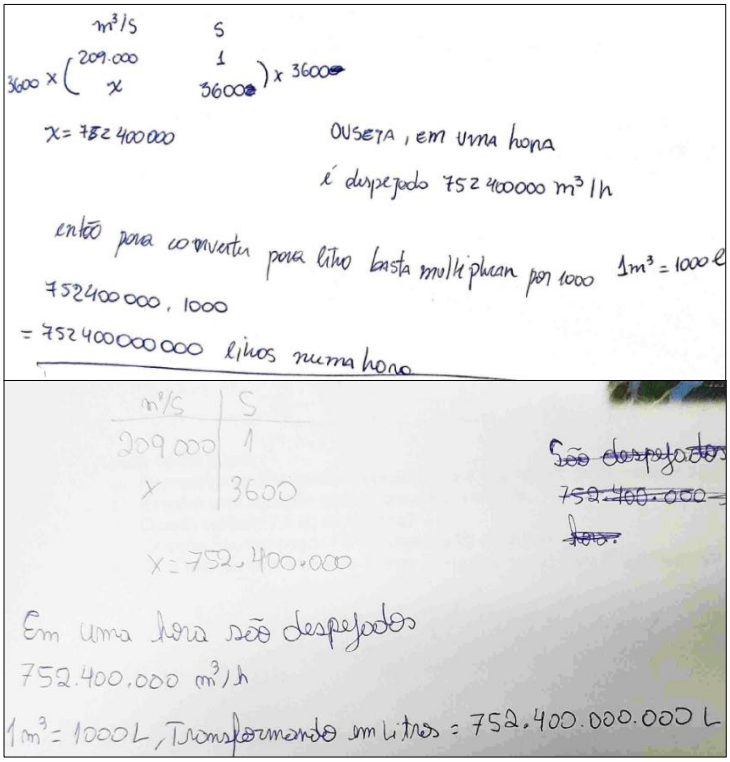
Fonte: dados da pesquisa.

A participante também recorreu a uma representação esquemática das unidades de volume, utilizando setas e a indicação do fator multiplicativo para explicitar a conversão entre metros cúbicos e litros, mobilizando o KoT – Registros de Representação como apoio às conversões necessárias.

Os participantes A e E iniciaram a resolução pela conversão da unidade de medida da vazão de metros cúbicos por segundo para metros cúbicos por hora, sendo que o participante A recorreu à *estratégia escalar* e o participante E à *regra de três*, ambos conhecimentos relacionados ao KoT – Procedimentos, obtendo uma vazão de 752.400.000 m³/h. Além disso, antes de realizarem os cálculos, ambos organizaram as grandezas e seus respectivos valores na estrutura de uma tabela, com o objetivo de explicitar as relações estabelecidas entre elas (KoT – Registros de Representação).

De posse da informação de que 1 m³ equivale a 1.000 litros, ambos aplicaram um fator multiplicativo ao valor obtido, determinando a quantidade de litros de água despejada na foz do Rio Amazonas em uma hora (Figura H5), o que evidencia novamente a mobilização do uso da multiplicação na resolução de problemas envolvendo proporcionalidade (KoT – Procedimentos). A resolução do participante E foi a escolhida pelo grupo para apresentação na etapa de validação.

Figura H5 – Solução dos participantes A e E à Situação 2, respectivamente.



Fonte: dados da pesquisa.

A análise das resoluções evidenciou uma fragilidade recorrente nos conhecimentos dos participantes no que se refere à compreensão e à manipulação de unidades de medida, especialmente no controle do significado das grandezas envolvidas. Embora os participantes tenham mobilizado corretamente procedimentos matemáticos, como conversões e multiplicações, observou-se, em diversos momentos, uma dissociação entre o tratamento numérico e o significado dimensional dos resultados obtidos. Exemplos disso incluem a duplicação indevida da dimensão tempo ao expressar resultados do tipo “em uma hora” acompanhados da unidade m^3/h, a omissão da unidade de taxa ao final de conversões, resultando em valores que representam volume e não vazão, e registros como “1 hora = 60 min × 60 seg”, nos quais unidades incompatíveis são combinadas sem explicitação do resultado dimensional correto.

Esses indícios sugerem que as dificuldades observadas não se restringem à execução de procedimentos, mas estão associadas a uma compreensão conceitual interpretativa insuficiente das unidades de medida e das relações entre grandezas (Oliveira, 2025), corroborando a ideia de que o domínio procedimental, quando não articulado ao controle semântico das unidades, pode conduzir a interpretações matematicamente imprecisas.

A **Situação 3** envolve a exploração de uma relação proporcional direta entre a quantidade de bananas adquiridas e o preço pago, exigindo dos participantes a tradução dessa relação entre diferentes formas de representação. Ao longo dos itens propostos, são mobilizadas representações tabulares, gráficas, algébricas e verbais, bem como procedimentos de cálculo para determinar valores não explicitados na tabela inicial.

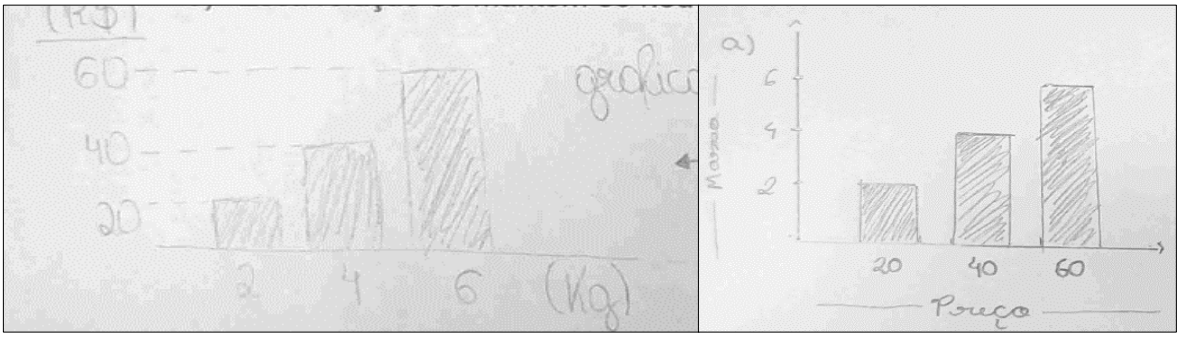
Desse modo, a situação demanda a coordenação de registros distintos, preservando o significado da proporcionalidade estabelecida, além de favorecer a identificação da taxa constante que relaciona as grandezas envolvidas. Do ponto de vista do conhecimento matemático especializado, destacam-se conhecimentos associados ao KoT – Registros de Representação, pela necessidade de transitar entre diferentes formas de expressar a mesma relação, e ao KoT – Procedimentos, ao recorrer a estratégias multiplicativas e funcionais para resolver as questões propostas.

Com respeito ao **item a)**, observou-se que as participantes B e C optaram pela construção de gráficos de colunas para representar a relação entre a massa de bananas e o preço pago (Figura H6). Embora essa representação preserve a

correspondência entre os valores apresentados na tabela, ela não se mostra a mais adequada para expressar a natureza da relação proposta, uma vez que se trata de uma relação funcional, contínua e proporcional entre grandezas. O uso do gráfico de colunas, mais comumente associado à comparação de dados discretos ou categóricos, dificulta a visualização da covariância entre as grandezas e da invariância da razão, características centrais das relações proporcionais.

Esse fato evidencia uma fragilidade no conhecimento relacionado aos registros de representação (KoT – Registros de Representação), particularmente no que diz respeito à escolha do tipo de representação gráfica mais adequado ao fenômeno em análise, ainda que as participantes demonstrem compreender a existência de uma relação entre quantidade e preço.

Figura H6 – Solução das participantes B e C ao item a) Situação 3, respectivamente.



Fonte: dados da pesquisa.

A escolha do tipo de gráfico constitui uma decisão central no processo de representação de dados, pois está diretamente relacionada à clareza comunicativa e à interpretação da relação entre as variáveis envolvidas. Conforme apontam Guimarães, Gitirana e Roazzi (2001), organizar os dados em um tipo de gráfico adequado favorece uma comunicação mais eficaz das informações, enquanto escolhas inadequadas podem obscurecer relações importantes.

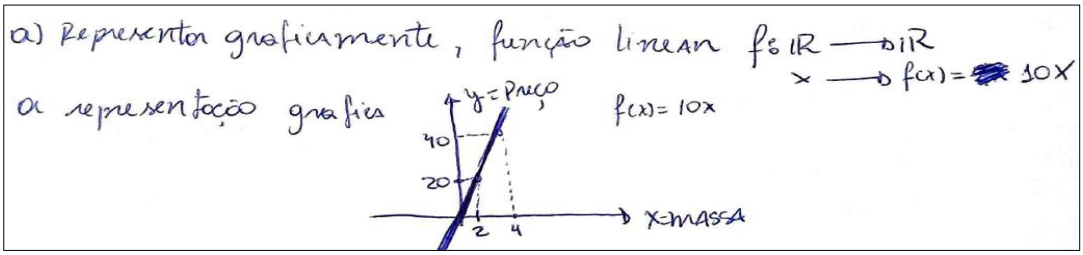
Do mesmo modo, Fernandes, Batanero e Gea (2019) destacam que o tipo de gráfico deve ser selecionado em função da natureza da variável em estudo, uma vez que essa escolha condiciona o êxito das etapas posteriores de análise e interpretação dos dados. Nesse sentido, a utilização de gráficos de colunas para representar uma relação proporcional contínua, como na Situação 3, pode indicar dificuldades na articulação entre o tipo de variável envolvida e o registro de representação mais apropriado.

O participante E não construiu explicitamente o gráfico solicitado, optando por descrevê-lo em linguagem natural, ao afirmar que se tratava de uma reta que passaria pela origem e pelos pontos (2,20), (4,40) e (6,60). Tal descrição é matematicamente coerente com a relação estabelecida entre as grandezas e dá indícios de que o participante reconhece propriedades fundamentais de uma relação diretamente proporcional. Contudo, a ausência da representação gráfica propriamente dita limita a análise do conhecimento mobilizado, uma vez que não permite observar aspectos essenciais do registro gráfico, como a escolha das escalas, a continuidade da reta, a organização dos eixos e a visualização da covariação entre as grandezas. Dessa forma, embora a resposta evidencie um entendimento conceitual da relação, ela restringe a investigação do KoT – Registros de Representação, na medida em que a translação efetiva para o registro gráfico não se concretiza.

O participante A, cuja solução foi a escolhida para ser apresentada na etapa da validação, mobilizou conhecimentos matemáticos de natureza conceitual e formal ao representar a relação entre massa de bananas e preço pago por meio de uma função linear, explicitando a lei de associação f(x)=10x e identificando-a como uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (Figura H7). Sua fala evidencia domínio da linguagem funcional, ao reconhecer o preço como variável dependente da massa e ao utilizar notações próprias da teoria de funções, o que revela a compreensão da estrutura funcional subjacente à relação proporcional, para além de um tratamento meramente aritmético. Nesse sentido, destacam-se conhecimentos associados ao KoT – Registros de Representação, uma vez que o participante articula a expressão algébrica, a representação gráfica e a interpretação verbal da relação entre as grandezas.

> **Participante (A):** *Eu representei graficamente uma função linear que vai de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, onde a lei de associação é 10x, que é uma função linear. Então, tecnicamente eu botei o preço em função da massa, então a minha f de x seria 10x. Aí eu representei aqui graficamente.*

Figura H7 – Solução do participante A ao item a) Situação 3.

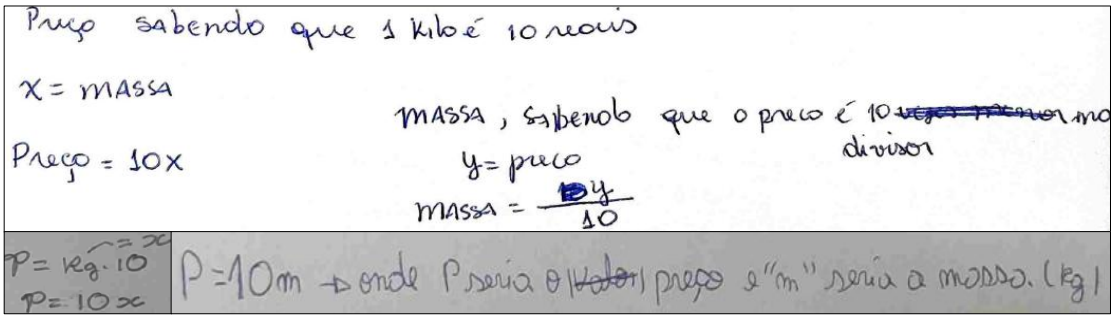


Fonte: dados da pesquisa.

Além disso, ao modelar a situação por meio de uma função linear e reconhecer sua regularidade, o participante demonstra mobilizar conhecimentos vinculados ao KoT – Fenomenologia e aplicações, ao compreender a relação proporcional como um modelo matemático que descreve um fenômeno do cotidiano. A opção por representar a função em um domínio mais amplo do que o exigido pelo contexto – evidenciada pelo prolongamento da reta para o terceiro quadrante – não compromete a identificação da relação proporcional, mas indica uma fragilidade na adequação do modelo matemático às restrições da situação concreta. Tal aspecto foi explorado na etapa de institucionalização, reforçando a importância de articular o tratamento formal das funções às condições impostas pelo fenômeno representado.

No que se refere ao **item b)** da Situação 3, os participantes A, C e E chegaram corretamente a uma expressão algébrica que descreve a relação entre a massa de bananas e o preço pago (Figura H8), ainda que com variações na escolha das letras para representar as variáveis, sendo a resposta deste último escolhida para ser apresentada na etapa da validação. As produções evidenciam a mobilização do entendimento de uma relação funcional proporcional, expressa por meio de uma igualdade do tipo y=10x, em que o coeficiente 10 corresponde ao valor unitário de 1 kg de banana. Esse fator atua como constante de proporcionalidade, articulando diretamente as duas grandezas envolvidas.

Figura H8 – Solução dos participantes A, C e E ao item b) da Situação 3, em sentido anti-horário.



Fonte: dados da pesquisa.

Do ponto de vista do conhecimento matemático especializado, observa-se a mobilização do KoT – Registros de Representação, na passagem do registro tabular para o registro algébrico, bem como do KoT – Procedimentos, ao identificar o valor unitário e utilizá-lo na construção da expressão multiplicativa. Destaca-se, ainda, a produção do participante A, que manipulou algebricamente a expressão obtida, isolando diferentes variáveis e explicitando relações equivalentes, o que indica um

nível mais elaborado de coordenação entre representações algébricas e reforça a compreensão da estrutura funcional da relação estabelecida.

Diferentemente dos demais participantes, a participante B não encontrou uma expressão que descrevesse corretamente a relação de proporcionalidade entre a massa de bananas e o preço pago, registrando a equação $5x^2+4x+20=120$. A própria participante indicou que não testou a validade da expressão e manifestou a percepção de que o resultado poderia estar incorreto. Além disso, durante a etapa de formulação, relatou ter sentido vergonha de apresentar sua resposta aos colegas, o que impossibilitou a verbalização de seu raciocínio e, consequentemente, a identificação do percurso cognitivo que a levou à construção dessa expressão.

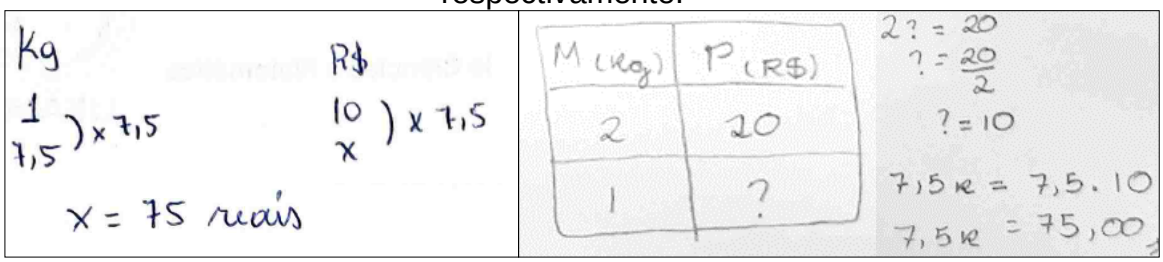
Dessa forma, embora o registro algébrico apresentado não corresponda à relação linear esperada na situação proposta, a ausência de explicitação do processo de elaboração impede uma análise mais aprofundada dos conhecimentos mobilizados, permitindo apenas identificar uma fragilidade na identificação do tipo de relação existente entre as variáveis envolvidas. Esse aspecto será retomado na etapa de institucionalização, quando a natureza da relação funcional e a adequação das representações algébricas serão discutidas coletivamente.

Nos itens c) e d) da Situação 3, os participantes foram convidados a mobilizar seus conhecimentos para resolver problemas que envolvem a mesma relação entre preço e quantidade de bananas, porém a partir de demandas inversas. No item c), mais próximo do uso direto da razão, solicitou-se a determinação do valor a ser pago por uma quantidade não inteira de banana, tomando como referência uma relação proporcional previamente estabelecida. Já no item d), que exige inversão da relação ou um pensamento funcional mais explícito (Lamon, 2012), a tarefa consistia em identificar a quantidade de banana correspondente a um valor monetário dado, invertendo, portanto, o sentido da relação trabalhada no item anterior. Embora ambos os itens se apoiem na mesma estrutura proporcional e possam ser resolvidos a partir da expressão algébrica obtida no item b), as resoluções observadas revelam diferentes formas de abordagem e distintos modos de mobilização dos conhecimentos relacionados à proporcionalidade, o que será analisado a seguir.

Com respeito ao item c) da Situação 3, o participante A utilizou a *estratégia escalar* para determinar quanto custaria 7,5 kg de banana a partir do valor unitário, isto é, do preço de 1 kg de banana, encontrando corretamente o valor de R$ 75,00. A participante C, por sua vez, construiu uma tabela para relacionar as grandezas (KoT

– Registro de representação) e afirmou não ter utilizado a expressão algébrica encontrada por ela e ter mobilizado a estratégia de *busca pelo valor unitário* – nomeada pela própria participante, demonstrando estar se apropriando das estratégias discutidas durantes as TpFs –, ao identificar que 1 kg de banana custa R$ 10,00 e, em seguida, multiplicar esse valor por 7,5 para obter o preço solicitado (Figura H9). O que a participante não explicitou, mas que foi discutido posteriormente na etapa de institucionalização, é que, ao proceder dessa forma, ela estabeleceu uma relação funcional entre as duas variáveis, sendo esse procedimento equivalente ao uso da expressão algébrica por ela mesma construída.

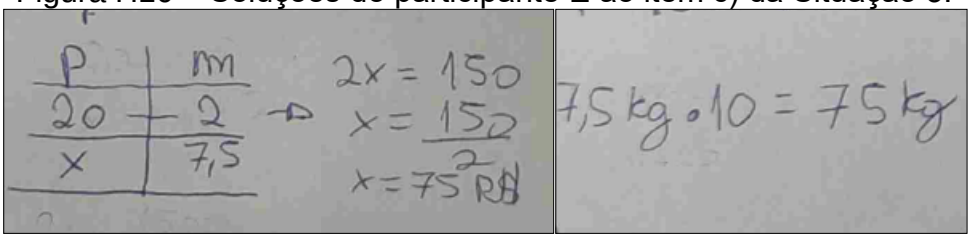
Figura H9 – Solução dos participantes A e C ao item c) da Situação 3, respectivamente.



Fonte: dados da pesquisa.

O participante E resolveu a situação de duas maneiras distintas (Figura H10): inicialmente, montou uma tabela para relacionar as quantidades e, a partir dela, uma proporção entre o valor de 2 kg de banana e o valor correspondente a 7,5 kg, resolvendo-a por meio da *regra de três*; em seguida, substituiu o valor de 7,5 kg na expressão algébrica encontrada no item b). Em ambos os procedimentos, chegou corretamente ao resultado de R$ 75,00, o que evidencia flexibilidade no uso de diferentes estratégias matemáticas para resolver um mesmo problema.

Figura H10 – Soluções do participante E ao item c) da Situação 3.

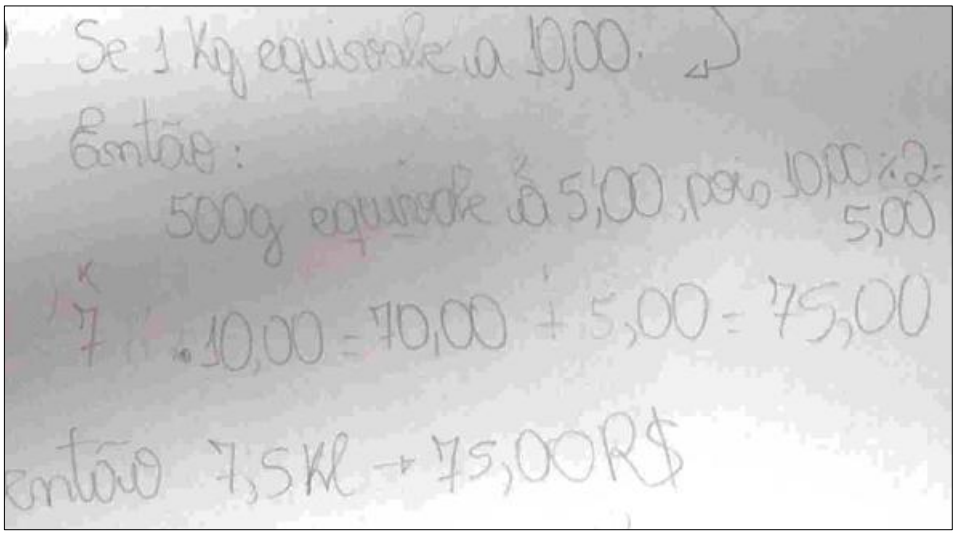


Fonte: dados da pesquisa.

A participante B procedeu de forma distinta dos demais colegas (Figura H11), o que pode estar relacionado ao fato de não ter estabelecido previamente a relação funcional solicitada no item b). Ainda assim, a participante mobilizou conhecimentos

associados à proporcionalidade ao dividir o preço de 2 kg de banana por 2, a fim de determinar o custo de 1 kg, o que também pode ser caracterizado como uma *estratégia escalar* (KoT – Procedimentos), ainda que não organizada formalmente em uma tabela. Posteriormente, utilizou o mesmo raciocínio para calcular o preço de 500 gramas de banana e, em seguida, multiplicou o valor de R$ 10,00 por 7, somando ao preço correspondente a 500 gramas para encontrar o valor total solicitado. Em termos numéricos, seu procedimento pode ser representado por (7 + 0,5) x 10 = 75.

Figura H11 – Solução da participante B ao item c) da Situação 3.

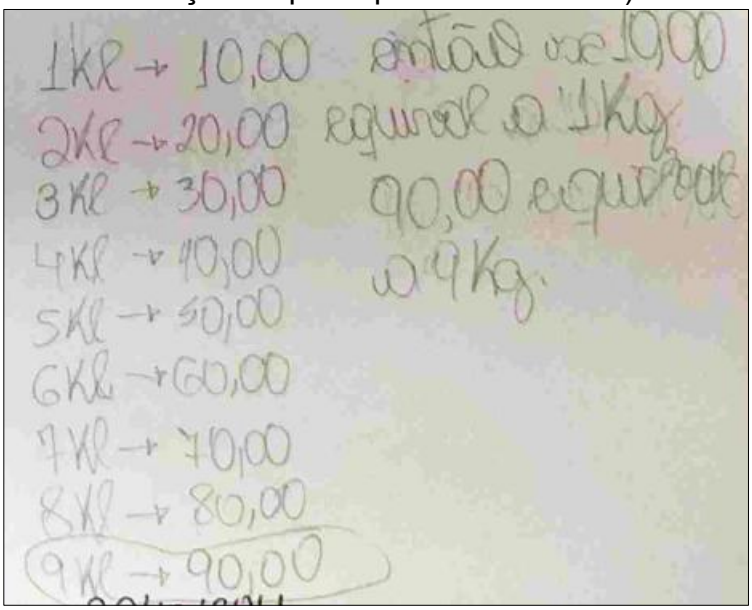


Fonte: dados da pesquisa.

Embora essa não seja a forma mais rápida ou formal de obtenção do resultado, a participante demonstrou um pensamento proporcional eficiente, ainda que mais intuitivo e menos formalizado, mobilizando o raciocínio multiplicativo, característico de problemas que envolvem proporcionalidade, além de que a sua solução foi a escolhida para ser apresentada na etapa da validação.

No item d) da Situação 3, o participante A novamente utilizou a *estratégia escalar* para determinar a quantidade solicitada, multiplicando o valor inicial de uma das grandezas pelo mesmo fator escalar aplicado à outra. Os participantes C (cuja solução foi a apresentada na etapa da validação) e E construíram uma tabela (KoT – Registro de Representação), relacionando o valor unitário ao valor correspondente à quantia de R$ 90,00, o qual foi determinado por meio da *regra de três*. A participante B, por sua vez, voltou a utilizar a informação de que 1 kg de banana equivale a R$ 10,00 e procedeu multiplicando sucessivamente o preço correspondente a cada quilograma até identificar a quantidade de quilos equivalente a R$ 90,00 (Figura H12).

Figura H12 – Solução da participante B ao item d) da Situação 3.



Fonte: dados da pesquisa.

O procedimento adotado pela participante B sugere, além da preferência por estratégias iterativas, uma dificuldade em generalizar a relação proporcional. Ao tratar cada caso de forma isolada, multiplicando sucessivamente o valor correspondente a 1 kg de banana até atingir o montante desejado, a participante não recorre a uma expressão algébrica que sintetize a regularidade observada. Tal dificuldade é coerente com seu desempenho no item b), no qual não conseguiu encontrar corretamente a expressão que descrevia a relação entre preço e quantidade. Esses indícios apontam para uma compreensão ainda localizada da proporcionalidade, na qual a regularidade é percebida, mas não formalizada como uma lei geral expressa simbolicamente (fragilidade nas categorias KoT – Registros de representação e KoT – Definição, propriedades e fundamentos).

Dessa forma, a análise das soluções aos itens c) e d) da Situação 3 revela que, embora os participantes tenham construído corretamente a expressão algébrica que descreve a relação entre massa e preço no item b), essa representação não foi mobilizada como ferramenta para a resolução dos problemas subsequentes, prevalecendo o uso de estratégias numéricas e proporcionais. Tal comportamento indica que a produção de uma expressão algébrica não implica, necessariamente, sua utilização funcional na resolução de problemas, sugerindo uma compreensão da álgebra como um objeto formal, dissociado das estratégias aritméticas já consolidadas. Evidências semelhantes são apontadas na literatura, que destaca dificuldades em operar com expressões algébricas em contextos de proporção

associadas a fragilidades tanto no conhecimento algébrico quanto no numérico (Costa; Allevato, 2015).

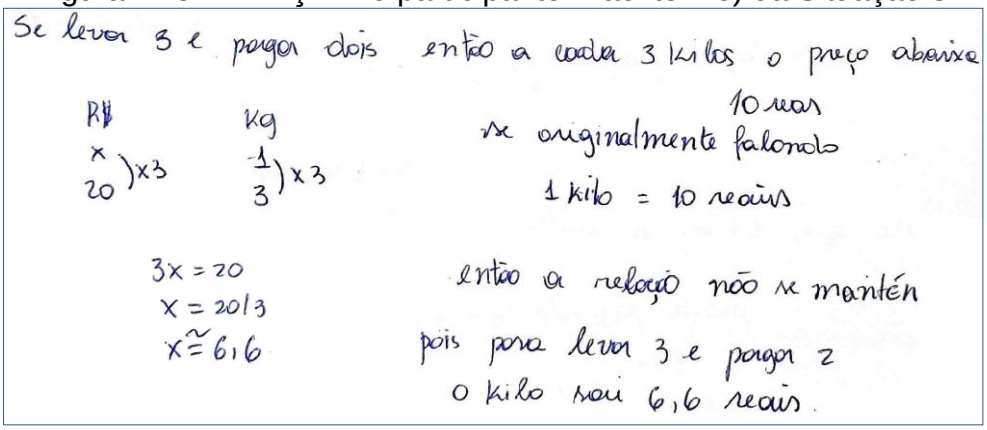
Esse fato evidencia pouca familiaridade com a representação algébrica como forma de expressar e operar relações proporcionais, bem como fragilidades na coordenação entre diferentes registros de representação e na atribuição de significado operacional às expressões algébricas. Assim, mesmo em situações que favorecem uma abordagem algébrico-funcional, o raciocínio dos participantes permanece ancorado predominantemente na proporcionalidade aritmética, dificultando o reconhecimento da função linear como uma manifestação da fenomenologia da proporcionalidade.

No item e) da Situação 3, esperava-se que os participantes mobilizassem o conhecimento relativo à invariância da razão em uma relação proporcional, isto é, a compreensão de que, em situações proporcionais, a razão entre as grandezas envolvidas permanece constante. No entanto, tal propriedade não se mantém em situações de promoção, como a apresentada no enunciado, uma vez que o valor a ser pago não varia de forma linear em relação à quantidade adquirida.

Observa-se que a situação proposta não induz os participantes a um erro de proporcionalidade, mas cria condições para que se evidencie a aplicação indevida de esquemas proporcionais previamente consolidados. Ao confrontarem o resultado obtido com o contexto da promoção apresentada, os participantes são levados a perceber que a invariância da razão, característica fundamental das relações proporcionais, não se mantém nessa situação. Dessa forma, o item e) atua como um elemento de problematização conceitual, favorecendo a reflexão sobre os limites de validade da proporcionalidade e explicitando processos de supergeneralização.

Dito isso, observa-se que todos os participantes perceberam que a relação proporcional não se mantém quando o contexto é alterado para uma situação de promoção do tipo “leve 3 pelo preço de 2” (KoT – Fenomenologia e aplicações). O participante A utilizou a estratégia de *busca pelo valor unitário* para determinar a razão correspondente à nova relação, na qual 3 quilos de banana custariam R$ 20,00, e a comparou com a razão unitária da relação inicial (KoT – Procedimentos) (Figura H13). Ao estabelecer essa comparação entre as razões antes e depois da promoção, o participante mobiliza explicitamente o princípio da invariância da razão, utilizando-o como critério para decidir sobre a manutenção, ou não, da relação proporcional (KoT – Definição, propriedades e fundamentos).

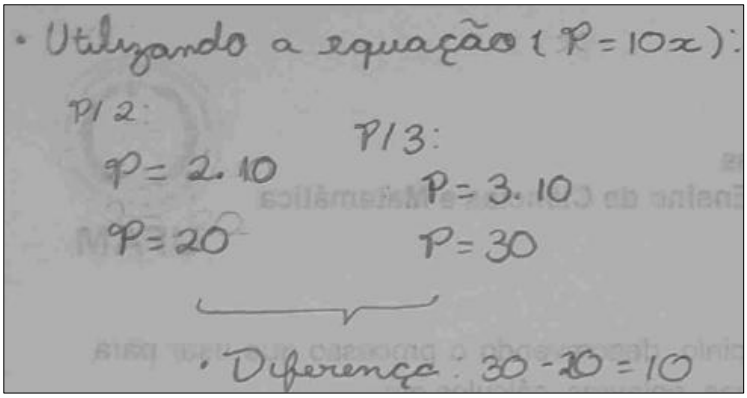
Figura H13 – Solução do participante A ao item e) da Situação 3.



Fonte: dados da pesquisa.

A solução da participante C foi a escolhida pelo grupo para ser apresentada na etapa da validação, ela recorreu à expressão encontrada por ela no item b), realizando as substituições necessárias para determinar os valores correspondentes a 2 kg e a 3 kg de banana, e identificou uma diferença de R$ 10,00 entre esses valores. A partir dessa constatação, concluiu que a relação proporcional não se mantém, uma vez que, no contexto da promoção, não há diferença de preço entre essas duas quantidades (Figura H14).

Figura H14 – Solução do participante C ao item e) da Situação 3.



Fonte: dados da pesquisa.

Ao utilizar a expressão algébrica para testar valores e comparar resultados (KoT – Procedimentos), a participante mobiliza a relação funcional entre as grandezas como ferramenta de análise da validade da proporcionalidade no novo contexto, evidenciando uma articulação entre os registros algébrico e numérico (KoT – Registros de representação).

O participante E, embora não tenha recorrido a cálculos, ao afirmar que a proporcionalidade entre as grandezas não se manteria, demonstra compreender que,

em uma relação proporcional, a razão entre grandezas correspondentes deve permanecer constante, e que a promoção rompe esse invariante. Sua resposta sugere a mobilização de um conhecimento conceitual sobre proporcionalidade, dissociado de procedimentos algorítmicos (KoT – Definição, propriedades e fundamentos). Por sua vez, ainda que não tenha desenvolvido plenamente seu raciocínio, a participante B identifica um elemento central da situação, a igualdade de preço para quantidades distintas de banana, o que indica uma compreensão intuitiva de que a invariância da razão, característica das relações proporcionais, não se mantém no contexto da promoção (KoT – Fenomenologia e aplicações).

De maneira geral, observa-se que o item e) favoreceu a mobilização do conhecimento relacionado à invariância da razão como critério definidor de uma relação proporcional. As diferentes estratégias adotadas, que variam entre comparações numéricas, uso da expressão algébrica e argumentos conceituais sem apoio em cálculos, evidenciam distintos níveis de formalização desse conhecimento, bem como a capacidade dos participantes de reconhecer a inadequação da aplicação automática da proporcionalidade em contextos que rompem tal invariante.

Pergunta 2

Embora as três situações envolvam o pensamento proporcional, as formas de raciocínio e as estratégias requeridas em cada uma delas são distintas. Na Situação 1, o foco recai sobre a conversão entre razões, taxas e frações, mobilizando conhecimento a respeito de relações parte-parte e parte-todo; a Situação 2 traz um problema envolvendo unidades de medida e números, em que o conhecimento da relação entre as unidades é fator determinante na situação; e a Situação 3 trata de um problema de translação, em que os participantes vão ter de transitar entre diferentes sistemas de representação. Reconhecer tais diferenças diz respeito ao KoT na categoria Fenomenologia e aplicações. A seguir, apresentamos as respostas dos participantes para essa questão, sendo a resposta apresentada pelo grupo tendo foco na conversão de unidades necessárias à Situação 2.

> **Participante (A):** *Nessa aqui foi usado pensamentos distintos, pois quase não precisamos usar estratégias de proporcionalidade.*
>
> **Participante (B):** *Acho que eu coloquei só sobre as unidades serem diferentes. Foi só sobre as unidades serem diferentes.*

> **Participante (C):** *Eu coloquei que são diferentes, mas assim, eu acho que eu não justifiquei legal, mas eu coloquei que são diferentes porque em algumas foi preciso realizar a conversão da unidade de medida, mas acho que não é só isso. Porque tipo assim, meio que eu fiz um pouco diferente, eu fiz um pouquinho diferente de cada, assim. Aí eu não sei se tá certo.*

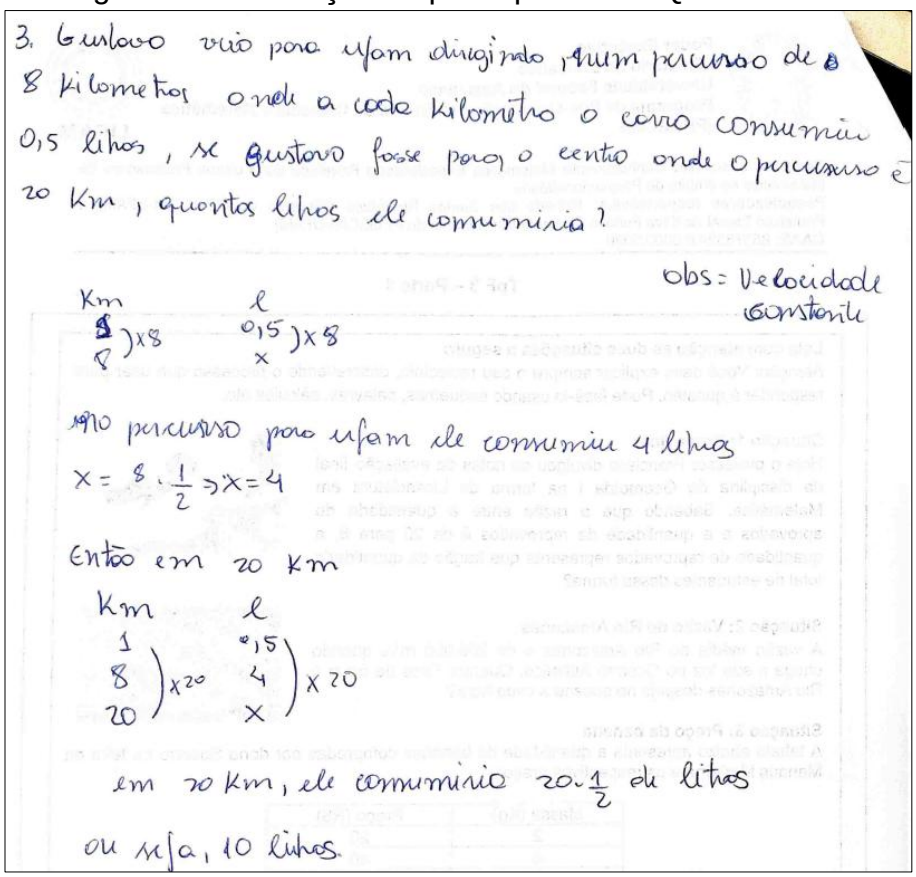
> **Participante (E):** *Nessa 2 eu coloquei que, tipo, na segunda questão a gente teve que lembrar de alguns conceitos, né? Tipo, na conversão e tudo mais. Na terceira também. Na terceira a gente usou mais essa parte, né? De proporcionalidade, tipo, no valor unitário, na C e na D. Mas eu coloquei que foram formas diferentes.*

A análise das respostas à Pergunta 2 evidencia que todos os participantes reconhecem que as três situações não mobilizam exatamente a mesma forma de pensar, indicando uma percepção inicial de que se trata de problemas pertencentes a contextos distintos. No entanto, as justificativas apresentadas permanecem majoritariamente ancoradas nas estratégias utilizadas em cada situação, e não na estrutura matemática subjacente aos problemas. A conversão entre unidades de medida, fortemente associada à Situação 2, é o principal elemento mobilizado pelos participantes para justificar essa diferença, embora não seja explicitado que tal conversão se sustenta em relações proporcionais entre as unidades. Assim, ainda que haja indícios de reconhecimento das diferenças fenomenológicas entre as situações, especialmente no que se refere à Situação 2, observa-se dificuldade em explicitar essas diferenças em termos das classes de problemas do pensamento proporcional. Esse resultado sugere que os participantes identificam variações no “modo de fazer”, mas ainda não articulam de forma explícita o tipo de relação proporcional envolvida em cada situação, o que caracteriza um conhecimento situado no âmbito do KoT – Fenomenologia e aplicações, porém ainda pouco formalizado.

Pergunta 3

A Pergunta 3 solicitava a criação de um problema matematicamente distinto dos três apresentados, mas que envolvesse o mesmo tipo de pensamento, o proporcional. Para isso, era necessário reconhecer as características estruturais das diferentes classes de problemas trabalhadas ao longo das TpF e, a partir dessa compreensão, formular uma nova situação pertencente a uma classe distinta. No entanto, apenas o participante A conseguiu elaborar um problema, o qual pertence à classe de *problemas de valor omisso* e foi resolvido por ele por meio de uma *estratégia escalar* (Figura H15).

Figura H15 – Solução do participante A à Questão 3.



Fonte: dados da pesquisa.

Observa-se, assim, que, mesmo após a exploração de diferentes tipos de problemas e das etapas de institucionalização em que tais classes foram explicitamente discutidas, o problema criado remete novamente à classe com a qual os participantes demonstram maior familiaridade. Esse resultado sugere que, embora os participantes reconheçam diferenças entre os tipos de problemas quando estes lhes são apresentados, ainda não se apropriaram de forma sólida das demais classes como organizadoras conceituais do pensamento proporcional. Tal dificuldade indica uma apropriação ainda incipiente do conhecimento relacionado ao KoT – Fenomenologia e aplicações, especialmente no que diz respeito à identificação, diferenciação e mobilização consciente das distintas estruturas de problemas proporcionais.

No Quadro H1, sintetizamos os conhecimentos manifestados por todos os participantes durante a resolução da Tarefa, oferecendo, dessa forma, um panorama geral.

Quadro H1 – Conhecimento revelado pelos participantes em relação à problemas de conversão, de unidades de medida e números e de translação no âmbito da proporcionalidade.

CATEGORIA	DESCRITOR	PARTICIPANTES
KoT – Definição, propriedades e fundamentos	Reconhecer a razão como uma relação entre grandezas, e não como quantidade absoluta	A
	Reconhecer a invariância da razão como critério definidor de uma relação proporcional	A, B, C e E
KoT - Procedimentos	Usar a *estratégia escalar* para resolver problemas de proporcionalidade	A e B
	Utilizar a expressão algébrica da relação proporcional como ferramenta para calcular valores correspondentes entre grandezas.	C e E
	Usar a estratégia *busca pelo valor unitário* em problemas de proporcionalidade	A e C
	Usar a *regra de três* para resolver problemas de proporcionalidade	C, E
	Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade	A, B, C e E
	Converter unidades de medidas preservando a relação proporcional entre elas	A, B, C e E
	Converter razões parte-parte em razões parte-todo, preservando a proporcionalidade	A, C e E
	Comparar razões unitárias para verificar a manutenção da proporcionalidade	A
	Construir a expressão algébrica de uma relação proporcional a partir do valor unitário	A, C e E
KoT – Fenomenologia e aplicações	Utilizar a função linear como modelo matemático para descrever fenômenos proporcionais do cotidiano	A
	Distinguir situações proporcionais e não proporcionais	A, B, C e E
	Organização das grandezas e seus respectivos valores em tabelas	A, C e E
	Expressar a razão em linguagem natural	A
KoT – Registros de Representação	Utilizar representações esquemáticas para conversão de unidades com fator multiplicativo	C
	Expressar relações proporcionais por meio de representações gráficas	A
	Expressar relações proporcionais por meio de representações algébricas	A, C e E
	Utilizar a linguagem funcional para representar uma relação proporcional	A

	Coordenar diferentes tipos de representação de uma mesma relação proporcional	A

Fonte: elaborado pela autora.

Analisando o Quadro H1, observa-se que, na TpF3, a mobilização dos conhecimentos relacionados ao pensamento proporcional ocorreu de maneira relativamente mais ampla entre os participantes, embora ainda marcada por assimetrias importantes quanto ao nível de formalização e à articulação entre diferentes registros e subdomínios do KoT. No âmbito do KoT – Definição, propriedades e fundamentos, destaca-se que todos os participantes reconheceram a invariância da razão como critério definidor de uma relação proporcional, especialmente no item que rompia com a proporcionalidade, o que indica um avanço conceitual relevante em relação às tarefas anteriores. Além disso, o participante A evidenciou explicitamente a compreensão da razão como uma relação entre grandezas, e não como quantidade absoluta, reforçando seu domínio do caráter relacional da proporcionalidade.

No que se refere ao KoT – Procedimentos, observa-se uma diversidade de estratégias mobilizadas. Todos os participantes recorreram a multiplicação e divisão como procedimentos básicos, enquanto a estratégia de busca pelo valor unitário foi explicitamente utilizada por A e C, e a estratégia escalar apareceu apenas nas resoluções de A e B. O uso da regra de três manteve-se restrito aos participantes C e E, indicando sua persistência como procedimento preferencial em situações de proporcionalidade. Destaca-se ainda que apenas C e E utilizaram a expressão algébrica da relação proporcional como ferramenta para calcular valores correspondentes, evidenciando que, embora a construção da expressão tenha sido possível para alguns participantes, sua utilização como instrumento de resolução ainda não se consolidou no grupo como um todo. A comparação de razões unitárias como critério para verificar a manutenção da proporcionalidade foi mobilizada exclusivamente por A, reforçando novamente seu domínio procedimental articulado a fundamentos conceituais.

No KoT – Fenomenologia e aplicações, todos os participantes demonstraram ser capazes de distinguir situações proporcionais e não proporcionais, especialmente ao analisar o contexto da promoção, o que evidencia a compreensão de que a proporcionalidade não deve ser aplicada de forma automática. Contudo, apenas o participante A mobilizou explicitamente a função linear como modelo matemático para

descrever fenômenos proporcionais do cotidiano, indicando que a compreensão da proporcionalidade como modelo funcional ainda é incipiente entre os demais.

Quanto aos Registros de Representação, a organização das grandezas em tabelas foi recorrente entre A, C e E, enquanto o uso de representações esquemáticas para conversão de unidades, com explicitação do fator multiplicativo, apareceu apenas na resolução da participante C. A expressão de relações proporcionais por meio de representações algébricas foi mobilizada por A, C e E, mas somente A demonstrou coordenar diferentes tipos de representação — algébrica, gráfica, tabular e linguagem natural — para descrever uma mesma relação proporcional, o que evidencia um nível mais avançado de articulação entre registros.

De modo geral, a TpF3 evidencia avanços importantes na mobilização de conhecimentos relacionados à invariância da razão, à distinção entre contextos proporcionais e não proporcionais e ao uso de múltiplos registros de representação. Entretanto, também revela limites persistentes no uso da expressão algébrica como ferramenta de resolução, na generalização da relação proporcional e no reconhecimento de diferentes tipos de problemas envolvendo proporcionalidade, sugerindo que, apesar das etapas de institucionalização, a apropriação das diversas classes de problemas do pensamento proporcional ainda se encontra em processo de consolidação, com forte predominância de procedimentos familiares e menos formalizados.

Considerações Finais

Essa tarefa buscou investigar os conhecimentos matemáticos especializados mobilizados e/ou desenvolvidos por futuros professores de matemática em um contexto formativo sobre proporcionalidade com foco em três categorias distintas de problemas: problemas de conversão entre razões, taxas e frações; problemas envolvendo unidades de medida e números; e problemas de translação entre diferentes sistemas de representação. A análise das soluções das três situações da TpF3 evidencia que os participantes mobilizaram conhecimentos relevantes do pensamento proporcional, porém de forma desigual e com distintos níveis de formalização, articulação e generalização.

Na Situação 1, que envolvia a conversão entre razão, fração e taxa, os participantes demonstraram ser capazes de transitar entre relações parte–parte e parte–todo, preservando a proporcionalidade. Tal mobilização indica um domínio

procedimental consistente desse tipo de conversão, especialmente por meio de multiplicação, divisão e reorganização das razões. Contudo, apenas o participante A evidenciou explicitamente o caráter relacional da razão, ao tratá-la e expressá-la em palavras como uma relação entre grandezas e não como uma quantidade absoluta.

Na Situação 2, que exigia conversões entre unidades de medida e números, todos os participantes reconheceram a necessidade de realizar conversões para tornar as grandezas comparáveis, mobilizando conhecimentos sobre fatores multiplicativos e relações entre unidades. Entretanto, a análise das resoluções mostra que essas conversões foram frequentemente tratadas como procedimentos técnicos, dissociados de uma compreensão explícita de que tais transformações preservam relações proporcionais. Apenas a participante C evidenciou uma organização mais estruturada dessas relações, ao recorrer a representações esquemáticas que explicitavam os fatores de conversão, indicando maior articulação entre procedimentos e registros de representação.

Já a Situação 3, centrada em um problema de translação, revelou tanto avanços quanto limites importantes na mobilização do pensamento proporcional. Os participantes reconheceram a relação proporcional entre preço e quantidade e, em sua maioria, foram capazes de construir ou identificar a expressão algébrica correspondente. No entanto, a utilização dessa expressão como ferramenta para resolver os diferentes itens da situação mostrou-se restrita a poucos participantes. Predominaram estratégias como busca pelo valor unitário e procedimentos escalares, evidenciando uma relutância em recorrer à expressão algébrica como ferramenta de generalização. Tal comportamento sugere dificuldades na generalização da relação proporcional e na articulação entre o registro algébrico e outros registros, bem como uma preferência por estratégias mais intuitivas e operatórias.

Por outro lado, no item que rompia com a proporcionalidade, todos os participantes reconheceram que a relação proporcional não se mantinha, mobilizando, de forma explícita ou implícita, o princípio da invariância da razão como critério definidor da proporcionalidade. Esse resultado indica um avanço conceitual relevante, na medida em que os participantes não aplicaram automaticamente a proporcionalidade e foram capazes de analisar criticamente o contexto apresentado.

A análise conjunta das respostas às Perguntas 2 e 3 evidencia limites importantes do processo de institucionalização realizado ao longo das TpF no que diz respeito à apropriação das diferentes classes de problemas do pensamento

proporcional. Na Pergunta 2, embora os participantes reconheçam que os três problemas não mobilizam exatamente a mesma forma de pensar, suas justificativas permanecem majoritariamente ancoradas nas estratégias utilizadas ou em aspectos superficiais das situações, como a presença de conversões de unidades de medida, sem explicitar de forma clara as estruturas matemáticas subjacentes que diferenciam as classes de problemas. Já na Pergunta 3, essa dificuldade se torna ainda mais evidente, uma vez que apenas um participante consegue formular um novo problema, e o faz recorrendo novamente à classe de problemas de valor omisso, a mais familiar no contexto escolar.

Os resultados reforçam que o desenvolvimento do pensamento proporcional não se dá apenas pela resolução de tarefas, mas exige um trabalho sistemático de institucionalização que favoreça a explicitação das estruturas matemáticas subjacentes às estratégias utilizadas. Contudo, embora a institucionalização tenha favorecido o reconhecimento pontual de diferenças entre as situações quando estas são apresentadas, ela não foi suficiente para que os participantes se apropriassem das classes de problemas como ferramentas conceituais explícitas para organizar, comprar e produzir situações proporcionais. Assim, observa-se que o conhecimento mobilizado permanece, em grande medida, no nível procedimental ou descritivo, indicando dificuldades na generalização e na utilização consciente dessas classes como ferramentas para analisar, comparar e produzir novas situações-problema, aspecto central do KoT – Fenomenologia e aplicações.

De modo geral, a TpF3 evidenciou que os futuros professores mobilizam conhecimentos relevantes do pensamento proporcional, especialmente no que diz respeito a procedimentos de resolução, reconhecimento de situações proporcionais e uso de estratégias intuitivas como busca pelo valor unitário e estratégia escalar. No entanto, a análise das três situações aponta limites na sistematização desses conhecimentos, sobretudo na generalização das relações proporcionais e na articulação entre diferentes registros de representação, em particular entre o pensamento proporcional e o pensamento algébrico. Embora os participantes reconheçam relações funcionais e, em alguns casos, construam expressões algébricas correspondentes, tais expressões ainda não são plenamente apropriadas como ferramentas matemáticas para resolver e analisar diferentes tipos de problemas. Esses resultados indicam a necessidade de investigações futuras que explorem tarefas formativas explicitamente orientadas ao desenvolvimento de um conhecimento

matemático especializado mais integrado, capaz de articular o pensamento proporcional e o pensamento algébrico de forma consciente, sistemática e funcional, especialmente no que se refere à compreensão das diferentes classes de problemas como organizadoras do pensamento matemático.

ANEXO 1 – Carta de Autorização da Revista Ensino da Matemática em Debate – EMD

São Paulo, 4 de março de 2026

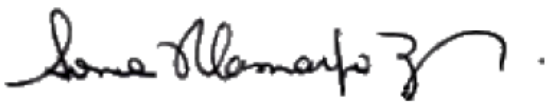
À Ilma Sra. Roberta dos Santos Rodrigues

Assunto: Carta de Autorização para inclusão do referido artigo como parte integrante da dissertação.

Prezada mestranda Roberta dos Santos Rodrigues

Em resposta à sua mensagem de 28/02/2026 venho, na condição de Editora do Periódico "Ensino da Matemática em Debate - EMD (DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.71486", autorizar a inclusão do artigo "Ensino e aprendizagem de proporcionalidade: algumas reflexões a partir de um mapeamento sistemático" como parte integrante de sua dissertação de Mestrado desenvolvida no âmbito do PPGECIM/UFAM .
Sem mais para o momento, despeço-me desejando uma finalização profícua de sua dissertação de Mestrado

Sonia Barbosa Camargo Igliori



ANEXO 2 – Carta de Autorização da Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC

CARTA DE AUTORIZAÇÃO

Eu, **Luis Andrés Castillo Bracho**, Editor da Revista REMATEC (e-ISSN: 2675-1909/ISSN: 1980-3141) tenho ciência e autorizo a inclusão do artigo intitulado *Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de Matemática sobre o tópico proporcionalidade* (DOI: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2025.n53.e2025018.id767), na dissertação de mestrado de Roberta dos Santos Rodrigues, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Amazonas.

Belém-PA, 10 de março de 2026.

gov.br
Documento assinado digitalmente
LUIS ANDRES CASTILLO BRACHO
Data: 10/03/2026 05:48:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Luis Andrés Castillo Bracho
Editor da Revista REMATEC (e-ISSN: 2675-1909/ISSN: 1980-3141)

ANEXO 3 – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Conhecimento Matemático Especializado Revelado por Professores de e que Ensinam Matemática no âmbito de Tópicos Inerentes à Proporcionalidade

Pesquisador: ROBERTA DOS SANTOS RODRIGUES

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 85375324.0.0000.5020

Instituição Proponente: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 7.338.059

ANEXO 4 – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O(A) Sr(a) está sendo convidado a participar do projeto de pesquisa **Conhecimento matemático especializado revelado por futuros professores de matemática no âmbito de proporcionalidade**, cuja pesquisadora responsável é **Roberta dos Santos Rodrigues**.

O objetivo desta pesquisa é **investigar o conhecimento matemático especializado revelado e desenvolvido por futuros professores de matemática ao participarem de um contexto formativo no âmbito da proporcionalidade**. Este estudo tem como justificativa a necessidade de um corpo de conhecimentos especializados para o ensino de tópicos da matemática.

O(A) Sr(a) está sendo convidado porque está em **formação inicial para professor de matemática na educação básica**.

O(A) Sr(a). tem plena liberdade de recusar-se a participar ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma para o tratamento que recebe neste serviço no **Instituto de Ciências Exatas** da **Universidade Federal do Amazonas**.

Caso aceite participar, sua participação consiste em, numa primeira etapa, responder a dois questionários contendo questões abertas e fechadas por meio escrito seguido de uma entrevista semiestruturada. O objetivo dos questionários é aceder ao conhecimento do futuro professor sobre o tópico de proporcionalidade e acessar o seu pensamento proporcional, e o objetivo da entrevista é refinar e aprofundar essa descrição. Na segunda etapa, sua participação consiste em atender a uma oficina formativa a ser realizada em 5 encontros de 4h cada visando desenvolver o seu conhecimento especializado no âmbito da proporcionalidade. Ressaltamos que o(a) Sr(a) tem a liberdade de participar da primeira etapa e não participar da segunda etapa.

Solicitamos autorização para registro de imagem e som do(a) Sr(a), realizado por meio de câmera filmadora e/ou aparelho celular e microfones de lapela. Prevendo procedimentos que assegurem a confidencialidade e a privacidade, a proteção da imagem e a não estigmatização dos participantes da pesquisa, garantimos a não utilização das informações para além desta pesquisa em prejuízo das pessoas e/ou das comunidades, inclusive em termos de autoestima, de prestígio e/ou de aspectos econômico-financeiros.

Toda pesquisa com seres humanos envolve riscos aos participantes. Nesta pesquisa os riscos para o(a) Sr.(a) são: constrangimento; timidez; nervosismo; invasão de privacidade; irritabilidade; incômodo; vergonha; cansaço; alteração de autoestima; estresse; aborrecimento; estigmatização; discriminação; evocação de memórias; revitimizar; reforços na conscientização sobre uma condição física ou

psicológica restritiva ou incapacitante; alterações de comportamento; quebra de sigilo e confidencialidade; quebra de anonimato; exposição a situação vexatória; exposição de terceiros; exposição acentuada a situações de desconforto; imprecisão na divulgação dos resultados, etc. Para evitar e/ou reduzir tais riscos tomaremos as seguintes medidas de prevenção ou minimização dos riscos: Ambiente acolhedor; ambiente privativo; perguntas de forma objetiva; estar atento aos sinais verbais e não verbais de desconforto; liberdade em interromper a participação; possibilidade de recusa a responder a qualquer pergunta; sigilo dos dados; utilização de nomes fictícios ou outra forma de manutenção do anonimato; assegurar a confidencialidade e a privacidade, a proteção da imagem e a não estigmatização, garantindo a não utilização das informações em prejuízo das pessoas e/ou das comunidades; não expor imagens que possibilitem a identificação do participante; exclusão do nome das Instituições participantes de modo a não expor terceiros; etc.

Também são esperados os seguintes benefícios com esta pesquisa: **Desenvolver o conhecimento especializado para o ensino do tópico proporcionalidade; repensar de práticas pedagógicas; desenvolver novas habilidades; obter evidências para apoiar a incorporação de ações; desenvolver estratégias pedagógicas**.

Se julgar necessário, o(a) Sr(a) dispõe de tempo para que possa refletir sobre sua participação, consultando, se necessário, seus familiares ou outras pessoas que possam ajudá-los na tomada de decisão livre e esclarecida.

Sua participação na pesquisa é totalmente voluntária, ou seja, não é obrigatória. Caso o(a) Sr.(a) decida não participar, ou ainda, desistir de participar e retirar seu consentimento durante a pesquisa, não haverá nenhum prejuízo ao vínculo institucional que você recebe ou possa vir a receber na instituição.

Garantimos ao(à) Sr(a), e seu acompanhante quando necessário, o ressarcimento das despesas devido sua participação na pesquisa, ainda que não previstas inicialmente, como despesas de transporte e alimentação. Essas despesas, caso ocorram, serão pagas pelo orçamento da pesquisa via transferência bancária.

Também estão assegurados ao(à) Sr(a) o direito a pedir indenizações e a cobertura material para reparação a dano causado pela pesquisa ao participante da pesquisa.

Asseguramos ao(à) Sr(a) o direito de assistência integral gratuita devido a danos diretos/indiretos e imediatos/tardios decorrentes da participação no estudo ao participante, pelo tempo que for necessário.

Garantimos ao(à) Sr(a) a manutenção do sigilo e da privacidade de sua participação e de seus dados durante todas as fases da pesquisa e posteriormente na divulgação científica.

O(A) Sr(a). pode entrar com contato com o pesquisador responsável, **Roberta dos Santos Rodrigues,** a qualquer tempo para informação adicional pelo telefone 92 98816-0880, endereço Av. Genebra, 4, Qd.25, Conj. Campos Elíseos, Bairro Planalto e pelo e-mail roberta.rodrigues@ufam.edu.br ou com o pesquisador **Francisco Eteval da Silva Feitosa**, pelo telefone 92 99193-7158 e pelo e-mail sfeitosa@ufam.edu.br.

O(A) Sr(a). também pode entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Federal do Amazonas (CEP/UFAM) e com a Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), quando pertinente. O CEP/UFAM fica na Escola de Enfermagem de Manaus (EEM/UFAM) - Sala 07, Rua Teresina, 495 – Adrianópolis – Manaus – AM, Fone: (92) 3305-1181 Ramal 2004, E-mail: cep@ufam.edu.br. O CEP/UFAM é um colegiado multi e transdisciplinar, independente, criado para defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos.

Este documento (TCLE) será elaborado em duas VIAS, que serão rubricadas em todas as suas páginas, exceto a com as assinaturas, e assinadas ao seu término pelo(a) Sr(a)., ou por seu representante legal, e pelo pesquisador responsável, ficando uma via com cada um.

CONSENTIMENTO PÓS-INFORMAÇÃO

Li e concordo em participar da pesquisa.

Manaus-AM, ____/_____/_____

_____

Assinatura do Participante

_____

Assinatura do Pesquisador Responsável